llow
9 7/8 x 6 3/16
inside
9 5/8 x 6

QK1
.S66
1911
v.35

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

TRENTE-CINQUIÈME ANNÉE, 1910-1911

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1911

SHOUT
SHARE
IT

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Cette revue, publiée en exécution de l'article 3 des statuts, paraît tous les 3 mois, depuis janvier 1877, par livraisons de 350 pages environ. Elle forme chaque année deux forts volumes in-8°.

Le prix d'abonnement est de 20 francs par an, pour tous les pays de l'Union postale.

Les membres de la Société ont droit à une réduction de 25 %.

ON S'ABONNE

au secrétariat de la Société scientifique de Bruxelles

11, rue des Récollets, 11

LOUVAIN

Le volume des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE : **M. Paul Mansion,** 2, *Quai des Dominicains, Gand.*

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
DE BRUXELLES

TRENTE-CINQUIÈME ANNÉE, 1910-1911
PREMIER FASCICULE

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1911

4,50

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Statuts **3**
Règlement pour l'encouragement des recherches scientifiques . . . **6**
Lettres pontificales **11**
Liste des membres de la Société scientifique de Bruxelles, année 1911. **17**
Session du 27 octobre 1911, à Charleroi. — Séances des Sections.
  Première Section **63**
  Deuxième — **81**
  Troisième — **99**
  Quatrième — **118**
  Assemblée générale **119**

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Sur la méthode de l'approximation minimum, par M. Ch.-J. de la Vallée-Poussin 1
La carte panoramique agricole de la Belgique, par M. Albert Henry . 17
La première édition de la « *Clavis mathematica* » d'Oughtred. Son influence sur la « Géométrie » de Descartes, par le R. P. H. Bosmans, S. J. 24

Le volume des Annales de la Société scientifique paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** de la Revue et des Annales, et l'**Administration** de ces deux publications et de la *Société scientifique,* au Secrétariat, 11, rue des Récollets, Louvain.

Adresse du secrétaire général : **M. Paul Mansion,**
2, quai des Dominicains, Gand.

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Louvain. — Imprimerie F. & R. Ceuterick
60, rue Vital Decoster, 60

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

> *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.*
>
> CONST. DE FID. CATH., C. IV.

TRENTE-CINQUIÈME ANNÉE, 1910-1911

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1911

MO. BOT. GARDEN
1911

PREMIÈRE PARTIE

—

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

Article premier. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de *Société scientifique de Bruxelles*, avec la devise : « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* (1). »

Art. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

Art. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche (2).

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (3).

Art. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

---

(1) Const. de Fid. cath., c. IV.

(2) Dans sa séance du 18 février 1907, le Conseil a décidé de ne plus publier des travaux trop étendus qui sont plutôt des livres que des mémoires.

(3) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de Revue des Questions scientifiques. Elle forme, chaque année, deux volumes in-8° de 700 pages.

Art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres renouvelable annuellement par quart à la session de Pâques. Le Conseil choisit, dans son sein, le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire, le Trésorier. Toutefois, il peut choisir, en dehors du Conseil, le Président ou le premier Vice-Président. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles (1). En cas de décès ou de démission d'un membre du Bureau ou du Conseil, le Conseil peut lui donner un successeur pour achever son mandat (2).

Art. 6. — Pour être admis dans l'Association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les assemblées générales.

---

(1) Ancien art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles (Cf. Annales de la Société scientifique, 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

(2) D'après une décision du Conseil du 27 novembre 1907, les membres du Conseil, sortants ou démissionnaires, en restent membres honoraires avec voix consultative, s'ils le désirent.

ART. 8. — Chaque année, il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels (1).

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

ART. 9. — Lorsqu'une résolution, prise par l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

ART. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

ART. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en six sections : I. *Sciences mathématiques*. II. *Sciences physiques*. III. *Sciences naturelles*. IV. *Sciences médicales*. V. *Sciences économiques*. VI. *Sciences techniques* (2).

Tout membre de l'Association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Chaque section peut avoir des réunions extraordinaires, en dehors des sessions, pourvu que les travaux scientifiques auxquels ces réunions donnent lieu soient soumis à la section, pendant les sessions ordinaires de la Société (3).

---

(1) ANCIEN ART. 8. — Chaque année, la Société tient quatre sessions. La principale, en octobre, pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante. Les trois autres sessions, en janvier, avril et juillet, pourront durer trois jours, et auront pour objet principal de préparer la session d'octobre (Cf. ANNALES, 1878, t. II, 1re partie, p. 169 ; 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

(2) Sur la création de la section des *sciences techniques*, détachée de la section des sciences mathématiques, voir les ANNALES, t. XXX (1906), 1re partie, pp. 79, 117, 265, et t. XXXI (1907), 1re partie, p. 307.

(3) Ce dernier paragraphe, voté par le Conseil général le 25 février 1902, a été soumis à l'Assemblée générale et approuvé le 10 avril 1902 (Cf. ANNALES, t. XXVI, 1902, 1re partie, p. 198).

Art. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'Association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué (1).

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'Association et présente dans la session de Pâques le compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'Association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'articte 2.

---

(1) Peuvent assister aux séances du Conseil, avec voix consultative : 1° Les Présidents, et, en cas d'empêchement des Présidents, les Secrétaires des sections. 2° Les membres du Conseil, sortants ou démissionnaires, qui en sont restés membres honoraires.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES

1. — Le Conseil de la *Société scientifique de Bruxelles* a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — Le Conseil peut, sur la proposition de la section compétente, accorder des encouragements pécuniaires ou des médailles aux auteurs des meilleurs travaux présentés par les membres de cette section. L'ensemble de ces récompenses ne peut dépasser annuellement 1000 francs.

3. — A la session de Pâques, chaque section désignera une ou plusieurs questions à mettre au concours. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil qui donnera aux questions la publicité convenable (1).

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante, resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société ; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répèteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

---

(1) Rédaction arrêtée par le Conseil, en sa séance du 12 mai 1910.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix sont décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a obligation de publier aucun travail couronné ; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis à la section compétente, au plus tard à la session de janvier, autant que possible, et transmis au Conseil, avec l'avis de la section, au 1er février. Le 1er octobre de l'année qui suit celle où a été proposée la question, est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat (1).

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale ; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes des subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses ANNALES s'il y a lieu.

---

(1) Rédaction arrêtée par le Conseil, en sa séance du 23 novembre 1910.

LETTRES
DE
S. S. LE PAPE LÉON XIII
AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

I

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis scientificae Bruxellis constitutae

LEO PP. XIII

Dilecti Filii, salutem et Apostolicam benedictionem

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi religionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exsurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse ;* quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV^{a} de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes caelestibus praesidiis confirmet ac muniat; quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae, apud S. Petrum, die 15 Ianuarii 1879, Pontificatus Nostri Anno Primo.

Leo PP. XIII.

A nos chers Fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

Chers Fils, salut et bénédiction Apostolique

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège Apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer qu'*il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison*, comme l'a déclaré dans la Constitution IV *de fide catholica,* le Saint Concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des Saints Pères. C'est pourquoi

Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans ses statuts un article défendant à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne ; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement, de tout l'effort de leur esprit, l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'Il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction Apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'An Un de Notre Pontificat.

Léon XIII, Pape.

II

Dilectis Filiis, Sodalibus Consociationis Bruxellensis a scientiis provehendis, Bruxellis

LEO PP. XIII

Dilecti Filii, salutem et Apostolicam benedictionem

Quod, pontificatu Nostro ineunte, de Sodalitate vestra fuimus ominati, id elapso iam ab institutione eius anno quinto et vicesimo, feliciter impletum vestris ex litteris perspicimus. In provehendis enim scientiarum studiis, sive eruditorum coetus habendo, sive Annalium volumina edendo, nunquam a proposito descivistis, quod coeptum fuerat ab initio, ostendendi videlicet *nullam inter fidem et rationem dissensionem veram esse posse*. Benevolentiam Nostram ob vestras industrias testamur ; simulque hortamur, ut coeptis insistatis alacres, utpote temporum necessitati opportunis admodum. Naturae enim cognitio, si recto quidem et vacuo praeiudiciis animo perquiratur, ad divinarum rerum notitiam conferat necesse est, divinaeque revelationi fidem adstruat. Hoc ut vobis, vestraque opera, quam multis accidat, Apostolicam benedictionem, munerum coelestium auspicem, Sodalitati vestrae amantissime impertimur.

Datum Romae, apud S. Petrum, die 20 Martii Anno 1901, Pontificatus Nostri Vicesimo Quarto.

LEO PP. XIII

A nos chers Fils, les Membres de la Société scientifique de Bruxelles, à Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE

Ce qu'au début de Notre pontificat, Nous avions présagé de votre Société, aujourd'hui, vingt-cinq ans après sa fondation, vos lettres Nous en apprennent l'heureux accomplissement. En travaillant au progrès des études scientifiques, soit par vos réunions savantes, soit par la publication de vos Annales, vous ne vous êtes jamais départis de votre dessein initial, celui de montrer que *entre la foi et la raison, aucun vrai désaccord ne peut exister*. Nous vous exprimons Notre bienveillance pour vos efforts, et Nous vous exhortons en même temps à poursuivre avec ardeur votre entreprise si bien en rapport avec les nécessités actuelles. Car l'étude de l'univers, si elle est menée avec droiture et sans préjugé, doit aider à la connaissance des choses de Dieu, et établir la foi à la révélation divine. Pour que ce bonheur vous advienne et par vous à beaucoup d'autres, Nous accordons avec la plus vive sympathie à votre Société, la bénédiction Apostolique, gage des faveurs célestes.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 20 Mars 1901, l'An Vingt-quatrième de Notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

LETTRE

DE

S. É. LE CARD. R. MERRY DEL VAL

Secrétaire d'État de

S. S. LE PAPE PIE X

AU PRÉSIDENT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES EN RÉPONSE A L'ADRESSE AU SAINT-PÈRE

Illmo Signore

Trasmesso da Mons. Nunzio di Bruxelles, è pervenuto al Santo Padre il nobile indirizzo della Società scientifica, di cui la S. V. Illma è degno Presidente. Per incarico quindi dell' Augusto Pontefice mi è grato significarle che Sua Santità si è vivamente compiaciuta dell'omaggio reso alla Sua Venerata Persona da cotesto illustre sodalizio, il quale stimò suo precipuo dovere di umiliare ossequio ed osservanza al Vicario di Cristo fin dalla prima assemblea tenuta sotto il novello Pontificato. La Santità Sua, bene apprezzando siffatto officio, e rilevando d'altra parte con alta soddisfazione il rettissimo ed onorevole programma della sullodata Società, la cui divisa è ispirata ai principii sanciti anche nel Concilio Vaticano, ha tributato assai volontieri un particolare encomio a Lei ed a tutti i socii, e mentre ha espressi i più caldi ringraziamenti per un atto così cortese, non ha indugiato a dichiarare che integra ed anzi di gran lunga accresciuta perdura nell' animo Suo la benevolenza, onde il detto Sodalizio fu onorato da Pio IX et da Leone XIII, di sa : me : Il Santo Padre confida inoltre, che i singoli socii, del cui sapere ama nutrire la stima più lusinghiera, si studieranno incessantemente di meritare sempre meglio della Religione e delle scienze, e mentre ha invocati su di loro gli aiuti celesti, li ha di gran cuore benedetti.

Colgo poi con piacere l'opportunità per dichiararmi con sensi di distinta stima,

Di V. S. Illma

Affmo per servirla
R. Card. Merry del Val.

Roma, 5 maggio 1904.

Illustrissime Seigneur

La noble adresse de la Société scientifique, dont Votre Seigneurie illustrissime est le digne Président, est parvenue au Saint-Père par l'entreprise de Mgr le Nonce de Bruxelles. Il m'est agréable de vous faire savoir, au nom de l'Auguste Pontife, que Sa Sainteté a reçu avec grande joie l'hommage rendu à Sa Personne Vénérée par cette illustre association qui s'est fait un impérieux devoir de témoigner son humble et respectueuse soumission au Vicaire du Christ dès sa première assemblée tenue sous le nouveau Pontificat. Sa Sainteté, appréciant justement cet hommage et considérant d'autre part avec une vive satisfaction le programme si sage et si honorable de votre Société, dont la devise s'inspire des principes mêmes sanctionnés par le Concile du Vatican, vous a très volontiers accordé, à vous et à tous les membres, un éloge spécial ; et en même temps qu'Elle exprimait ses remerciements les plus chaleureux pour votre aimable attention, Elle n'a pas hésité à déclarer que la bienveillance dont votre Société a été honorée par Pie IX et Léon XIII, de sainte mémoire, demeure entière et qu'elle s'est même de beaucoup accrue dans son cœur. Le Saint-Père a l'espoir fondé que tous les membres, pour le savoir desquels Il aime à nourrir l'estime la plus flatteuse, s'efforceront sans trêve de mériter toujours davantage de la Religion et des sciences, et tandis qu'Il invoquait pour eux les secours célestes, Il les a bénis de grand cœur.

Je saisis avec plaisir cette occasion de me déclarer, avec des sentiments de considération distinguée,

De Votre Seigneurie illustrissime

le très affectionné serviteur
R. Card. Merry del Val.

Rome, le 5 mai 1904.

LISTES

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

ANNÉE 1911

Listes des membres fondateurs

S. É. le cardinal DECHAMPS (1), archevêque de	Malines.
François DE CANNART D'HAMALE (1)	Malines.
Charles DESSAIN	Malines.
Jules VAN HAVRE (1)	Anvers.
Le chanoine MAES (1)	Bruges.
Le chanoine DE LEYN (1)	Bruges.
LEIRENS-ELIAERT	Alost.
Frank GILLIS (1)	Bruxelles.
Joseph SAEY	Bruxelles.
Le Ch^{er} DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT (1)	Saint-Nicolas.
Le Collège SAINT-MICHEL	Bruxelles.
Le Collège NOTRE-DAME DE LA PAIX	Namur.
Le Duc D'URSEL, sénateur (1)	Bruxelles.
Le P^{ce} Gustave DE CROY (1)	Le Rœulx (Hainaut).
Le C^{te} DE T'SERCLAES (1)	Gand.
Auguste DUMONT DE CHASSART (1)	Mellet (Hainaut).
Charles HERMITE, membre de l'Institut (1)	Paris.
L'École libre de l'IMMACULÉE-CONCEPTION	Vaugirard-Paris.
L'École libre SAINTE-GENEVIÈVE	Paris.
Le Collège SAINT-SERVAIS	Liége.
Le C^{te} DE BERGEYCK (1)	Beveren-Waes.
L'Institut SAINT-IGNACE	Anvers.
Philippe GILBERT (1), correspond^{t} de l'Instit.	Louvain.
Le R. P. PROVINCIAL de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège SAINT-JEAN BERCHMANS	Louvain.
Le Collège SAINT-JOSEPH	Alost.

---

(1) Décédé.

Le chanoine DE WOUTERS (1)	Braine-le-Comte.
Antoine D'ABBADIE (1), membre de l'Institut.	Paris.
S. É. le cardinal HAYNALD (1), archevêque de Kalosca et Bàcs.	Kalocsa (Hongrie).
S. É. le cardinal Séraphin VANNUTELLI	Rome.
S. G. Mgr DU ROUSSAUX (1), évêque de	Tournai.
S. É. le cardinal GOOSSENS (1), archevêque de	Malines.
R. BEDEL	Marseille.
S. G. Mgr BELIN (1), évêque de	Namur.
Eugène PECHER (1)	Bruxelles.
S. É. le cardinal FERRATA	Rome.
S. É. le cardinal NAVA DI BONTIFE.	Catane.
S. Exc. Mgr. RINALDINI, nonce apostolique.	Madrid.
S. Exc. Mgr GRANITO DI BELMONTE, nonce apostolique	Vienne.
Éd. GOEDSEELS.	Uccle.

Liste des membres honoraires

S.A.R. CHARLES-THÉODORE (1), duc en Bavière	Possenhofen.
Antoine D'ABBADIE (1), membre de l'Institut	Paris.
AMAGAT, membre de l'Institut	Paris.
Mgr BAUNARD, recteur honoraire de l'Univers. cathol.	Lille.
Joachim BARRANDE (1)	Prague.
BARROIS, membre de l'Institut.	Lille.
A. BÉCHAMP (1).	Paris
Aug. BÉCHAUX, correspondant de l'Institut.	Paris.
Le Prince BONCOMPAGNI (1), de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
BOUSSINESQ, membre de l'Institut.	Paris.
E. BRANLY, membre de l'Institut	Paris.
L. DE BUSSY (1), membre de l'Institut	Paris.
Dr DESPLATS.	Lille.
P. DUHEM, correspondant de l'Institut	Bordeaux.

---

(1) Décédé.

J.-H. Fabre, correspondant de l'Institut	Sérignan (France).
Dr Fiessinger, correspondant de l'Académie de Médecine	Paris.
Le docteur Foerster (1)	Aix-la-Chapelle.
J. Gosselet, correspondant de l'Institut	Lille.
C. Grand' Eury, correspondant de l'Institut	Saint-Étienne (France).
Haton de la Goupillière, membre de l'Inst.	Paris.
P. Hautefeuille (1), membre de l'Institut.	Paris.
Dr Heis (1)	Münster.
Charles Hermite (1), membre de l'Institut.	Paris.
G. Humbert, membre de l'Institut	Paris.
Le vice-amiral de Jonquières (1), membre de l'Institut	Paris.
Camille Jordan, membre de l'Institut	Paris.
A. de Lapparent (1), secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences	Paris.
G. Lemoine, membre de l'Institut	Paris.
F. Le Play (1), membre de l'Institut.	Paris.
Dr W. Lossen (1)	Heidelberg.
Le général J. Newton (1)	New-York.
D.-P. Œhlert, correspondant de l'Institut.	Laval (France).
Louis Pasteur (1), membre de l'Institut	Paris.
R. P. Perry, S. J. (1), de la Société Royale de Londres	Stonyhurst.
É. Picard, membre de l'Institut	Paris.
Victor Puiseux (1), membre de l'Institut	Paris.
A. Barré de Saint-Venant (1), membre de l'Institut	Paris.
Paul Sabatier, correspondant de l'Institut.	Toulouse.
R. P. A. Secchi, S. J. (1), de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Paul Tannery (1)	Pantin (France).
Pierre Termier, membre de l'Institut	Paris.
R. P. Wasmann, S. J.	Valkenburg (Pays-Bas).
Aimé Witz, correspondant de l'Institut.	Lille.
Wolf, membre de l'Institut	Paris.
R. Zeiller, membre de l'Institut.	Paris.

---

(1) Décédé.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1911)

Abaurrea (Luis), Molviedro, 6. — Séville (Espagne).

Adan de Yarza (Ramon), ingénieur des Mines, 7, 1°, calle de Moreto. — Madrid.

d'Adhémar (V^te^ Robert), professeur aux Facultés catholiques, 14, place de Genevières. — Lille (Nord — France).

Allard (François), industriel. — Châtelineau (Hainaut).

Alliaume (Maurice), 8, avenue Victor Jacobs.— Berchem (Anvers).

Amagat, membre de l'Institut, examinateur d'admission à l'École polytechnique, 19, avenue d'Orléans. — Paris.

André (J.-B.), inspecteur général au Ministère de l'Agriculture, 127, avenue Brugmann. — Bruxelles.

d'Annoux (C^te^ H.), 74, boulevard Alexandre Martin. — Orléans (Loiret — France).

Annycke (Abbé Th.), maître de conférences à la Faculté libre des Sciences, 6, rue Auber. — Lille (Nord — France).

Arduin (Abbé Alexis), à N.-D. d'Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).

Ariès (Lieutenant-colonel), 9, boulevard du Roi. — Versailles (Seine-et-Oise — France).

Attout-Van Cutsem (E.), rue de Fer. — Namur.

Baivy (D^r^ Zénon), place Saint-Aubain. — Namur.

Balbas (Thomas), ingénieur des Mines. — San-Sebastian (Espagne).

Barbé (Maurice), ingénieur des Arts et Manufactures, 20, rue Eugène Manuel. — Paris (XVI^e^).

Barrois, membre de l'Institut, 41, rue Pascal. — Lille (Nord — France).

Baseil (Abbé), professeur au Séminaire. — Floreffe.

Bastin (F.), 104, chaussée de Malines — Anvers.

Baunard (Mgr), recteur honoraire de l'Université catholique, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Bauwens (D^r^ Isidore), rue de la Station. — Alost.

Bayet (Adrien), 33, Nouveau Marché aux Grains. — Bruxelles.

Beaujean (Charles), 208, avenue de la Couronne. — Ixelles (Bruxelles).

Béchaux (Aug.), correspondant de l'Institut, 56, rue d'Assas. — Paris.

Béco (Dr Lucien), professeur de clinique médicale à l'Université, correspondant de l'Académie royale de médecine, 25, rue Beeckman. — Liége.

Bedel (Abbé René), 125, boulevard National. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).

Beernaert (Auguste), Ministre d'État, membre de l'Académie royale de Belgique et associé de l'Institut de France, 11, rue d'Arlon. — Bruxelles.

Belpaire (Frédéric), ingénieur, 178, avenue du Margrave. — Anvers.

Berleur (Adolphe), ingénieur, 17, rue Saint-Laurent. — Liége.

Berlingin (Melchior), ingénieur-directeur des Établissements de Viviez et de Penchot de la Société de la Vieille-Montagne. — Viviez (Aveyron-France).

de Béthune (Bon Gaston), lieutenant au 5e régiment d'artillerie, répétiteur à l'École militaire, 39, avenue de la Cascade. — Bruxelles.

Bibot (Dr), place Léopold. — Namur.

de Bien (Fernand), 220, rue du Trône. — Bruxelles.

Blondel (Alfred), ingénieur, 1, place du Parc. — Tournai.

Blondel (G.), professeur à l'École des Hautes-Études commerciales, 31, rue de Bellechasse. — Paris.

de la Boëssière-Thiennes (Mis), 19, rue aux Laines. — Bruxelles ; ou, château de Lombise, par Lens (Hainaut).

Boine (Dr J.), 134, rue de la Station. — Louvain.

Bols (Abbé Joseph), professeur de sciences naturelles au Collège Saint-Rombaut. — Malines.

Bolsius, S. J. (R. P. Henri), 18a, Kerkstraat. — Oudenbosch (Pays-Bas).

Boschmans (Conego, Ricardo), Gymnasio Esperito Santo. — Jaguarâo (Estado do Rio Grande do Sul, Brazil).

Bosmans, S. J. (R. P. H.), professeur de mathématiques, Collège Saint-Michel, 22, boulevard St-Michel. — Bruxelles.

Bouckaert, professeur de mathématiques à l'Institut agricole de l'État. — Gembloux.

Boule, S. J. (R. P.), Oude Kasteel, Gemert (via Helmond, Noord-Brabant. — Pays-Bas).

Bourgeat (Chan.), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).

Boussinesq, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université, 22, rue Berthollet. — Paris.

du Boys (Paul), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — La Combe de Lancey, par Villard-Bonnot (Isère — France).

Branly (Édouard), membre de l'Institut, professeur à l'Institut catholique, 31, avenue de Tourville. — Paris.

Breithof (F.), 14a, place du Peuple. — Louvain.

Brifaut (Valentin), avocat, 134, rue de Stassart. — Bruxelles.

de Brouwer (Michel), ingénieur, 14, rue d'Elverdingen. — Ypres.

van der Bruggen (B^{on} Maurice), ancien Ministre de l'Agriculture, 18, rue du Gouvernement. — Gand.

Brunhes (Jean), professeur aux universités de Fribourg et de Lausanne, Clos Ruskin. — Fribourg (Suisse).

Bruyer (Frantz), à Ottignies (Brabant).

Bruylants (G.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets. — Louvain.

Bulliot (J.), professeur à l'Institut catholique, 114, rue de Vaugirard. — Paris.

Cabeau (Abbé Charles), professeur au Collège St-Joseph. — Virton.

Camboué (R. P. Paul), missionnaire catholique. — N.-D. de Lourdes d'Ambohibeloma, par Tananarive (Madagascar).

Capart (Jean), 17, avenue de la Station. — Auderghem (Brabant).

Capelle (Abbé Éd.), 79, avenue de Breteuil. — Paris (XV^{e}).

Cappellen (Guillaume), commissaire d'arrondissement, 4, place Marguerite. — Louvain.

Caratheodory (Prof. Costa), Scharnhorststrasse, 30. — Breslau (Allemagne).

Carlier (Joseph), ingénieur, 7, rue Joseph II. — Bruxelles.

Carton de Wiart (Edmond), directeur de la Société Générale, 4, avenue des Germains. — Bruxelles.

Cartuyvels (Jules), ingénieur honoraire des Mines, inspecteur général au Ministère de l'Agriculture, professeur honoraire de l'Université de Louvain, 231, rue de la Loi. — Bruxelles.

Casarès (Firmino), farmacia, 93, calle San Andrès. — La Coruña (Espagne).

Casteels (L.), docteur en sciences physiques et mathématiques, assistant à l'Observatoire royal. — Uccle (Bruxelles).

Castelein (R. P.), Collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Charles, S. J. (R. P. Jean), Ancienne Abbaye. — Tronchiennes (lez-Gand).

Cirera y Salse (D^{r} Luis), profesor libre de electroterapia, 19, prâl, calle Fontanella. — Barcelone (Espagne).

Cirera, S. J. (R. P. Richard), Observatoire de l'Èbre. — Tortosa (Espagne).

Claerhout (Abbé J.), 207, chaussée de saint-Job. — Uccle (Bruxelles).

Cocheteux (Chan.), directeur de l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

Cogels (J.-B.-Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.

Colegio de Estudios superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso, S. J.). — Bilbao (Espagne).

Collangettes, S. J. (R. P.), professeur de physique à l'Université Saint-Joseph. — Beyrouth (Syrie).

Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Collège Saint-François-Xavier, 10 and 11, Park Street. — Calcutta (Indes anglaises, via Brindisi).

Collège Saint-Jean Berchmans, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Collège Saint-Joseph, 13, rue de Bruxelles. — Alost.

Collège Saint-Michel (R. P. H. Bosmans, S. J.), 22, boulevard Saint-Michel. — Bruxelles.

Collège Saint-Servais, 92, rue Saint-Gilles. — Liége.

Conroy (Charles-C.), professeur d'astronomie au Saint Vincent's College, 250, East Fifteenth Street. — Los Angeles (Californie).

Convent (Alf.), docteur en médecine. — Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).

Conway (Arthur, W.), M. A., F. R. U. I., professeur de physique au Collège de l'Université catholique, Cosy Nook, 100, Leinster Road. — Rathmines (Dublin, Irlande).

Coomans (Léon), pharmacien, 212, avenue Albert. — Uccle (Bruxelles).

Coomans (Victor), chimiste, 212, avenue Albert. — Uccle (Bruxelles).

Cooreman (Gérard), 1, place du Marais. — Gand.

Coppieters de Stockhove (Abbé Ch.), directeur des Dames de l'Instruction chrétienne. — Bruges.

Coulon (H.), docteur en médecine, 9, rue des Chanoines. — Cambrai (Nord — France).

Cousin (L.), ingénieur, professeur honoraire de l'Université de Louvain, 27, rue de Vienne. — Bruxelles.

Cousot (Dr Georges). — Dinant.

Crame (Auguste), capitaine commandant d'artillerie, adjoint d'État-Major, 42, quai des Moines. — Gand.

Craninckx (Bon Oscar), 51, rue de la Loi. — Bruxelles.

Cuylits (Jean), docteur en médecine, 14, boulevard de Waterloo. Bruxelles.

Daniels (Dr Fr.), professeur à l'Université catholique de Fribourg (Suisse).

Dardel (Jean), à Aix-les-Bains (Savoie) ; ou 10, avenue Durante. — Nice (Alpes Maritimes — France).

Daubresse (Paul), ingénieur, professeur à l'Université, 98, rue de Paris. — Louvain.

Dauwe (Dr Ferdinand), assistant à la clinique médicale de l'Université, 9, rue des Douze Chambres. — Gand.

David (P.), docteur en droit et en sciences politiques. — Stavelot ; ou 50, boulevard Piercot. — Liége.

De Baets (Herman), 11, rue des Boutiques. — Gand.

Debaisieux (T.), professeur à l'Université, 14, rue Léopold. — Louvain.

De Becker (Chan. Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur. — Louvain.

De Bloo (Julien), ingénieur, 91, boulevard Frère-Orban. — Gand.

Deboucq (L.), ingénieur principal au corps des Mines, 8, rue Chapelle-Beausart. — Mont-sur-Marchienne.

De Brabandère (Victor), avocat près la Cour d'Appel, 57, rue du Marteau. — Bruxelles.

De Brouwer (Chan.), curé-doyen. — Ypres.

Dechevrens, S. J. (R. P. Marc), directeur de l'Observatoire du Collège Saint-Louis. — Saint-Hélier (Jersey — Iles-de-la-Manche — Angleterre).

Declercq (J.), ingénieur, directeur du Laboratoire d'électricité à l'Université, 34, rue Neuve Saint-Pierre. — Gand.

De Coster (Charles), ingénieur civil des Mines, 23, rue Coenraets. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Degive (A.), membre de l'Académie royale de médecine, 84, rue de Stassart. — Bruxelles.

De Grave (Dr Henri), 39, rue Thiéfry. — Bruxelles.

De Greef (Jules), conseiller au Conseil des Mines, 26, rue Breydel. — Bruxelles (Q.-L.).

Dejaer (Jules), directeur général des Mines, 24, avenue de la Floride. — Uccle (Bruxelles).

Dejardin (L.), directeur général des Mines, 124, rue Franklin. — Bruxelles (N.-E.).

De Jonghe, 29, rue Saint-Quentin. — Bruxelles.

De Laet (Jean), docteur en philosophie, 6, rue du Canal. — Malines.

De Lantsheere (Dr J.), oculiste, 215, rue Royale. — Bruxelles.

De Lantsheere (Léon), Ministre de la Justice, 83, rue du Commerce. — Bruxelles.

Delaunois (Dr G.), à Bonsecours, par Péruwelz (Hainaut).

Delcroix (Dr A.), 18, chaussée de Louvain. — Bruxelles.

Delemer (Jules), professeur à la Faculté libre des Sciences, 24, rue Voltaire. — Lille (Nord — France).

Delétrez (Dr A.), 7, rue de la Charité. — Bruxelles.

Delmer (Alexandre), ingénieur au Corps des mines, 14, place de la Reine. — Schaerbeek (Bruxelles).

Delvosal (Jules), docteur en sciences physiques et mathématiques, astronome-adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, 84, rue Rouge. — Uccle (Bruxelles).

Demanet (Chan. S.), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, 23, rue de Bériot. — Louvain.

De Munnynck, O. P. (R. P.), professeur à l'Université Albertinum. — Fribourg (Suisse).

De Muynck (Chan. R.), professeur à l'Université, 9, place Saint-Jacques. — Louvain.

Denoël, ingénieur au Corps des Mines, 93, rue Bois-l'Évêque. — Liége.

Denys (Dr J.), professeur à l'Université, Institut bactériologique, 96, rue Vital Decoster. — Louvain.

Deploige (Mgr), professeur à l'Université, Président de l'Institut supérieur de Philosophie, 1, rue des Flamands. — Louvain.

De Preter (Herman), ingénieur, 59, rue du Marais. — Bruxelles.

Deroitte (Dr Victor), 188, avenue Albert. — Bruxelles.

De Smedt, S. J. (R. P. Charles), président de la Société des Bollandistes, correspondant de l'Institut de France, Collège Saint-Michel, 22, boulevard St-Michel. — Bruxelles.

Desplats (Dr H.), professeur aux Facultés catholiques, 56, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Desplats (Dr René), 181, rue Nationale. — Lille (Nord — France).

Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.

De Vadder (Victor), avocat à la Cour d'appel, 16, rue Blanche. — Ixelles (Bruxelles).

De Veer, S. J. (R. P.), directeur der Vereenigingen G. en W., 70, Wijnhaven. — Rotterdam (Pays-Bas).

De Walque (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

De Wildeman (É.), conservateur au Jardin Botanique de l'État, 122, rue des Confédérés. — Bruxelles (N.-E.).

D'halluin (Dr Maurice), chef des travaux de physiologie à la Faculté catholique de Médecine, 8, rue Nicolas Leblanc. — Lille (Nord — France).

D'Hoop (E.), ingénieur, 80, rue Gachard. — Ixelles.

Dierckx, S. J. (R. P. Fr.), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Dochain-Defer (Félix), industriel. — Couillet.

de Dorlodot (Chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université, 44, rue de Bériot. — Louvain.

de Dorlodot (Sylvain), château de Floriffoux. — Floreffe (prov. de Namur).

Drion (Bon Adolphe). avocat. — Gosselies.

Dubois (Ernest), directeur de l'Institut supérieur de commerce, membre du Conseil colonial, 36, rue de Vrière. — Anvers.

Dubois (Victor), docteur en géographie, professeur à l'École normale. — Couvin.

Dufrane (Dr C.), chirurgien à l'hôpital, 36, rue d'Havré. — Mons.

Duhem (Pierre), correspondant de l'Institut, associé de l'Académie royale de Belgique, professeur de physique à la Faculté des Sciences, 18, rue de la Teste. — Bordeaux (Gironde — France).

Dumas-Primbault (Henri), ingénieur, château de la Pierre. — Cérilly (Allier — France).

Dumez (Abbé Robert), docteur en sciences naturelles, professeur au Petit Séminaire. — Roulers (Flandre occidentale).

Dumont (André), professeur à l'Université, 18, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Dumortier, conseiller à la Cour d'appel, 7, place Van Artevelde. — Gand.

Duplat (G.), avocat à la Cour d'appel, 48, rue aux Laines. — Bruxelles.

Dupont (Dr Émile), médecin de bataillon, chef des laboratoires de bactériologie et de radiographie à l'Hôpital militaire, 12, rue Goffart. — Bruxelles.

Dupriez (Léon), professeur à l'Université, 194, rue de Bruxelles. — Louvain.

Dupuis (Henri), ingénieur, administrateur de la Société anonyme des Usines de Montcherret. — Acoz (Hainaut).

Duquenne (Dr Louis), 15, rue Lonhienne. — Liége.

Duret (Dr), doyen de la Faculté catholique de médecine, 21, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Dusausoy (Clément), professeur à l'Université, 107, chaussée de Courtrai. — Gand.

Dusmet y Alonso (José Marie), docteur en sciences naturelles, 7, plaza de Santa-Cruz. — Madrid.

Duthoit (E.), professeur à la Faculté catholique de Droit, 141, rue Jacquemars-Gielée. — Lille (Nord — France).

Dutilleux (Maurice), ingénieur, 4, place François-Bossuet. — Bruxelles.

Dutordoir (Hector), ingénieur en chef, directeur du service technique provincial, 217, boulevard du Château. — Gand.

École libre de l'Immaculée-Conception. — Vaugirard-Paris.

École libre Sainte-Geneviève, rue des Postes. — Paris.

Eeckhout (G.), avocat à la Cour d'appel, 28, rue Dautzenberg. — Bruxelles.

Egan, S. J. (R. P. Michel), M. A., F. R. U. I., Miltown Park. — Dublin (Irlande).

Evrard (N.), directeur gérant des Charbonnages de Marcinelle-Nord. — Marcinelle.

Fabre (J.-H.), correspondant de l'Institut. — Sérignan, par Vaucluse (Vaucluse — France).

Fabry (Louis), docteur ès sciences, astronome à l'Observatoire, 2, place de la Corderie. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).

Fagnart (Émile), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université de Gand, 9, place des Gueux. — Bruxelles (N.-E.).

Farina (Paul), docteur en médecine, 20, rue de la République. — Menton (Alpes Maritimes — France).

de Favereau de Jenneret (B^on^), ancien Ministre des Affaires étrangères. — Bruxelles.

Fenaert (Abbé Florent), maître de conférences à l'Université catholique, 81, rue Denfert-Rochereau. — Lille (Nord — France).

Fenaux (Édouard), directeur honoraire de la prison centrale, chaussée de Tirlemont. — Louvain.

Fernandès (D^r^ Rob.), 13, avenue Galilée. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).

Ferrata (S. É. le cardinal). — Rome.

Fiessinger (D^r^), membre correspondant de l'Académie de médecine de Paris, 4, rue de la Renaissance. — Paris.

Fita y Colomé, S. J. (R. P. Fidel), 12, calle de Isabel la Catolica. — Madrid.

Fonssagrives (Chanoine), aumônier de l'Association générale des Étudiants catholiques de Paris, 18, rue du Luxembourg. — Paris.

de Fooz (Guillaume), ingénieur de la Société Ottomane de Tramways et d'Électricité. — Beyrouth (Turquie).

Fournier O. S. B. (Dom Grégoire), 55, boulevard de Jodoigne extérieur. — Louvain.

Francotte (Henri), professeur à l'Université, 1, rue Lebeau. — Liége.

Francotte (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liége.

Gaillard, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Garcia de la Vega (B^on^ Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Gauthier (Chanoine), 21, rue Louise. — Malines.

Gelin (Abbé E.), docteur en philosophie et en théologie, professeur de mathématiques supérieures au Collège Saint-Quirin. — Huy.

Gendebien (Paul), docteur en droit, 53, rue Montoyer. — Bruxelles.

Georgetown College Observatory (Rev. Director of the). — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).

Gerard (Ern.), secrétaire général du Ministère des Chemins de fer, Postes et Télégraphes, 21, avenue de la Renaissance. — Bruxelles.

de Gerlache de Gomery, capitaine-commandant d'État-Major, 70, avenue de Tervueren. — Bruxelles.

Gesché (L.), professeur à l'Université, 20, rue d'Egmont. — Gand.

Gilbert (Paul), ingénieur. — Heer-Agimont (Namur).

Gillès de Pélichy (B^on^ Ch.), membre de la Chambre des Représentants. — Gits-lez-Roulers ; ou, rue Fossé-aux-Loups. — Bruges.

Glibert (D.), docteur en médecine, inspecteur du Travail. — Uccle (Bruxelles).

Glorieux, docteur en médecine, 36, rue Jourdan. — Bruxelles.

Goedseels (Édouard), administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique, professeur à l'Université de Louvain, 140, rue de Bruxelles. — Louvain.

Goffart, chargé de cours à l'Université de Gand, 1, place des Barricades. — Bruxelles.

Gollier (Th.), professeur à l'Université de Liége, château de Glain. — Rixensart (Brabant).

Gonzalez de Castejon (Miguel), comte d'Aybar, lieutenant colonel d'État-Major, secrétaire de S. M. le Roi d'Espagne, Real palacio. — Madrid.

Goris (Ch.), docteur en médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.

Gosselet (Jules), correspondant de l'Institut, docteur honoraire de l'Université de Louvain, professeur émérite de la Faculté des Sciences, 18, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

Grafein (Mgr), professeur à l'Institut catholique, 47, rue d'Assas. — Paris.

Grand' Eury (Cyrille), correspondant de l'Institut, professeur honoraire à l'École des Mines, 5, Cours Victor Hugo. — Saint-Étienne (Loire — France).

Granito di Belmonte (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Vienne.

de Greef, S. J. (R. P. Henri), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Grégoire (Chan. Victor), professeur à l'Université, 44, rue de Bériot. — Louvain.

Greindl (B^{on}), capitaine commandant d'État-Major, professeur à l'École de guerre, 19, rue Tasson-Snel. — Bruxelles.

Grinda (Jésus), ingénieur des Ponts et Chaussées, Fuencarral, 74 y 76. — Madrid.

de Grossouvre (A.), ingénieur en chef des Mines, 4, rue Petite Armée. — Bourges (Cher — France).

Guelton (Georges), attaché au Ministère de l'Intérieur, 119, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Guermonprez (D^r), professeur aux Facultés catholiques, membre correspondant de l'Académie royale de médecine de Belgique et de la Société de chirurgie de Paris, 63, rue d'Esquermes. — Lille (Nord — France).

Guicheteau, S. P. M. (Abbé F. H.), 120, West 24th Street. — New-York.

Hachez (F.), professeur à l'Université de Louvain, 19, rue de Pavie. — Bruxelles.

Hagen, S. J. (R. P.), directeur de l'Observatoire du Vatican. — Rome.

Haibe (D^r Achille), directeur de l'Institut provincial de Bactériologie, rue Louise. — Namur.

Hallez (E.), ingénieur-directeur au charbonnage de Grand-Hornu. — Hornu (Hainaut).

Halot (Alex.), consul du Japon, 13, rue de Florence. — Bruxelles.

Hamonet (Abbé), professeur à l'Institut catholique, 74, rue de Vaugirard. — Paris.

Hans (Jules). lieutenant d'artillerie, adjoint d'État-Major, 28, rue Dothée. — Liége.

Harmant (Émile), ingénieur, 121, rue de Pâturages. — Wasmes (Hainaut).

Haton de la Goupillière (J.-N.), membre de l'Institut, directeur honoraire de l'École des Mines, 56, rue de Vaugirard. — Paris.

Havenith (J.), lieutenant adjoint d'État-Major, 2, place Quételet. Bruxelles.

Havet (Dr J.), professeur à l'Université, 87, rue des Flamands. — Louvain.

Hebbelynck (Mgr A.), recteur magnifique honoraire de l'Université de Louvain. — Meirelbeke (Gand).

Hélin (Henri), chaussée de Waterloo. — Ixelles (Bruxelles).

Helleputte (G.), Ministre de l'Agriculture et des Travaux Publics. — Bruxelles.

de Hemptinne (Alexandre), professeur à l'Université de Louvain, 51, rue Basse des Champs. — Gand.

Henrard (Dr Étienne), 105, avenue du Midi. — Bruxelles.

Henrard (Dr Félix), 38, rue Washington. — Bruxelles.

Henry (Albert), avocat, chef de division au Ministère de l'Intérieur, 216, avenue Rogier. — Bruxelles.

Henry (Comdt J.), boulevard Dolez. — Mons.

Henry (Louis), professeur à l'Université, correspondant de l'Institut, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

Henry (Paul), professeur à l'Université, 11, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Henseval (Dr Maurice), inspecteur chargé de la direction du laboratoire du service de santé et d'hygiène, 178, avenue Georges-Henri. — Bruxelles.

Hervier (Abbé Joseph), 31, Grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).

Heylen (S. G. Mgr), évêque de Namur.

Heymans (S. F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 77, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Heynen (Dr W.), membre de la Chambre des Représentants. — Bertrix (province de Luxembourg); ou, 85, rue du Commerce. — Bruxelles.

Humbert (G.), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Mines, professeur à l'École polytechnique, 10, rue Daubigny. — Paris.

Huyberechts (Dr Th.), 10, rue Hôtel des Monnaies. — Bruxelles.

Iniguez y Iniguez (Francisco), catedrático de astronomia en la Universidad, director del Observatorio astronomico. — Madrid.

Institut Saint-Ignace, 47, Courte rue Neuve. — Anvers

Jacobs (Mgr F.), prélat de la Maison de Sa Sainteté, curé-doyen émérite des SS. Michel et Gudule, 246, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

Jacobs (Fernand), président de la Société belge d'astronomie, 21, rue des Chevaliers. — Bruxelles.

Janne (Henry), ingénieur civil des Mines, docteur en sciences physiques et mathématiques, répétiteur à l'Université, 109, rue Louvrex. — Liége.

Janssens (Félix), avocat, 29, rue du Prince Royal. — Ixelles (Bruxelles.

Javaux (Dr), 79, rue des Éburons. — Bruxelles.

de **Joannis** (Abbé Joseph), 7, rue Coëtlogon. — Paris.

Joly (Albert), juge au tribunal de première instance, 8, rue de la Grosse-Tour. — Bruxelles.

Joly (Léon), conseiller au Conseil des Mines, 56, avenue Brugmann. — Bruxelles.

Jordan (Camille), membre de l'Institut, professeur à l'École polytechnique, 48, rue de Varennes. — Paris.

Jourdain (Louis), ingénieur, 13, rue Montagne-aux-Herbes-Potagères. — Bruxelles.

Kaisin (Félix), professeur à l'Université, Institut géologique, 10, rue Saint-Michel ; ou, 27, boulevard de Jodoigne. — Louvain.

Kersten (Joseph), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

Kieffer (Abbé J. Jacques), professeur au Collège Saint-Augustin. — Bitsch (Lorraine — Allemagne).

Kirsch, C. S. C. (R. P. Alexandre-M.). Université de Notre-Dame (Indiana — États-Unis).

Kirsch (Mgr J.-P.), professeur à l'Université. — Fribourg (Suisse).

de Kirwan (Charles), ancien inspecteur des Forêts, Villa Dalmassière. — Voiron (Isère — France).

Koltz (Eugène), ingénieur, 184, rue de Malines. — Louvain.

Kowalski (Eug.), ingénieur des Arts et Manufactures, 18, rue d'Alzon. — Bordeaux (Gironde — France).

de Kowalski (Dr), professeur à l'Université de Fribourg. — Fribourg (Suisse).

Kurth (Godefroid), membre de l'Académie royale de Belgique. — Assche (Brabant) ; ou, Institut historique belge, 18, place Resticucci. — Rome.

Ladeuze (Mgr P.), recteur magnifique de l'Université, 110, rue de Namur. — Louvain.

Lagasse-de Locht (Charles), inspecteur général des Ponts et Chaussées, directeur général au Ministère de l'Agriculture et des Travaux publics, président de la Commission royale des monuments, 167, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

Lahousse (Dr), professeur à l'Université. — St-Denis-Westrem (Gand).

Lambert (Camille), ingénieur en chef des Chemins de fer de l'État. — Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).

Lambert (Maurice), ingénieur. — Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).

Lambin (A.), ingénieur des Ponts et Chaussées, chef de cabinet du Ministre de l'Agriculture et des Travaux publics, 181, avenue de Tervueren. — Woluwe-lez-Bruxelles.

Lambiotte (Omer), directeur-gérant des charbonnages Élisabeth. — Auvelais (prov. de Namur).

Lambo, S. J. (R. P. Charles), Collège Saint-Louis, 61, quai de Longdoz. — Liége.

Lambot (Oscar), professeur à l'Athénée royal d'Ixelles, 89, chaussée Saint-Pierre. — Bruxelles.

Laminne (Chanoine Jacques), professeur à l'Université, 7b, rue de Bériot. — Louvain.

Lannoy, S. J. (R. P. J.), ancienne Abbaye. — Tronchiennes (lez Gand).

Laruelle (Dr), 22, rue du Congrès. — Bruxelles.

Laurent (Dr Camille), 5, rue Joseph Jacquet. — Bruxelles.

de Laveleye (Paul), 24, place de Louvain. — Bruxelles.

Lebrun (D^{r} Hector), 25, avenue Verte. — Woluwe-Saint-Pierre (Brabant).

Lecat (Maurice), docteur en sciences physiques et mathématiques, docteur en sciences naturelles, ingénieur civil des Mines. — Watermael (Bruxelles).

Lechalas (G.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, 13, quai de la Bourse. — Rouen (Seine Inférieure — France).

Leclercq (Jules), vice-président au tribunal de première instance, membre de l'Académie royale de Belgique, 29, rue de la Loi. — Bruxelles.

Leconte (Félix), ingénieur-conseil, 25, rue royale. — Tournai.

Lefebvre (Mgr Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot. — Louvain.

Lefebvre (R. P. Maurice), docteur en sciences naturelles, missionnaire, palacio del Arzobispo. — Manilla (Philippines).

Legrand (Chanoine Alfred), 37, rue de Bruxelles. — Namur.

Leirens-Eliaert, rue du Pont. — Alost.

Lejeune de Schiervel (Charles), ingénieur des Mines, 12, rue Stevin. — Bruxelles.

Lejeune-Simonis, château de Sohan. — Pepinster (prov. de Liége).

Lemaire (Abbé), 65, rue Traversière, — Bruxelles.

Lemoine (Georges), membre de l'Institut, inspecteur général des Ponts et Chaussées, professeur de chimie à l'École Polytechnique, 76, rue Notre-Dame des Champs. — Paris.

Lenoble, professeur aux Facultés catholiques, 28ter, rue Négrier. — Lille (Nord — France).

Le Paige (G.), membre de l'Académie royale de Belgique, administrateur-inspecteur de l'Université, Plateau de Cointe. — Liége.

Leplae (E.), professeur à l'Université, 74, rue de Namur. — Louvain.

Lhoest (Henri), ingénieur, directeur des travaux des charbonnages Gosson-Lagasse. — Montegnée (prov. de Liége).

de Liedekerke de Pailhe (C^{te} Éd.), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

du Ligondès (V^{te}), colonel d'Artillerie en retraite, château de Rochefort. — Saint-Bonnet de Rochefort (Allier — France).

de Limburg-Stirum (Cte Adolphe), membre de la Chambre des Représentants, 72, rue du Trône. — Bruxelles.

Limpens (Émile), avocat. — Termonde.

de Locht (Léon), professeur à l'Université de Liége, château de Trumly. — Trooz (prov. de Liége).

Lucas, S. J. (R. P. J.-D.), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Maes (Abbé), curé de Saint-Job. — Uccle.

Maes, docteur en géographie, Conservateur de la Section Ethnographique au Musée du Congo. — Tervueren.

Magnie (Abbé Léon), ingénieur agricole, professeur à l'Institut Saint-Joseph. — La Louvière.

Malengreau (F.), professeur à l'Université, 25, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Mansion (Hubert), ingénieur, 174, avenue du Margrave. — Anvers.

Mansion (Paul), professeur émérite de l'Université de Gand, inspecteur des Études à l'École préparatoire du Génie civil et des Arts et Manufactures, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, quai des Dominicains. — Gand.

Maréchal, S. J. (R. P. J.), professeur de sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Marcq (Joseph), médecin-vétérinaire, adjoint à l'Institut bactériologique provincial, boulevard Ad aquam. — Namur.

Maroy (Dr L.), 61, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Martin (Dr), 9, boulevard Ad aquam. — Namur.

Masen (Aimé), docteur en médecine, 30, rue Middelbourg. — Boitsfort (Brabant).

Matagne (Henri), docteur en médecine, 31, avenue des Courses. — Bruxelles.

Maubert (Frère), des Frères des Écoles chrétiennes, au Scolasticat de Jesu Placet. — Louvain.

de Maupeou (Cte), Ingénieur, directeur du Génie maritime, 4, place du Gast. — Laval (Mayenne — France).

Meessen (Dr Wilhelm), 28, rue Froissard. — Bruxelles.

de Meeus (Cte Henri), ingénieur, rue du Vert-Bois. — Liége.

Mennes (Dr), 21, Rosier. — Anvers.

Mercier (S. É. le cardinal), archevêque de Malines.

Merten (Albert), ingénieur, professeur à l'Université, 25, boulevard Albert. — Gand.

Meunier (Fernand), conservateur du Musée de la Société royale de zoologie d'Anvers, professeur à l'Institut supérieur pour jeunes filles, 5, rue du Grand Chien. — Anvers.

Meurice (Léon), professeur à l'Université de Liége, 15, rue Simonon. — Liége.

Meuwissen (J.), ingénieur, professeur à l'Université, 1, avenue Clémentine, — Gand.

Michotte (Albert), professeur à l'Université de Louvain, Les Ravins. — Kessel-Loo (Louvain).

Miranda Bistuer (S. G. Mgr), évêque de Ségovie (Espagne).

Moeller (Dr A.), membre de l'Académie royale de médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.

Moeller (Dr Nicolas), 18, rue Ortélius. — Bruxelles.

de Moffarts (Bon Paul), château de Botassart, par Noirefontaine (prov. de Luxembourg).

de Monge (Vte Joseph), ingénieur, 29, rue des Cultes. — Bruxelles.

de Monge (Vte Paul), château de Wallay. — Ohey (prov. de Namur).

de Montessus de Ballore (Cte F.), directeur du service sismologique du Chili, 302, Av. Republica. — Santiago (Chili).

de Montessus de Ballore (Vte Robert), professeur suppléant à l'Université catholique, 8, place Genevières. — Lille (Nord — France).

de Moreau d'Andoye (Bon), 11, rue Archimède. — Bruxelles.

Morelle (Dr Aimé), chef du service d'urologie et de dermatologie à l'Institut chirurgical, 26, rue Archimède. — Bruxelles.

Moreux (Abbé Th.), directeur de l'Observatoire. — Bourges (Cher — France).

Morisseaux, directeur général au Ministère de l'Industrie et du Travail, 25, rue du Berceau. — Bruxelles.

Mullie (Gilbert), inspecteur vétérinaire adjoint au Ministère de l'Agriculture, 23, avenue Jean Linden. — Bruxelles.

Muthuon, S. J. (R. P.), Oude Kasteel. — Gemert (Hollande).

Nava di Bontife (S. É. le cardinal), archevêque de Catane (Sicile — Italie).

Navas, S. J. (R. P. Longin), Colegio del Salvador. — Zaragoza (Espagne).

Nerincx (Alfred), professeur à l'Université de Louvain, secrétaire de l'Institut de Droit international, 8, rue Bosquet. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Neuberg (J.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur émérite de l'Université de Liége, 6, rue de Sclessin. — Liége.

Noguier de Malijay (Abbé N.), professeur de sciences, 14, rue de Bagneux. — Paris (VI^e).

Nollée de Noduwez, membre honoraire du Corps diplomatique de S. M. le Roi des Belges, camérier secret de S. S. Pie X. 14, avenue de Marnix. — Bruxelles.

Nyssens (Pierre), directeur du Laboratoire agricole de l'État, 16, rue du Jambon. — Gand.

Obeso, S. J. (R. P. Manual), Colegio de Estudios Superiores de Deusto. — Bilbao (Espagne).

d'Ocagne (Maurice), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, 30, rue de la Boëtie. — Paris.

Œhlert (D.-P.), correspondant de l'Institut, conservateur du Musée d'histoire naturelle, 29, rue de Bretagne. — Laval (Mayenne — France).

d'Orjo de Marchovelette, major adjoint d'État-Major, chef du Cabinet du Ministre de la Guerre, 97, rue Froissard. — Bruxelles.

Pasquier (Alfred), docteur en médecine. — Châtelet (Hainaut).

Pasquier (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse, — Louvain.

Pauwels, S. J. (R. P. J.), docteur en sciences naturelles, professeur de chimie, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Peeters (Jules), docteur en droit, 51, rue Saint-Martin. — Tournai.

Picard (É.), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 4. rue Bara. — Paris (VI^e).

Pieraerts (J.), conservateur au Musée colonial de Tervueren, 19. rue Notre-Dame. — Louvain.

de Pierpont (Édouard), château de Rivière. — Profondeville (prov. de Namur).

Pierre (Abbé Oscar), directeur de l'École Saint-Grégoire, rue Mazy. — Jambes (Namur).

Poskin (Paul), professeur de Physique à l'Institut agricole de l'État. — Gembloux.

Poullet (Prosper), associé de l'Institut de Droit international, professeur à l'Université, 28, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Proost (Alphonse), directeur général au Ministère de l'Agriculture, 13, rue Marie de Bourgogne. — Bruxelles ; ou, Mousty-lez-Ottignies (Brabant).

Proost (Chanoine), aumônier honoraire de la Cour, rue Mercelis. — Ixelles (Bruxelles).

Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale. — Bruxelles.

Rachon (Abbé Prosper), curé de Ham, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).

Raclot (Abbé V.), aumônier des Hospices et directeur de l'Observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).

Rector (R. P.) del Colegio Catolico del Sagrado Corazon de Jesus, calzada del Aguazul (Antiguo velodromo). — Puebla (Mexique.

Rector (R. P.) del Colegio del Jesus. — Tortosa (Tarragona — Espagne).

Renaud, professeur de métallurgie à l'Université, 22, quai des Moines. — Gand.

Renier (Armand), ingénieur au Corps des Mines, chargé de cours à l'Université, 1, rue de Sélys. — Liége.

de Renette de Villers-Perwin (B^{on}), capitaine commandant adjoint d'État-Major au 2^{me} Guides, 69, rue d'Arlon. — Bruxelles.

de Ribaucourt (C^{te} Adrien), ingénieur agricole, 79, avenue Louise. — Bruxelles.

Richald (Jos.), ingénieur principal des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université de Gand, 69, rue Archimède. — Bruxelles.

Rinaldini (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Madrid.

Roberti (Max), notaire, rue de Namur. — Louvain.

Rodriguez Risueno (Emiliano), catedrático de historia natural en la

Universidad, 16, prâl, calle Duque de la Victoria. — Valladolid (Espagne).

Roersch (A.), professeur à l'Université, 95, rue de l'Avenir. — Gand.

Rogie (D^{r}), professeur à la Faculté catholique de médecine, 108, rue Jacquemars-Gielée. — Lille (Nord — France).

Roland (Pierre), ingénieur, 55, rue Vital Decoster. — Louvain.

Rose (J.), professeur de mathématiques à l'Athénée royal de Charleroi, 155, rue du Progrès. — Montigny-sur-Sambre.

Roux (Cl.), professeur aux Facultés catholiques, 25, rue du Plat. — Lyon (Rhône — France).

Rutten (S. G. Mgr.), évêque de Liège.

Ryan (Hugh), M. A., F. R. U. I., membre de l'Académie royale irlandaise, professeur de chimie à l'École de médecine de l'Université catholique, au Collège de l'Université de Dublin et au Collège Saint-Patrick de Maynooth. Medical School, Cecilia Street. — Dublin (Irlande).

Sabatier (Paul), professeur de chimie à l'Université. — Toulouse (Haute-Garonne. — France).

Sageret, château de Kervihan, par Carnac (Morbihan — France).

de Saintignon (C^{te}), maître de Forges. — Longwy-Bas (Meurthe-et-Moselle — France).

de Salvert (V^{te}), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 45, rue des Missionnaires. — Versailles (Seine-et-Oise — France) ; ou, château de Villebeton, par Châteaudun (Eure-et-Loir — France).

Sanz (Pelegrin), ingeniero de Caminos, 5, 2^{e}, calle Bordadores. — Madrid.

Sarret (Jean), agrégé à l'Université, professeur de physique au Lycée Impérial Ottoman, 13, rue Aïnali tchesmé. — Constantinople (Turquie).

Schaffers, S. J. (R. P. V.), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Scheuer, S. J. (R. P. P), 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Schilde (B^{on}), château de Schilde (prov. d'Anvers).

de Schilde (B^{on} G.), 48, rue Kipdorp. — Anvers.

Schmidt (Alfred), chimiste de la maison E. Leybold's Nachfolger, 7, Bruderstrasse. — Cologne (Allemagne).

SCHMITZ, S. J. (R. P. G.), directeur du Musée géologique des bassins houillers belges, 11, rue des Récollets. — Louvain.

SCHMITZ (Théodore), ingénieur civil des Mines, 31, rue Jordaens. — Anvers.

SCHOCKAERT (R.), professeur à l'Université, 133, rue de Tirlemont, — Louvain.

SCHOLLAERT, Ministre des Sciences et des Arts. — Bruxelles ; ou, Vorst (prov, d'Anvers).

SCHOOLMEESTERS (Mgr Émile), vicaire-général, 14, rue de l'Évèché, — Liége.

SCHOONJANS, S. J. (P. Ch.), Ancienne Abbaye. — Tronchiennes (lez Gand).

SCHREIBER, agronome de l'État, 64, rue de l'Indépendance. — Namur.

SCHUL, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

DE SELLIERS DE MORANVILLE (Ch^{er} A.), général-major commandant la Gendarmerie nationale, 46, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

SENDERENS (Mgr.), professeur à l'Université catholique, 36, rue de la Fonderie. — Toulouse (Haute-Garonne — France).

SENTROUL (Mgr), professeur à la Faculté libre de philosophie et lettres, Mosteiro do Sao Bento. — Sao Paulo (Brésil).

SIBENALER (N.), professeur à l'Université, 31, boulevard de Jodoigne. — Louvain.

SIÈGES, 93, rue de Trône. — Bruxelles.

SIMON (D^{r}), 134, rue de la Loi. — Bruxelles.

SIMONART (D^{r}), 33A, rue du Canal. — Louvain.

DE SINÉTY, S. J. (R. P. Robert), Oude Kasteel. — Gemert (Hollande).

SIRET (Henri), ingénieur, directeur général de la C^{ie} des Chemins de fer du Congo Supérieur aux Grands Lacs africains, 37, avenue Brugmann. — Bruxelles.

SIRET (Louis), ingénieur, 11, rue Jordaens. — Anvers.

SLINGENEYER DE GOESWIN, capitaine commandant d'État-major, Écuyer, 62, avenue Isabelle. — Anvers.

SMEDTS (Arthur), répétiteur à l'Université, 58, boulevard de la Citadelle. — Gand.

SMEKENS (Théoph.), président honoraire du tribunal de 1re instance, 34, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

Smets (Dr), 104, rue Van de Weyer. — Bruxelles.

Smits (Eugène), ingénieur, 20, rue de la Presse. — Bruxelles.

Soisson (G.), ingénieur, docteur en sciences, professeur à l'Athénée grand-ducal, 19, rue Joseph II. — Luxembourg (Grand-Duché).

Solano y Eulate (José-Maria), Marqués del Socorro, professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, 41, bajo, calle de Jacometrezo. — Madrid.

Solé (Dr Victor), 262, rue Royale. — Bruxelles.

Somville (Oscar), docteur en sciences physiques et mathématiques, 120, rue Beeckman. — Uccle (Bruxelles).

de Sparre (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins ; ou, 7, avenue de l'Archevêché. — Lyon (Rhône — France).

Springael (Auguste), ingénieur, 74, rue de Locht. — Schaerbeek.

Stainier (Xavier, professeur à l'Université de Gand, membre de la Commission géologique de Belgique, 27, Coupure. Gand.

van den Steen de Jehay (Cte Frédéric), Légation Belge. — Luxembourg (Grand-Duché).

Stillemans (S. G. Mgr Ant.), évêque de Gand.

Stillemans (Jean), ingénieur, directeur des travaux d'Etterbeek, 5, rue Fétis. — Bruxelles.

Stinglhamber (Émile), docteur en droit, 43, avenue Ernestine. — Bruxelles.

Stoffaes (Chan.), professeur à la Faculté catholique des Sciences, directeur de l'Institut des Arts et Métiers, 6, rue Auber. — Lille (Nord — France).

Storms (Ernest), ingénieur, 6, rue du Receveur. — Bruges.

Stouffs (Dr Jules), 205, avenue Louise. — Bruxelles.

Stouffs (Dr L.), 53, rue de Charleroi. — Nivelles.

Struelens (Alfred), docteur en médecine, 18, rue Hôtel des Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Supérieur du Collège des Joséphites, Vieux-Marché. — Louvain.

Supérieur du Collège Saint-Jean-Berchmans, 35, place de Meir. — Anvers.

Suttor, ingénieur honoraire des Ponts et Chaussées, 10, rue des Bogards. — Louvain.

Swolfs (Dr Oscar), 118, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.

Taymans (Émile), notaire. — Tubize (Brabant).

Terlinden, 15, rue de Livourne. — Bruxelles.

Termier (Pierre), membre de l'Institut, 164, rue de Vaugirard. — Paris.

Théron (Joseph), docteur en sciences physiques et mathématiques, préfet des études à l'Athénée royal. — Chimay.

Thiébaut (Fernand), industriel, bourgmestre de Monceau-sur-Sambre (Hainaut).

Thiéry (Chan. Armand), Institut supérieur de Philosophie, 1, rue des Flamands. — Louvain.

Thirion, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Thiry (François), bourgmestre. — Pecq (Hainaut).

Tibbaut (Émile), avocat à la Cour d'Appel, membre de la Chambre des Représentants, 4, avenue de l'Astronomie. — Bruxelles.

Timmermans (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 22, rue de Fragnée. — Liége ; ou, Seraing (prov. de Liége).

Tits (A.), oculiste, 38, rue Léopold. — Louvain.

Tits (Abbé Léon), docteur en sciences physiques et mathématiques, Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

Torroja Caballe (Eduardo), architecte, professeur de géométrie descriptive à la Faculté des Sciences de l'Université, membre correspondant de l'Académie royale des Sciences, 9-11e rue Requena. — Madrid.

de T'Serclaes (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.

de T'Serclaes (Cte Jacques), colonel, chef d'État-Major, professeur à l'École de guerre, 34, rue Jordaens. — Ixelles (Bruxelles).

d'Ursel (Cte Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par Wauthier-Braine (Brabant) ; ou, 25, rue de la Science. — Bruxelles.

de la Vallée Poussin (Ch.-J.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 151, rue de la Station. — Louvain.

Van Aubel (Dr Ch.), directeur de la Maternité Sainte-Anne, 29, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Van Ballaer (Chanoine), curé de N.-D. du Sablon, 6, rue Bodenbroeck. — Bruxelles.

Van Bastelaer (Léonce), ingénieur civil des Mines, 13, rue Newton. Bruxelles.

Van Biervliet (J.), professeur à l'Université, 5, rue Metdepenningen. — Gand.

Van Brabandt (L.), ingénieur des Ponts et Chaussées, 18, rue du Grand Chien. — Anvers.

Van Caeneghem (Abbé F.), curé-doyen du Rœulx (Hainaut).

Van den Bossche (Abbé). — Ophasselt (Flandre orientale).

Van den Bossche (G.), professeur à l'Université, 22, rue Basse. — Gand.

Van den Gheyn (Chanoine Gabriel), 13, avenue des Moines. — Gand.

Van den Gheyn, S. J. (R. P. Joseph), conservateur en chef de la Bibliothèque royale, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Vandenpeereboom (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liége.

Vanderlinden, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, administrateur-inspecteur de l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.

Vanderlinden (E.), assistant au service météorologique de l'Observatoire royal. — Uccle (Bruxelles).

Van der Mensbrugghe (A.), 115, Coupure. — Gand.

Van der Mensbrugghe (G.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur émérite de l'Université, 115, Coupure. — Gand.

Van der Mensbrugghe (R.), ingénieur des Chemins de fer de l'État, 115, Coupure. — Gand.

Van der Smissen (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége et à l'École de Guerre, 13, rue des Cultes. — Bruxelles.

Vanderstraeten (D^{r} A.), 79, rue du Trône. — Bruxelles.

Van der Vaeren, inspecteur au Ministère de l'Agriculture, professeur à l'Université de Louvain, 228, chaussée d'Alsemberg. — Uccle (Bruxelles).

Vandevyver (L. N.), professeur à l'Université, 63, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Vandevyver (M.), docteur en droit, 63, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Van Durme, docteur en médecine, professeur à l'Université, 8, quai des Tonneliers. — Gand.

Van Gehuchten (A.), professeur à l'Université, 36, rue Léopold. — Louvain.

Van Hoeck (Dr Ém.), 13, rue Traversière. — Bruxelles.

Van Keerberghen, docteur en médecine, 21, rue du Trône. — Bruxelles.

Van Mollé (Abbé J.), professeur au Petit Séminaire. — Malines.

Vannutelli (S. É. le cardinal Séraphin). — Rome.

Van Ortroy (Fernand), professeur à l'Université, 35, quai des Moines. — Gand.

Van Swieten (Raymond), 80, avenue de la Toison d'Or. — Bruxelles.

Van Velsen, docteur en médecine, 61, rue Godefroid de Bouillon. — Bruxelles.

Van Ysendyck (William), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Verhelst (Abbé F.), aumônier du Pensionnat du Sacré-Cœur, 24, rue d'Oultremont. — Bruxelles.

Vermeersch, S. J. (R. P. A.), docteur en droit et en sciences politiques et administratives, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Verriest (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

Verriest (Gustave), docteur en sciences physiques et mathématiques, ingénieur civil des Mines, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

Verschaffel (A.), chargé des travaux astronomiques à l'Observatoire d'Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

Versteylen, membre de la Chambre des Représentants, rue d'Hérenthals. — Turnhout.

Vervaeck, docteur en médecine, 4, place de la Chapelle. — Bruxelles.

Viaene, docteur en géographie, attaché au Bureau ethnographique international, 67, rue Van der Borght. — Jette-Saint-Pierre.

Vicent, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).

Visart de Bocarmé, avocat, 10, rue Grandgagnage. — Namur.

Visart de Bocarmé (Cte Amédée), membre de la Chambre des Représentants, bourgmestre de Bruges.

Vollen (E.), avocat-avoué, place du Peuple. — Louvain.

de Vorges (Alb.), 4, avenue Thiers. — Compiègne (Oise—France).

de Vrégille, S. J. (R. P.), Collège de la Ste-Famille.—Caire (Égypte).

Waffelaert (S. G. Mgr), évêque de Bruges.

Walravens (S. G. Mgr), évêque de Tournai.

Warlomont (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de régiment de 1re classe à l'Institut ophtalmique de l'armée, 66, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Wasmann, S. J. (R. P.), Ignatius Colleg.—Valkenburg (Limbourg Hollandais).

Wasteels (C.), professeur à l'Université, 17, rue d'Akkergem. — Gand.

Wéry (Dr Aug.). — Sclayn (prov. de Namur).

Wibo (Dr Maurice), 39, rue Duquesnoy. — Bruxelles.

Willaert, S. J. (R. P. Fernand), docteur en sciences physiques et mathématiques, Collège. — Tarnopol (Galicie).

Williame (Aimé), ingénieur, 21, place Dailly. — Schaerbeek.

Wilmart (L.), 169, rue de Livourne. — Bruxelles.

Wilmotte (Abbé). — Saint-Servais (Namur).

Wittmann (Dr Jules), 3, rue du Sac. — Malines.

Witz (Aimé), correspondant de l'Institut, professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord—France).

Wolf (C.), membre de l'Institut, 36, avenue de l'Observatoire. — Braine (Aisne — France).

Wolters (Frédéric), ingénieur principal des Ponts et chaussées, professeur à l'Université, 15, avenue des Moines. — Gand.

Wolters (G.), administrateur-inspecteur honoraire de l'Université de Gand, inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées, 192, rue des Entrepreneurs. — Mont-Saint-Amand (Gand).

de Wouters d'Oplinter (Cher Fernand), 9, rue du Commerce. — Bruxelles.

Wulf, S. J. (R. P. Th.), professeur de physique au Collège Saint-Ignace. — Valkenburg (Limbourg Hollandais).

Yrigoyen (Dr Ciriaco), Fuenterrabia. 33. — Saint-Sébastien (Espagne).

Zech (Abbé), professeur à l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles

Zeiller (René), membre de l'Institut, professeur à l'École supérieure des Mines, 8, rue du Vieux-Colombier.—Paris.

Liste géographique des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1910)

BELGIQUE

Flandre Occidentale : **Bruges** : Coppieters de Stockhove (Abbé Ch.). — Visart de Bocarmé (Cte A.). — S. G. Mgr Waffelaert.

Iseghem : Gillès de Pélichy (Bon Ch.). — **Roulers** : Dumez (Abbé R.). — **Ypres** : De Brouwer (Mich.). — De Brouwer (Chan.).

Flandre Orientale : **Gand** : van der Bruggen (Bon). — Cooreman (G.). — Crame (Aug.). — Dauwe (Dr F.). — De Baets (H.). — De Bloo (J.). — Declercq. — Dumortier. — Dusausoy (Cl.). — Dutordoir (H.). — Gesché (L.). — de Hemptinne (A.). — Heymans (J.-F.). — Mansion (P.). — Merten (Alb.). — Meuwissen. — Nyssens (P.). — Renaud. — Roersch (A.). — Stainier (X.). — S. Gr. Mgr Stillemans. — Van Biervliet (J.). — Van den Bossche (G.). — Van den Gheyn (Chan. G.). — Vanderlinden. — Van der Mensbrugghe (A.). — Van der Mensbrugghe (G.). — Van der Mensbrugghe (R.). — Vandevyver (L. N.). — Vandevyver (M.). — Van Durme (Dr). — Van Ortroy (F.). — Wasteels (C.). — Wolters (F.).

Alost : Bauwens (Dr Isid.). — Collège Saint-Joseph. — Leirens-Eliaert. — **Meirelbeke** : Mgr A. Hebbelynck. — **Mont-Saint-Amand** (Gand) : Wolters (G.). — **Ophasselt** : Van den Bossche (abbé). — **Termonde** : Limpens (Émile). — **Tronchiennes** : Charles, S. J. (R. P. J.). — Lannoy, S. J. (R. P. J.). — Schoonjans, S. J. (R. P. Ch.). — **Saint-Denis-Westrem** : Lahousse (Dr).

Province d'Anvers : **Anvers** : — Bastin (F.). — Belpaire (F.). — Cogels (J.-B.-Henri). — Dubois (E.). — Institut Saint-Ignace. — Mansion (H.). — Mennes. — Meunier. — de Schilde (Bon G.). — Schmitz (Th.). — Siret (L.). — Slingeneyer de Goeswin (Écuyer). — Smekens (Th.) — Supérieur du Collège Saint-Jean-Berchmans. — Van Brabandt.

Berchem : Alliaume (M.). — **Malines :** De Laet (J.). — Dessain (Ch.). — Gauthier (Chan.). — Lemaire (Abbé). — S. É. le cardinal Mercier. — Van Mollé (Abbé J.). — Wittmann (D^{r} Jean). — **Schilde** : de Schilde (B^{on}). — **Turnhout** : Versteylen.

LUXEMBOURG : **Bertrix** : Heynen (W.). — **Noirefontaine** : de Moffarts (B^{on} P.). — **Virton :** Cabeau (Abbé Ch.).

BRABANT : **Bruxelles** : André (J.-B.). — Bayet (A.). — Beernaert (Aug.). — de Béthune (B^{on} G.). — de Bien (E.). — de la Boëssière-Thiennes (M^{is}). — Brifaut. — Carlier (J.). — Carton de Wiart (Edm.). — Cartuyvels (J.). — Cocheteux (Chan.). — Collège Saint-Michel (R. P. H. Bosmans, S. J.). — Coomans (L.). — Coomans (V.). — Cousin (L.). — Craninx (B^{on} O.). — Cuylits (D^{r} J.). — Davignon (J.). — De Brabandère. — De Coster (C.). — Degive. — De Grave (D^{r}). — De Greef. — Dejardin. — De Jonghe. — De Lantsheere (D^{r} J.). — De Lantsheere (L.). — Delcroix (D^{r} A.). — Delétrez (D^{r} A.). — De Preter (H.). — Deroitte (D^{r} V.). — De Smedt, S. J. (R. P. Ch.). — De Wildeman (É.). — Duplat. — Dupont (E.).— Dutillieux (M.).— Eeckhout (G.).— Fagnart (E.). — de Favereau de Jenneret (B^{on}). — Fernandès (D^{r} R.). — de Garcia de la Vega (B^{on} V.) — Gendebien. — Gerard (E.). — Glorieux (D^{r}). — Goffart. — Goris (Ch.). — Greindl (B^{on}). — Hachez (F.). — Halot (A.). — Havenith. — Hélin (E.). — Helleputte (G.). — Henrard (D^{r} É).— Henrard (D^{r} F.). — Henry (A.). — Henseval (D^{r} M.). — Heynen (W.). — Huyberechts (D^{r} Th.). — Mgr Jacobs. — Jacobs (F.). — Javaux (D.). — Joly (A.). — Joly (L.). — Jourdain (L.). — Kersten (J.). — Lagasse-de Locht (Ch.). — Lambot (O.). — Laruelle (D^{r}). — Laurent (D^{r} C.). — de Laveleye. — Leclercq (J.). — Lejeune de Schiervel (Ch.). — Lemaire (Abbé). — de Liedekerke de Pailhe (C^{te} Éd.). — de Limburg-Stirum (C^{te} Ad.). — Maroy (D^{r} L.). — Matagne (D^{r} H.). — Meessen (D^{r} W.). — Moeller (D^{r}). — Moeller (D^{r} N.). — de Monge (V^{te} J.). — de Moreau d'Andoye (B^{on}). — Morelle (D^{r} A.). — Morisseaux. — Mullie (G.). — Nollée de Noduwez. — d'Orjo de Marchovelette (major). — Proost (A.). — Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus. — de Rennette de Villers-Perwin (B^{on}). — de Ribaucourt (C^{te} Adrien). — Richald (J.). — Schollaert. — de Selliers de Moranville (Ch^{er} A.). — Siéges. — Simon (D^{r}). — Siret (H.). — Smets (D^{r}). — Smits (E.). — Stillemans (J.). — Stinglhamber (É.). — Stouffs (D^{r} J.). — Tits (Abbé). — Terlinden. — de Trazegnies (M^{is}). — d'Ursel (C^{te} A.). — Van Aubel (Ch.). — Van Ballaer (Ch.). — Van Bastelaer (L.). — Van den Gheyn, S. J. (R. P. J.). — Van der Smissen (Éd.). — Vanderstraeten (D^{r} A.). — Van Hoeck (D^{r} Ém.). — Van Keerbergen (D^{r})· — Van Swieten (R.). — Van Velsen (D^{r}). — Van Ysendyck (D^{r}). — Verhelst (Abbé F.). — Vervaeck (D^{r}). — Warlomont (D^{r} R.). Wibo (D^{r} W.). — Wilmart (L.). — de Wouters d'Oplinter (Ch^{er} F.). — Zech.

Assche : Kurth. — **Auderghem** : Capart (J.). — **Boitsfort** : Masen (A.). — **Etterbeek** : François. — **Ixelles** : (Bruxelles) : Beaujean (Ch.). — De Vadder (V.). — D'Hoop (F.). — Janssens. — Proost (Chan.).— de T'Serclaes (C^{te} J.).— **Jette-Saint-Pierre** : Viaene.

Louvain : Boine (D^{r} J.). — Breithof (F.). — Bruylants. — Cappellen (G.). — Collège Saint-Jean-Berchmans. — Daubresse (P.). — Debaisieux. — De Becker (Chan. J.). — Demanet (Chan.). — De Muynck (Chan. R.). — Denys (D^{r} J.) — Deploige (Mgr). — De Walque (F.). — de Dorlodot (Chan. H.). — Dumont (A.). — Dupriez. — Fenaux (Éd.). — Fournier, O. S. B. (Dom. Gr.). — Gaillard, S. J. (R. P. J.). — Goedseels (Éd.). — Grégoire (Abbé V.). — Guelton (G.). — Havet (D^{r} J.). — Henry (L.). — Henry (P.). — Kaisin (F.). — Koltz (E.). — Mgr P. Ladeuze. — Laminne (Chan. J.). — Mgr F. Lefebvre. — Leplae (E.). — Malengreau. — Maréchal, S. J. (R. P. J.). — Maubert (Frère). — Pasquier (Ern.). — Pauwels, S. J. (R. P. J.). — Pieraerts. — Poullet (Pr.). — Roberti (M.). — Roland (P.). — Schaffers, S. J. (R. P. V.). — Scheuer, S. J. (R. P. P.). — Schmitz, S. J. (R. P. G.). — Schockaert (R.). — Schul, S. J. (R. P.). — Sibenaler (N.). — Simonart (D^{r}). — Supérieur du Collège des Joséphites. — Suttor. — Thiéry (Abbé A.). — Thirion, S. J. (R. P. J.). — Tits (D^{r} A.). — de la Vallée Poussin (Ch.-J.). — Van Gehuchten. — Vermeersch, S. J. (R. P. A.). — Verriest (D^{r} G.). — Verriest. — Vollen (E.).

Kessel-Loo : Michotte (Alb.). — **Mousty-lez-Ottignies** : Proost (A.). — **Nivelles** : Stouffs (D^{r}). — **Ottignies** : Bruyer. — **Perck** (par Vilvorde) : de Ribaucourt (C^{te}). — **Rixensart** : Gollier. — **Saint-Gilles** (Bruxelles) : Nerincx (A.). — Struelens (D^{r}). — **Schaer-**

beek (Bruxelles) : Delmer. — Springael (Aug.). — Willame (A.). — **Tervueren** : Maes (Dr J.). — **Tubize** : Taymans (É.). — **Uccle** (Bruxelles) : Casteels. — Claerhout.— Dejaer (J.). — Delvosal (J.). — Denoël. — Glibert (Dr D.). — Maes (Abbé). — Smedts (Arthur). — Somville (O.). — Vanderlinden (É.). — **Watermael** : Lecat (M.). — **Wauthier-Braine** : d'Ursel (Cte A.). — **Woluwe-lez-Bruxelles** : Lambin (A.). — **Woluwe-Saint-Lambert** : Convent (Dr A.). — Lambert (C.). — Lambert (M.). — **Woluwe-Saint-Pierre** : Lebrun (Dr H.).

Province de Liége : **Liége** : Béco (Dr L.). — Berleur (Ad.). — Collège Saint-Servais. — Duquenne (Dr L.). — Francotte (H.). — Francotte (Dr X.). — Hans (J.). — Janne (H.). — Lambo, S. J. (R. P. Ch.). — Le Paige (C.). — de Meeus (Cte H.). — Meurice (L.). — Neuberg (J.). — Renier (A.).— S. G. Mgr Rutten. — Mgr Schoolmeesters. — Timmermans (F.). — Vandenpeereboom (E.). — **Bierset-Awans** : Sépulchre (É.). — **Huy** : Gelin (Abbé E.). **Montegnée** : Lhoest (H.). — **Pepinster** : Lejeune-Simonis. — **Seraing** : Timmermans (F.). — **Stavelot** : David (P.) — **Trooz** : de Locht (L.).

Hainaut : **Mons** : Dufrane (Dr). — Henry (Cdt J.).
Acoz : Dupuis (H.). — **Ath** : Clément (Abbé H.). — **Châtelet** : Pasquier (Dr A.). — **Châtelineau** : Allard (F.). — **Chimay** : Théron (J.). — **Couillet** : Dochain-Defer. — **Gosselies** : Drion (Bon Ad.). — **Hornu** : Hallez (E.). — **Marcinelle** : Evrard (N.). — **Marchienne** : Debouck (L.). — **Monceau-sur-Sambre** : Thiébaut (F.). -- **Montigny-sur-Sambre** : Rose (J.). — **Pecq** : Thiry (Fr.). — **Péruwelz** : Delaunois (Dr G.). — **Le Rœulx** : Van Caeneghem (Chan. F.). — **Tournai** : Blondel (A.).— Leconte (F.). — Peeters (J.). — S. G. Mgr Walravens. — **Wasmes** : Harmant.

Province de Namur : **Namur** : Attout-Van Cutsem. — Baivy (Dr). — Bibot (Dr). — Castelein, S. J. (R. P.). — Collège Notre-Dame de la Paix. — Dierckx, S. J. (R. P. Fr.). — de Greeff, S. J. (R. P. H.). — Haibe (Dr). — S. G. Mgr Heylen. — Legrand (Chan. A.). — Lucas, S. J. (R. P. J.-D.). — Martin (Dr). — Marcq (J.). — Schreiber. — Visart de Bocarmé.

Auvelais : Lambiotte (O.).— **Couvin** : Dubois (V.).— **Dinant** : Cousot (Dr). — **Floreffe** : Baseil (Abbé). — de Dorlodot (S.). — **Gembloux** : Bouckaert. — Poskin (P.). — **Heer-Agimont** : Gilbert (P.). — **Jambes** : Pierre (Abbé O.). — **Ohey** : de Monge (Vte P.). — **Profondeville** : de Pierpont (Éd.). — **Saint-Servais** : Wilmotte (Abbé). — **Sclayn** : Wéry (Dr A.).

FRANCE

Paris : Amagat. — Béchaux. — Blondel. — Boussinesq. — Branly (Éd.). — Bulliot (J.). — Capelle (Abbé Éd.).— Dardel (Dr). — École libre de l'Immaculée-Conception.— École libre de Sainte-Geneviève. — Fiessinger (Dr). — Fonssagrives (Chanoine). — Mgr Graffin. — Hamonet (Abbé). — Haton de la Goupillière (J.-N.). — Humbert (G.). — de Joannis (Abbé). — Jordan (C.). — Lemoine (G.).— Noguier de Malijay (Abbé N.). — d'Ocagne (M.). — Picard (É.). — Termier (P.). — Zeiller (R.).

Départements : *Aisne* : **Braine** : Wolf. — *Allier* : **Cérilly** : Dumas-Primbault (H.). — **Saint-Bonnet de Rochefort** : du Ligondès (Vte). — *Alpes-Maritimes* : **Menton** : Farina (Dr). — **Nice** : Dardel (Dr).—*Aveyron* : **Viviez** : Berlingin (M.).—*Basses-Pyrénées* : **Abbadia** (par Hendaye) : Verschaffel (A.).— *Bouches-du-Rhône* : **Marseille** : Bedel (Abbé R.). — Fabry (L.). — *Cher* : **Bourges** : de Grossouvre (A.). — Moreux (Abbé Th.). — *Drôme* : **Aiguebelle** (par Grignan) : Arduin (Abbé A.). — *Eure-et-Loir* : **Villebeton** (par Châteaudun) : de Salvert (Vte). — *Gironde* : **Bordeaux** : Duhem (P.). — Kowalski (Eug.). — *Haute-Garonne* : **Toulouse** : Sabatier (P.). — Senderens (Mgr). — *Haute-Marne* : **Langres** : Raclot (Abbé V.). — *Isère* : **Lacombe de Lancey** (par Villard-Bonnot) : du Boys (P.). — **Voiron** : de Kirwan (Ch.). — *Loire* : **Saint-Étienne** : Grand'Eury (C.). — Hervier (Abbé J.). — *Loiret* : **Orléans** : d'Annoux (Cte H.). — **Laval** : de Maupeou (Cte). — Œhlert (D.-P.). — *Meurthe-et-Moselle* : **Ham** (par Longuyon) : Rachon (Abbé P.). — **Longwy** : de Saintignon (Cte). — *Morhiban* : **Kervihan** : Sageret. — *Nord* : **Cambrai** : Coulon (Dr). — **Lille** :

d'Adhémar (V^{te} R.). — Annycke (Abbé Th.). — Barrois. — Mgr Baunard. — Bourgeat (Chan.). — Delemer (J.). — Desplats (D^r H.). — Desplats (D^r René). — D'halluin (D^r M.). — Duret (D^r). — Duthoit (E.). — Fenaert (Abbé). — Gosselet (J.). — Guermonprez (D^r). — Lenoble. — de Montessus de Ballore (V^{te} R.). — Rogie (D^r). — Stoffaes (Chan.). — Witz (A.). — *Oise :* **Compiègne** : de Vorges (A.). — *Rhône :* **Lyon** : Roux (Cl.). — de Sparre (C^{te}). — *Savoie :* **Aix-les-Bains** : Dardel (D^r). — *Seine-et-Oise :* **Versailles** : Ariès (Lieut. colonel). — de Salvert (V^{te}). — *Seine-Inférieure :* **Rouen** : Lechalas (G.). — *Vaucluse :* **Sérignan** (par Vaucluse) : Fabre (J.-H.).

ESPAGNE

Madrid : Adan de Yarza (B.). — Dusmet y Alonso (J.-M.). — Fita y Colomé, S. J. (R. P. F.). — Gonzalez de Castejon. — Grinda (J.). — Iniguez y Iniguez (Fr.). — S. Exc. Mgr Rinaldini. — Sanz (P.). — Solano y Eulate (M^{is}). — Torroja Caballe (Ed.). — **Barcelone** : Cirera y Salse (D^r L.). — **Bilbao** : Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso, S. J.). — **La Coruna** : Casarès (F.). — **San Sebastian** : Balbas (Th.). — Yrigoyen (D^r C.). — **Segovia** : S. G. Mgr Miranda Bistuer. — **Séville** : Abaurrea (L.). — **Tortosa** (Tarragona) : Cirera, S. J. (R. P. R.). — R. P. Rector del Colegio del Jesùs. — **Valencia** : Vicent, S. J. (R. P.). — **Valladolid** : Rodriguez-Risueno (E.). — **Zaragoza** : Navàs, S. J. (R. P. L.).

PAYS DIVERS

ALLEMAGNE : **Bitsch** (Lorraine) : Kieffer (Abbé J.-J.). — **Breslau** : Caratheodory (Costa). — **Cologne** : Schmidt (A.).

ANGLETERRE : **Dublin** (Irlande) : Conway (A. W.). — Egan, S. J. (R. P. M.). — Ryan (H.). — **Saint-Hélier** (Jersey — Iles-de-la-Manche) : Dechevrens, S. J. (R. P. M.).

Autriche : **Vienne** : S. Exc. Mgr Granito di Belmonte.

Italie : **Rome** : S. É. le cardinal Ferrata. — Hagen, S. J. (R. P.). — Kurth. — Mgr Ch. de T'Serclaes. — S. É. le cardinal S. Vannutelli. — **Catane** (Sicile) : S. É. le cardinal Nava di Bontifé.

Pays-Bas : **Fauquemont** (Limbourg hollandais) : Wasmann, S. J. (R. P.). — Wulf, S. J. (R. P. Th.). — **Gemert** : Boule, S. J. (R. P. L.). — Muthuon, S. J. (R. P.). — de Sinéty, S. J. (R. P. R.). — **Oudenbosch** : Bolsius, S. J. (R. P. H.). — **Rotterdam** : De Veer, S. J. (R. P.).

Grand-Duché de Luxembourg : **Luxembourg** : Soisson (G.). — Van den Steen de Jehay (C^{te} Fréd.).

Suisse : **Fribourg** : Brunhes (J.). — Daniels (D^{r} Fr.). — De Kowalski (D^{r}). — De Munnynck, O. P. (R. P.). — Kirsch (Mgr J. P.).

Turquie : **Constantinople** : Sarret (J.).

États-Unis : **New-York** : Guicheteau, S. P. M. (Abbé F. H.). — **Los Angeles** (Californie) : Conroy (Ch. C.). — **Notre-Dame** (Indiana) : Kirsch (R. P. Al. M.). — **Washington** : Georgetown College Observatory.

Brésil : **Jaguarâo** : Boschmans (R. P.). — **Sao Paulo** : Sentroul (Mgr).

Chili : **Santiago** : C^{te} de Montessus de Ballore.

Mexique : **Puebla** : Colegio del Sagrado Corazon.

Indes Anglaises : **Calcutta** : Collège Saint-François-Xavier.

Égypte : **Caire** : de Vrégille, S. J. (R. P. P.).

Madagascar : **N.D. de Lourdes d'Ambohibeloma** : Camboué, S. J. (R. P. P.).

SYRIE : **Beyrouth** : Collangettes, S. J. (R. P.). — de Fooz (G.).

PHILIPPINES : **Manille** : Lefebvre (R. P. Maurice).

Membres décédés

DELVIGNE (Chanoine)	Bruxelles.
NYSSENS (J.)	Bruxelles.
Mgr LAFLAMME	Québec (Canada).
Cte DOMET DE VORGES	Maussans (France).
Mis DE TRAZEGNIES	Corroy-le-Château.
ALEXIS-M. GOCHET (Frère)	Grand-Bigard.
BERTRAND (L.)	Bruxelles.

Listes des membres inscrits dans les sections (1).

1re Section

Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique.

MM. Vte d'Adhémar.
Alliaume.
Balbas.
*Barbé.
Belpaire.
*Berlingin.
*Bon G. de Béthune.
de Bien.
R. P. H. Bosmans, S. J.
Boussinesq.
du Boys.
*Breithof.
Carathéodory.
Casteels.
Conroy.
Abbé Coppieters de Stockhove.
*Cousin.
*Crame.
Daniels.
*Daubresse.
De Bloo.
*De Coster.
*Jules Dejaer.
*Deleu.
Dusausoy.
*Dutilleux.
Dutordoir.
R. P. M. Egan, S. J.
Fabry.
Fagnart
*de Fooz.
R. P. J. Gaillard, S. J.
Abbé Gelin.
*Gilbert.
Goedseels.

MM. Gonzalez de Castejon.
Grinda.
*de Grossouvre.
Abbé Guicheteau, S. P. M.
*Hachez.
R. P. Hagen, S. J.
*Hans.
*Haton de la Goupillière.
*Havenith.
*Helleputte.
Humbert.
Iniguez.
Fern. Jacobs.
Janne.
Camille Jordan.
*Jourdain.
*Koltz.
*Lagasse.
*C. Lambert.
*M. Lambert.
Lambin.
R. P. J. Lannoy, S. J.
Lecat.
*Lechalas.
Le Paige.
*Vte du Ligondès.
Paul Mansion.
*Cte de Maupeou.
*Cte de Meeus.
*Merten.
Meurice.
Vte J. de Monge.
Vte R. de Montessus.
Abbé Moreux.
Neuberg.

---

(1) L'astérisque indique les membres qui désirent prendre part aux travaux de plusieurs sections (cf. Art. 11 des Statuts).

MM. *d'Ocagne.
E. Pasquier.
E. Picard.
*Richald.
Rose.
Vte de Salvert.
Pelegrin Sanz.
R. P. Schul, S. J.
*Mgr Sentroul.
Sépulchre.
*Sibenaler.
*Smits.
*Soisson.
Cte de Sparre.
J. Stillemans.
Ch. Stoffaes.
*Storms.

MM. Suttor.
Théron.
Thiébaut.
Timmermans.
Torroja Caballe.
Cte Jacques de T'Serclaes.
*Cte Aymard d'Ursel.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
E. Vandenpeereboom.
Vanderlinden.
Verriest.
Verschaffel.
Wasteels.
R. P. F. Willaert, S. J.
Wolf.
F. Wolters.
*G. Wolters.

2e Section

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du globe

MM. Abaurrea.
Allard.
Amagat.
*André.
Abbé Th. Annycke.
Ariès.
Abbé Baseil.
Bayet.
A. Blondel.
Branly.
Bruylants.
Bulliot.
Abbé Capelle.
*Carlier.
Casarès.
R. P. Cirera, S. J.
Chanoine Cocheteux.
R. P. Collangettes, S. J.
Conway.
R. P. Dechevrens, S. J.
Declercq.
Delemer.
Delvosal.
Chanoine Demanet.

MM. Chanoine De Muynck.
*De Preter.
François de Walque.
Duhem.
Dumas-Primbault.
Abbé Fenaert.
Chanoine Gauthier.
*E. Gerard.
Gesché.
R. P. de Greeff, S. J.
Abbé Hamonet.
de Hemptinne.
Louis Henry.
Paul Henry.
Abbé de Joannis.
Kowalski.
de Kowalski.
*O. Lambiotte.
R. P. Ch. Lambo, S. J.
Lambot.
Chanoine Laminne.
Leconte.
Abbé Lemaire.
Lemoine.

MM. Lenoble.
de Locht.
R. P. Lucas, S. J.
Abbé Maes.
Frère Maubert.
R. P. Muthuon, S. J.
Abbé Noguier de Malijay.
R. P. Pauwels, S. J.
Abbé Pierre.
Abbé Raclot.
Roland.
*Ryan.
Sabatier.
Sageret.
Cte de Saintignon.
Sarret.
R. P. Schaffers, S. J.
R. P. Scheuer, S. J.
Schmidt.
Mgr Senderens.

MM. Arthur Smedts.
Somville.
*Springael.
Chanoine Thiéry.
R. P. Thirion, S. J.
Thiry.
Abbé Tits.
Abbé Van den Bossche.
E. Vanderlinden.
G. Van der Mensbrugghe.
L.-N. Vandevyver.
M. Vandevyver.
Abbé Verhelst.
R. P. de Vregille, S. J.
Willame.
L. Wilmart.
Abbé Wilmotte.
*Witz.
R. P. Th. Wulf, S. J.

3e Section

Géologie, Minéralogie. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie Ethnographie, Science du langage. — Géographie

MM. Adan de Yarza.
Abbé Arduin.
Barrois.
Bastin.
Abbé Bedel.
Mis de la Boëssière-Thiennes.
Abbé Bols.
R. P. H. Bolsius, S. J.
R. P. Boschmans, O. Praem.
Bouckaert.
R. P. Boule, S. J.
Chanoine Bourgeat.
M. de Brouwer.
Brunhes.
*Bruyer.
Abbé Cabeau.
R. P. Camboué, S. J.
J. Capart.
Abbé J. Claerhout.
L. Coomans.

MM. V. Coomans.
*Debouq.
*V. De Brabandère.
Chanoine De Brouwer.
J. Declercq.
De Jonghe.
Chanoine Delvigne.
R. P. De Munnynck, O. O.
Denoël.
De Wildeman.
R. P. Fr. Dierckx, S. J.
Chanoine H. de Dorlodot.
S. de Dorlodot.
Bon Drion.
V. Dubois.
Abbé Dumez.
*Dumont.
Dusmet y Alonso.
*Evrard.
J.-H. Fabre.

MM. R. P. Fita, S. J.
Dom Grég. Fournier, O. S. B.
de Gerlache.
B^{on} Gillès de Pélichy.
Gollier.
Gosselet.
Mgr Graffin.
Crand'Eury.
Chanoine Grégoire.
*B^{on} Greindl.
Mgr Hebbelynck.
J. Henry.
Henseval.
Abbé Hervier.
Heynen.
Kaisin.
*Kersten.
Abbé Kieffer.
R. P. A.-M. Kirsch.
Mgr J.-P. Kirsch.
*de Kirwan.
Kurth.
D^{r} H. Lebrun.
Leclercq.
Mgr Ferdinand Lefebvre.
R. P. M. Lefebvre.
Lejeune de Schiervel.
Abbé Lemaire.
*Lhoest.
C^{te} Adolphe de Limburg-Stirum.
Maes.
Abbé Magnie.
Malengreau.
R. P. J. Maréchal, S. J.
Ferdinand Meunier.
Michotte.
MM. C^{te} F. de Montessus.
R. P. L. Navas, S. J.
Nollée de Noduwez.
P. Nyssens.
D.-P. Œhlert.
Pieraerts.
de Pierpont.
Poskin.
Abbé Rachon.
*Renier.
C^{te} Adr. de Ribaucourt.
Rodriguez Risueno.
Roux.
R. P. Schmitz, S. J.
Th. Schmitz.
Schreiber.
*Mgr Sentroul.
R. P. de Sinéty, S. J.
*H. Siret.
L. Siret.
Solano y Eulate.
Stainier.
Van Bastelaer.
Chanoine F. Van Caeneghem.
Chanoine G. Van den Gheyn.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Van der Vaeren.
Abbé J. Van Mollé.
Van Ortroy.
Viaene.
R. P. Vicent, S. J.
Albert de Vorges.
R. P. Wasmann, S. J.
Ch^{er} F. de Wouters.
Zeiller.

4^{e} Section

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Baivy.
Bauwens.
Béco.
Bibot.
MM. Boine.
L. Cirera y Salse.
Convent.
Coulon.

MM. Cousot.
J. Cuylits.
Dardel.
Dauwe.
Debaisieux.
Degive.
De Grave.
De Laet.
J. De Lantsheere.
Delaunois.
Delcroix.
Delétrez.
Denys.
Deroitte.
Henri Desplats.
René Desplats.
D'halluin.
Dufrane.
E. Dupont.
Duquenne.
Duret.
Farina.
Rob. Fernandès.
Fiessinger.
X. Francotte.
Glibert.
Glorieux.
Goris.
Guermonprez.
Haibe.
Havet.
Étienne Henrard.
Félix Henrard.
Heymans.
Huyberechts.
Javaux.
Lahousse.
Laruelle.
Laurent.
Lebrun.
Marcq.
MM. Maroy.
Martin.
Masen.
Matagne.
Meessen.
Mennes.
A. Moeller.
Nicolas Moeller.
Morelle.
Mullie.
A. Pasquier.
Proost.
Rogie.
Schockaert.
Simon.
Simonart.
Smets.
Solé.
Stouffs.
Struelens.
O. Swolfs.
Tits.
Ch. Van Aubel.
Van Biervliet.
Vanderstraeten.
Van Durme.
Van Gehuchten.
Van Hoeck.
Van Keerberghen.
Van Laethem.
Van Swieten.
Van Velsen.
Van Ysendyck.
Verriest.
Vervaeck.
Warlomont.
Aug. Wéry.
Wibo.
Wittmann.
Yrigoyen.

3e Section

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales Économie industrielle

MM. Cte d'Annoux.
Attout-Van Cutsem.
*Beaujean.
Béchaux.
Aug. Beernaert.
*Berleur.
G. Blondel.
*V. De Brabandère.
*Brifaut.
Bruyer.
Cappellen.
Carton de Wiart.
Cartuyvels.
R. P. Castelein, S. J.
R. P. J. Charles, S. J.
Cooreman.
Cranincx.
David.
Herman De Baets.
Mgr De Becker.
De Greef.
Léon De Lantsheere.
Mgr Deploige.
De Vadder.
Ernest Dubois.
Dumortier.
Duplat.
Dupriez.
Duthoit.
Eeckhout.
Fenaux.
H. Francotte.
Chanoine Fonssagrives.
Gendebien.
Goffart.
Guelton.
Halot.
Albert Henry.

MM. Félix Janssens.
Albert Joly.
Léon Joly.
de Laveleye.
Chanoine Legrand.
Leplae.
Cte Éd. de Liedekerke de Pailhe.
Limpens.
*H. Mansion.
Vte P. de Monge.
Bon de Moreau d'Andoy.
Nerincx.
Jules Peeters.
Poullet.
Chanoine Proost.
Bon de Renette de Villers-Perwin.
Roberti.
Roersch.
Bon de Schilde.
Bon G. de Schilde.
Mgr Schoolmeesters.
*Cher de Selliers de Moranville.
Sièges.
Smekens.
Cte van den Steen de Jehay.
Stinglhamber.
Taymans.
Terlinden.
E. Thibaut.
Van den Bossche.
André Van der Mensbrugghe.
Van der Smissen.
R. P. Vermeersch, S. J.
Versteylen.
Cte Amédée Visart de Bocarmé.
Cte Visart de Bocarmé.
Vollen.
Abbé Zech.

6^{e} Section

Sciences techniques

MM. *André.
*Barbé.
*Beaujean.
*Berleur.
*Berlingin.
*B^{on} G. de Béthune.
*F. Breithof.
*Charlier.
*Cousin.
*Crame.
*Daubresse.
*Deboucq.
*De Coster.
*J. De Jaer.
Dejardin.
*Deleu.
Delmer.
*De Preter.
D'Hoop.
Dochain-Defer.
*Dumont.
Dupuis.
*Dutilleux.
*Evrard.
*de Fooz.
*E. Gerard.
*Glibert.
*B^{on} Greindl.
*de Grossouvre.
*Hachez.
Hallez.
*Hans.
Harmant.
*Haton de la Goupillière.
*Havenith.
Hélin.
*Helleputte.

MM. *Jourdain.
*Kersten.
* de Kirwan.
*Koltz.
*Lagasse-de-Locht.
*C. Lambert.
*M. Lambert.
*Omer Lambiotte.
*Lechalas.
*Lhoest.
*V^{te} du Ligondès.
*H. Mansion.
*C^{te} de Maupeou.
*C^{te} H. de Mecus.
*Merten.
Meuwissen.
Morisseaux.
*d'Ocagne.
d'Orjo de Marchevelette.
Renaud.
*Renier.
*Richald.
*Ryan.
R. P. Ch. Schoonjans, S. J.
*Ch^{er} de Selliers de Moranville.
*Sibenaler
*H. Siret.
Slingeneyer de Goeswin.
*Smits.
*Soisson.
*Springael.
*E. Storms.
*C^{te} A. d'Ursel.
Van Brabandt.
Robert Van der Mensbrugghe.
*Witz.
*G. Wolters.

MEMBRES DU CONSEIL

1909-1910

Président d'honneur : M. A. Beernaert.
Président : M. F. De Walque (1910).
1er Vice-Président : M. le Dr H. Desplats (1911).
2e Vice-Président : M. C. Beaujean (1912).
Secrétaire : M. P. Mansion (1911).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1912).
Membres : MM. le Marquis de la Boëssière-Thiennes (1910).
L. Cousin (1913).
É. De Wildeman (1911).
Dr X. Francotte (1912).
Chanoine Grégoire (1913).
Ch. Lagasse-de Locht (1914).
Comte Ad. de Limburg-Stirum (1912).
E. Pasquier (1913).
A. Proost (1910).
Ch.-J. de la Vallée Poussin (1910).
R. P. J. Van den Gheyn, S. J. (1910).
Éd. Van der Smissen (1911).
G. Van der Mensbrugghe (1911).
Dr A. Van Gehuchten (1912).
Dr Warlomont (1911).

Conseillers honoraires : M. L. De Lantsheere.
Chanoine Ad. Delvigne (1).

---

(1) Décédé.

MEMBRES DU CONSEIL

1910-1911

Président d'honneur : M. A. Beernaert.
Président : M. le D^r H. Desplats (1911).
Vice-présidents : M. Éd. Van der Smissen (1911).
le R. P. Van den Gheyn (1914).
Secrétaire : M. P. Mansion (1911).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1912).
Membres : MM. Ch. Beaujean (1912).
le M^{is} de la Boëssière-Thiennes (1914).
L. Cousin (1913).
Éd. De Wildeman (1911).
Fr. De Walque (1914).
le D^r X. Francotte (1912).
le Chanoine V. Grégoire (1913).
Ch. Lagasse-de Locht (1913).
le C^{te} Ad. de Limburg-Stirum (1912).
E. Pasquier (1913).
A. Proost (1914).
Ch.-J. de la Vallée Poussin (1914).
G. Van der Mensbrugghe (1911).
le D^r A. Van Gehuchten (1912).
le D^r R. Warlomont (1911).

Conseiller honoraire : M. L. De Lantsheere.

BUREAUX DES SECTIONS

1910-1911

1re Section

Président : M. J. Neuberg.
Vice-Présidents : M. Ch.-J. de la Vallée-Poussin.
le R. P. Bosmans, S. J.
Secrétaire : M. H. Dutordoir.

2e Section

Président : M. G. Van der Mensbrugghe.
Vice-Présidents : le R. P. Schaffers, S. J.
M. A. de Hemptinne.
Secrétaire : le R. P. J.-D. Lucas, S. J.

3e Section

Président : le R. P. Bolsius, S. J.
Vice-Présidents : M. le Bon Greindl.
M. le Chanoine Grégoire.
Secrétaire : M. F. Van Ortroy

4e Section

Président : M. le Dr Struelens.
Vice-Présidents : MM. les Drs J. De Lantsheere
et L. Stouffs.
Secrétaire : M. le Dr R. Warlomont.

5e Section

Président : M. E. Dubois.
Vice-Présidents : MM. Aug. Beernaert et Morisseaux.
Secrétaire : M. Éd. Van der Smissen.

6e Section

Président : M. P. Daubresse.
Vice-Présidents : MM. Renaud et De Coster.
Secrétaire : M. R. Van der Mensbrugghe.

SESSION DU 27 OCTOBRE 1910

A CHARLEROI

SÉANCES DES SECTIONS

Première Section

M. A. J. de la Vallée Poussin présente un mémoire *sur la méthode de l'approximation minimum* (¹).

Il est donné lecture du rapport suivant de M. Goedseels sur ce mémoire.

Lorsqu'on veut contrôler une hypothèse ou une théorie scientifique, par des observations, on doit en déduire des équations en nombre supérieur à celui des inconnues, et contenant les mesures, déterminées expérimentalement, des grandeurs physiques auxquelles l'hypothèse ou la théorie se rapporte.

Si l'on peut rendre les équations compatibles en ajoutant aux mesures des corrections de l'ordre des erreurs inévitables des observations, les choses se passent comme si la théorie ou l'hypothèse contrôlée était vraie. Cette théorie ou cette hypothèse sont nécessairement fausses si la plus petite valeur possible de la plus grande correction, abstraction faite du signe, ou ce que nous avons appelé l'*approximation minimum*, surpasse la plus grande erreur absolue admissible.

On comprend ainsi l'immense intérêt qui s'attache à la détermination de cette approximation.

(¹) Nous avons l'habitude comme beaucoup d'écrivains d'employer le mot *minima* pour le féminin et le pluriel. Nous dirons ici *minimum* comme le fait notre collègue dans le travail que nous analysons.

Laplace a déjà signalé la chose, en 1799, dans le nº 39 du Livre III de sa *Mécanique céleste* à propos de l'hypothèse consistant à considérer le géoïde terrestre comme un ellipsoïde de révolution. Il a montré ainsi que cette hypothèse est incompatible avec les résultats des observations géodésiques, et nous ne concevons pas qu'après lui des auteurs se soient encore évertués à vouloir trouver les valeurs *les plus probables* des éléments de l'ellipsoïde terrestre.

Depuis Laplace jusqu'en 1902, plus personne, que nous sachions, ne s'est occupé de la détermination méthodique de l'approximation minimum. Dans l'édition de 1902 de notre *Théorie des erreurs d'observation* nous avons exposé, sous le nom de *Méthode du moindre écart*, un procédé permettant de trouver l'approximation minimum pour des équations à une seule inconnue, et la valeur correspondante de cette dernière. Dans notre édition de 1909, dont s'est occupé M. de la Vallée Poussin, nous avons repris la question pour des équations à plusieurs inconnues. Le procédé que nous avons imaginé et auquel nous avons donné le nom de *Méthode de l'approximation minima* se prête bien aux calculs, mais elle est beaucoup trop laborieuse dans bien des cas ; c'est pourquoi nous avons appris, avec la plus vive satisfaction, qu'un mathématicien du mérite de notre éminent collègue, a bien voulu s'occuper à son tour de la question.

Son travail se compose de deux parties distinctes : une partie théorique et une partie pratique.

L'auteur montre dans cette deuxième partie comment on peut simplifier pratiquement la recherche de l'approximation minimum.

On choisit aussi bien que possible un groupe de $(m+1)$ équations à m inconnues, on détermine, d'après un procédé simple décrit dans la première partie, les valeurs des inconnues fournissant l'approximation minimum M et cette approximation. Puis on remplace les inconnues par ces valeurs dans les autres équations. Si tous les résidus sont égaux ou inférieurs à M, le problème est résolu.

Dans le cas contraire, on ne doit plus s'occuper des groupes formés en prenant $(m+1)$ équations ayant donné des résidus inférieurs à M.

Si l'on a bien choisi le premier groupe, le procédé est incontestablement meilleur que notre méthode. Mais le flair seul du calculateur entre en jeu dans ce choix. Les exemples numériques traités par l'auteur prouvent qu'il est, sous ce rapport, d'une perspicacité rare. Mais nous croyons qu'il se fait illusion en attribuant la même perspicacité à la généralité des calculateurs.

Quoi qu'il en soit, le procédé nous paraît suffisamment simple pour qu'on puisse en faire l'essai, dans la pratique, avant de se résigner à appliquer notre méthode de l'approximation minima.

Dès lors, la deuxième partie du travail de M. de la Vallée Poussin mérite à tous égards d'être insérée dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

La première partie le mérite encore bien plus, car, dût la modestie de l'auteur en souffrir, nous déclarons, avec la compétence que nous croyons avoir acquise dans la question par plusieurs années de recherches, que la première partie est un vrai chef-d'œuvre d'ingéniosité. Cette première partie, dont la seconde n'est qu'une conséquence, a pour but de montrer que l'approximation minimum d'un système d'équations dont le nombre surpasse celui des inconnues est égale à l'approximation d'un groupe surpassant le nombre des inconnues d'une unité seulement. Elle donne de plus, nous l'avons déjà dit, un procédé simple pour résoudre ce dernier problème.

Nous émettons le vœu que notre collègue poursuive ses recherches sur la matière, et l'espoir qu'il finira par trouver un procédé simple applicable d'emblée à tous les cas.

Les conclusions de ce rapport sont adoptées par la section qui vote l'impression du mémoire dans la seconde partie des ANNALES.

M. Mansion présente le rapport suivant sur une note présentée par M. Merten intitulée : *Sur un mode de décomposition des équations définissant une fonction de plus de deux variables indépendantes.*

En nomographie, on peut résoudre graphiquement au moyen de nomogrammes appropriés, les équations à trois inconnues, ou les systèmes d'équations de ce genre, où chaque équation ne contient qu'une inconnue commune avec la précédente.

M. Merten dans la note dont nous venons de transcrire le titre trouve d'une manière simple les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation à un nombre quelconque de variables soit réductible à un système du genre de ceux dont il vient d'être question. Il en déduit que l'on ne peut résoudre par cette méthode et par la transformation de Tchirnhausen les équations algébriques générales d'ordre supérieur au sixième.

Je propose l'insertion de l'intéressante note de M. Merten au Bulletin de la séance.

La conclusion de ce rapport est adoptée par la section. Voici le texte de la note de M. Merten.

Sur un mode de décomposition des équations définissant une fonction de plus de deux variables indépendantes, par M. A. Merten, *chargé de cours à l'Université de Gand* (¹).

Soient x, y, z, u, quatre variables indépendantes ; soit une équation donnée,

$$F(x, y, z, u, v) = 0, \qquad (1)$$

définissant une fonction v des quatre variables indépendantes.

Si la fonction v satisfait à certaines conditions que nous nous proposons de chercher, on pourra la définir par un système d'équations tel que :

$$f_1(x, y, t_1) = 0, \qquad (2)$$
$$f_2(t_1, z, t_2) = 0, \qquad (3)$$
$$f_3(t_2, u, v) = 0 \qquad (4)$$

où chaque équation ne renferme que trois variables : la première renfermant deux variables indépendantes et une variable auxiliaire t_1 déterminée par cette première équation ; la dernière équation renfermant une variable auxiliaire, une variable indépendante, et la fonction v ; les équations intermédiaires renfermant chacune une des variables indépendantes ne figurant pas dans les autres équations, et de plus deux variables auxiliaires.

On remarque immédiatement que tout système analogue au

(¹) On rencontre en nomographie des questions du genre de celles qui sont traitées ici. On peut trouver graphiquement les valeurs v correspondant à des valeurs de x, y, z, u données, si l'on a construit les nomogrammes correspondant aux équations (2), (3), (4).

système (2) (3) (4) définit, par élimination des variables auxiliaires t_1 et t_2, une fonction de x, y, z, u ; mais la réciproque n'est pas toujours vraie : on ne peut pas toujours faire correspondre à une équation (1) un système équivalent, tel que (2) (3) (4).

La recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence du système (2) (3) (4) nous donnera le moyen de former aisément ce système, lorsque le problème est possible.

I

CONDITIONS NÉCESSAIRES

Considérons une fonction v telle que le problème soit possible, et supposons qu'on en ait trouvé la solution sous forme d'un système (2) (3) (4).

Par hypothèse, la fonction v définie par l'équation (1) est identique à la fonction v définie par le système (2) (3) (4). Il en est de même pour les dérivées partielles de v déterminées soit par (1), soit par (2) (3) (4). On aura donc

$$v'_x = \frac{dv}{dt_2} \cdot \frac{dt_2}{dt_1} \cdot \frac{dt_1}{dx}, \tag{5}$$

$$v'_y = \frac{dv}{dt_2} \cdot \frac{dt_2}{dt_1} \cdot \frac{dt_1}{dy}, \tag{6}$$

$$v'_z = \frac{dv}{dt_2} \cdot \frac{dt_2}{dz}. \tag{7}$$

Des équations (5) et (6) on déduit :

$$\frac{v'_x}{v'_y} = \frac{\frac{dt_1}{dx}}{\frac{dt_1}{dy}} \tag{8}$$

Or, par hypothèse, t_1 ne dépend que de x et y ; donc le second membre est indépendant de z et u ; le premier doit l'être aussi, et ne change donc pas si l'on y remplace z et u par des quantités quelconques z_0 et u_0.

Une première condition nécessaire est donc

$$\frac{v'_x}{v'_y} = \frac{v'_x(x, z, z_0, u_0)}{v'_y(x, y, z_0, u_0)} = \frac{v'_x(x, y, z, u_0)}{v'_y(x, y, z, u_0)} \tag{M}$$

L'équation (5) peut s'écrire :

$$v'_x = \frac{dv}{dt_2} \cdot \frac{dt_2}{dx}.$$

De cette équation, et de l'équation (7) on déduit

$$\frac{v'_x}{v'_z} = \frac{\dfrac{dt_2}{dx}}{\dfrac{dt_2}{dz}} \tag{9}$$

Le second membre est, par hypothèse, indépendant de u, puisque t_2 est fonction de x, y, z, seulement. On doit donc avoir, en désignant par u_0 une valeur quelconque

$$\frac{v'_x}{v'_z} = \frac{v'_x(x, y, z, u_0)}{v'_z(x, y, z, u_0)}. \tag{N}$$

C'est une deuxième condition nécessaire.

II

Nous allons montrer que les conditions trouvées (M) et (N) sont suffisantes.

En effet, si elles sont réalisées, les équations (8) et (9) peuvent s'écrire

$$\frac{\dfrac{dt_1}{dx}}{\dfrac{dt_1}{dy}} = \frac{v'_x(x, y, z_0, u_0)}{v'_y(x, y, z_0, u_0)}, \tag{10}$$

$$\frac{\dfrac{dt_2}{dx}}{\dfrac{dt_2}{dz}} = \frac{v'_x(x, y, z, u_0)}{v'_z(x, y, z, u_0)}, \tag{11}$$

Ces équations sont des équations linéaires aux dérivées partielles ; leur intégration donne

$$\chi(t_1) = v(x, y, z_0, u_0) \text{ ou } F[x, y, z_0, u_0, \chi(t_1)] = 0, \qquad (12)$$
$$\omega(t_2) = v(x, y, z_0, u_0) \text{ ou } F[x, y, z, u_0, \omega(t_2)] = 0, \qquad (13)$$

χ et ω étant deux fonctions arbitraires.

Les fonctions t_1 et t_2 ainsi déterminées permettent de résoudre le problème. Car, la fonction t_1 est bien fonction de x et y seulement. Quant à la fonction t_2, elle sera obtenue sous forme d'une fonction de x, y, z. Mais, en remplaçant dans son expression x en fonction de t_1 et y, on fera disparaître aussi y, de façon que t_2 sera fonction de t_1 et z. En effet, on a, d'après les équations (12), (13) et (M)

$$\frac{\frac{dt_1}{dx}}{\frac{dt_1}{dy}} = \frac{v'_x(x, y, z, u)}{v'_y(x, y, z, u)}, \quad \frac{\frac{dt_2}{dx}}{\frac{dt_2}{dy}} = \frac{v'_x(x, y, z, u)}{v'_x(x, y, z, u)}.$$

On a donc

$$\frac{\frac{dt_1}{dx}}{\frac{dt_1}{dy}} = \frac{\frac{dt_2}{dx}}{\frac{dt_2}{dy}}$$

ce qui montre que, si on donne à z une valeur arbitraire, t_2 ne dépend que de t_1 ; donc t_2 est fonction de z et t_1.

On prouve de même qu'en remplaçant x dans l'équation (1) par sa valeur en fonction de t_2, y, z, on fait disparaître y et z de l'équation ; car on a, d'après les équations (1), (13), (M) et (N)

$$\frac{\frac{dt_2}{dx}}{\frac{dt_2}{dy}} = \frac{v'_x(x, y, z, u)}{v'_y(x, y, z, u)}$$

donc, si u et z sont arbitraires, v ne dépend que de t_2 ; v est donc indépendante de y si t_2 est donnée ; y disparaît donc de l'équation.

On a aussi

$$\frac{\frac{dt_2}{dx}}{\frac{dt_2}{dz}}=\frac{v'_x}{v'_z}$$

donc, si on suppose u et y arbitraires, v ne dépend que de t_2 ; donc z disparaît aussi. Donc finalement v n'est fonction que de t_2 et u ; x, y, z, auront disparu simultanément de l'équation (1) après qu'on aura éliminé une de ces variables entre cette équation et l'équation donnant t_2.

Remarque. Les divers résultats rencontrés s'obtiennent aisément par la théorie des déterminants fonctionnels nuls. Ainsi

$$\frac{\frac{dt_2}{dx}}{\frac{dt_2}{dz}}=\frac{v'_x}{v'_z}$$

peut s'écrire, comme on le vérifie immédiatement,

$$\frac{dt_2}{dx}\cdot \mathrm{D}\frac{u, v, t_2}{z, t_2, u}=0,$$

on en déduit

$$\mathrm{D}\frac{u, v, t_2}{z, t_2, u}=0.$$

Donc v est fonction de t_2 et de u.

III

APPLICATION

Impossibilité de la *résolution de l'équation générale de degré supérieur au sixième, par la méthode précédente et la transformation de Tschirnhausen.*

Soit une équation algébrique renfermant m coefficients

$$\mathrm{F}=v^a+x_1v^b+x_2v^c+\cdots+x_kv^l+\cdots+x_pv^q+\cdots+x_m=0$$

Les exposants a, b,... sont donnés ; on demande de déterminer par la méthode précédente la fonction v des m variables $x_1, x_2, \ldots x_m$.

D'après ce que nous venons de démontrer, il faut qu'on puisse ranger les variables dans un ordre $x_k, x_p \ldots$, tel qu'on ait :

$$\frac{v'_{x_k}}{v'_{x_p}} = \varphi(x_k, x_p).$$

Or on a

$$F'_v \,.\, v'_{x_k} + F'_{x_k} = 0, \; F'_v \,.\, v'_{x_p} + F'_{x_p} = 0.$$

Donc

$$\frac{v'_{x_k}}{v'_{x_p}} = \frac{F'_{x_k}}{F'_{x_p}} = v^{l-q}$$

Pour que cette quantité ne dépende que de x_k et x_p, il faut que v ne dépende que de ces deux variables, donc que l'équation ne renferme que deux coefficients variables.

Si elle en renferme plus, on peut en faire disparaître quatre au plus par la transformation de Tschirnhausen. Il résulte donc de là que la transformation de Tschirnhausen, combinée avec la méthode précédente, permet de ramener toute équation complète de degré non supérieur au sixième à une équation à trois inconnues. Mais la transformation de Tschirnhausen combinée avec la méthode exposée dans cette note ne réussit pas pour les équations générales de degré supérieur au sixième.

M. le Comte de Sparre adresse à la section un mémoire *sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité.*

MM. Béthune et Pasquier sont respectivement nommés premier et second commissaires chargés de faire rapport sur le dit mémoire.

M. Lecat fait une communication *sur un théorème inexact de L. Gegenbauer, relatif au déterminant adjoint d'un déterminant général.*

M. Mansion croit la note de M. Lecat exacte, bien qu'il n'en ait pas vérifié tous les détails et en propose l'insertion dans la première partie des ANNALES.

Sur un théorème inexact de L. Gegenbauer, relatif au déterminant adjoint d'un déterminant général, par M. Lecat.

Le déterminant adjoint d'un déterminant $B_{n,p}$ à n dimensions et d'ordre p, est le déterminant $D_{n,p}$ dont les éléments sont les sous-déterminants (¹) d'ordre $(p-1)$ de B. Dans le second (²) des sept Mémoires qu'il a publiés sur les déterminants généraux, L. Gegenbauer, voulant généraliser au cas de ces déterminants, le théorème bien connu pour $n = 2$, énonce la proposition suivante : « *Tout sous-déterminant d'ordre* k *de* $D_{n,p}$ *est égal au sous-déterminant complémentaire, pris dans* $B_{n,p}$, *multiplié par* B^{k-1} *et par* $(k!)^{n-2}$ »; d'où il conclut : « en particulier, *le déterminant adjoint est égal à* $(p!)^{n-2}$ *fois le déterminant primitif élevé à la puissance* $(p-1)$ ».

Ce théorème est faux pour $n > 2$. Tout d'abord, on voit que le coefficient numérique n'est pas justifié, en considérant le cas particulier du déterminant B dont tous les éléments sont nuls sauf les diagonaux qui valent, par exemple, b. Mais il y a plus, même si l'on supprime ce coefficient, le théorème, qui prend alors une apparence très heureuse, est encore tout à fait inexact (³). Il suffit, pour le démontrer, de fournir un exemple où il est en défaut (⁴).

(¹) Observons, en passant, que la valeur de D ne change pas, si l'on prend les mineurs au lieu des sous-déterminants de B. On passe, en effet, d'un cas à l'autre, en multipliant D par une puissance de (-1) dont l'exposant est le nombre pair :

$$2E\binom{n}{2}\cdot\binom{p}{2}.$$

(²) *Ueber Determinanten höheren Ranges*. DENKSCHRIFTEN AKADEMIE WIEN (Math. naturwiss. Classe) tome 46, II. (1883), p. 295-8.

(³) W. Zajaczkowski avait probablement observé que le théorème du déterminant adjoint ordinaire n'est plus vrai pour $n > 2$, car dans son Mémoire sur les déterminants *à* n *dimensions*, il démontre le théorème *pour* $n = 2$, sans faire allusion au cas général. Voir PAMIETNIK AKADEMIE UMIEJETNOSCI, tome 6, (1881), Mémoire 3 (en polonais).

(⁴) On trouvera dans l'Appendice de notre *Théorie des déterminants à* n *dimensions, etc...*, Gand, 1910, deux exemples numériques, l'un pour $n = 3$, $p = 3$, l'autre pour $n = 4$, $p = 3$. — Il peut évidemment se présenter des cas particuliers où le théorème se vérifie.

Il n'est pas sans intérêt de chercher où réside l'erreur de la théorie de Gegenbauer. C'est ce que nous allons faire, réservant à une prochaine communication, l'exposé d'une théorie exacte (¹).

En vertu de la loi du développement d'un déterminant à n dimensions, suivant les premiers mineurs β, on a (²)

$$\sum_{i_1, \dots, i_{r-1}=1}^{p} b_{i_1, \dots, i_{r-1}, \mu} \cdot \beta_{i_1, \dots, i_{r-1}, \nu} = \mathrm{B} \,.\, \mathrm{M}_{\mu, \nu}$$

où

$$\mathrm{M}_{\mu, \nu} = 0 \quad , \quad \mathrm{M}_{\nu, \nu} = 1 \qquad (\mu, \nu = 1, \dots, p)$$

et

$$\mathrm{B} = \left| b_{i_1, \dots, i_r} \right|_p \quad ,$$

déterminant à r dimensions d'ordre p. En multipliant cette relation par

$$h_{\mu, i_r, \dots, i_{r+s-2}}$$

et sommant par rapport à μ, on obtient

$$\sum_{i_1, \dots, i_{r-1}=1}^{p} d_{i_1, \dots, i_{r+s-2}} \cdot \beta_{i_1, \dots, i_{r-1}, \nu} = \mathrm{B} \,.\, h_{\nu, i_r, \dots, i_{r+s-2}}$$

où

$$d_{i_1, \dots, i_{r+s-2}} = \sum_{\mu=1}^{p} b_{i_1, \dots, i_{r-1}, \mu} \cdot h_{\mu, i_r, \dots, i_{r+s-2}} \,. \tag{δ}$$

Appliquant (³) la loi du produit de deux déterminants l'un à r,

---

(¹) La question générale consiste dans la recherche de la relation qui existe entre, d'une part, les mineurs d'ordre quelconque π d'un déterminant *(permanent)* dont les éléments sont les mineurs d'ordre κ d'un déterminant *(permanent)* général B, et d'autre part, les mineurs d'ordre π de B.

(²) Nous écrivons, pour simplifier, $1, \dots, p$, au lieu de $1, 2, \dots, p$; $i_1, \dots, i_{r-1}$ au lieu de $i_1, i_2, \dots, i_{r-1}$; etc...

(³) Nous n'indiquons que les opérations principales et nous renvoyons pour les détails des propriétés utilisées, soit aux Mémoires originaux, soit à l'Ouvrage cité.

l'autre à s dimensions, mis sous forme d'un déterminant à $r+s-2$ dimensions, on obtient cette relation intéressante

$$\left| \sum_{i_1, \ldots, i_{r-1}=1}^{p} d_{i_1, \ldots, i_{r+s-2}} \cdot \beta_{i_1, \ldots, i_{r-1}, ir+s-1} \right|_{(i_r, \ldots, i_{r+s-1}=1, \ldots, p)}$$

$$= \mathrm{B}^{p-1} \left| d_{i_1, \ldots, i_{r+s-2}} \right|_{(i=1, \ldots, p)}. \qquad \text{(R)}$$

Les p^{r+s-2} quantités d ne sont pas quelconques; on ne peut en disposer à volonté. *L'erreur de Gegenbauer est d'avoir perdu de vue que ces quantités sont soumises aux conditions* (δ). Il pose, en effet, pour $r = s = n$:

$$1^\circ \quad d_{i_1, \ldots, i_{2n-2}} = 1 \quad \text{pour} \begin{cases} i_\alpha = i_{\alpha+n-1} \ (\alpha = 1, \ldots, n-1) & (\alpha), \\ i_n, \ldots, i_{2n-2} = \psi_1, \ldots, \psi_k & (\psi), \end{cases}$$

les ψ étant κ nombres différents, arbitraires mais déterminés, de la suite 1, 2, ..., p.

$d_{i_1, \ldots, i_{2n-2}} = 0$ si l'une au moins des égalités (α) n'a pas lieu.

$$2^\circ \qquad d_{i_1, \ldots, i_{n-1}; \sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(n-1)}} = b_{i_1, \ldots, i_{n-1}\sigma},$$

$$\text{pour } \sigma^{(\alpha)} \equiv \sigma \neq \psi_r \quad (r = 1, \ldots, \kappa) \qquad (\sigma)$$

3° $d_{i_1, \ldots, i_{2n-2}} = 0$ dans tous les autres cas.

Or, on voit aisément, si l'on tient compte de (δ), que les égalités précédentes imposent

$$p^{2n-2} + \kappa^{n-1} - \kappa^{2n-2}$$

relations (que nous nous dispensons d'écrire) entre les p^n paramètres

$$h_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 1, \ldots, p)$$

dont on peut disposer, et les quantités b, éléments du déterminant *donné*. Une discussion très simple montre que pour $n > 2$, il est impossible de résoudre ce système d'équations en laissant les γ quelconques (1). Si $n = 2$, le nombre d'équations est au plus égal à celui des inconnues et l'on peut exprimer les h en fonction d'un certain nombre d'entre eux.

L'erreur commise par Gegenbauer est donc fondamentale. Voyons en résumé comment il a tiré parti de ses hypothèses illégitimes 1°, 2°, 3°. Pour l'élément entre barres au premier membre de (R), on a respectivement les valeurs

$$\begin{array}{ll}
\beta_{i_n, \ldots, i_{2n-1}} & \text{avec } (\psi), \\
\mathrm{B} \,.\, \mathrm{M}_{\sigma, 2n-1} & \text{avec } (\sigma), \\
\text{zéro} & \text{dans tous les autres cas,}
\end{array}$$

de sorte qu'en appliquant à ce déterminant le théorème de Laplace généralisé, on trouve qu'il vaut

$$\mathrm{B}^{p-\kappa} \,.\, \left| \beta_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} \right|_{(\kappa)},$$

en indiquant par (κ) que les indices γ prennent les valeurs $\psi_1, \ldots, \psi_\kappa$. Le déterminant du second membre est égal au produit du sous-déterminant

$$\left| d_{i_1, \ldots, i_{2n-2}} \right|_{(\kappa)},$$

valant (2) $(\kappa\,!)^{n-2}$, par le mineur complémentaire, qui, à cause de la disposition de ses éléments nuls, se réduit au déterminant à n dimensions

$$\text{Compl.} \left| b_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} \right|_{(\kappa)}.$$

D'où le théorème énoncé par Gegenbauer.

R. F. Scott, utilisant le théorème de Francke sur les déterminants ordinaires, avait démontré (3), en particulier, que *la*

---

(1) En écrivant les équations auxquelles les b doivent satisfaire, on exprime, par le fait même, les conditions nécessaires pour que le théorème devienne exact.

(2) En effet, en vertu d'un important théorème sur un déterminant spécial (Gegenbauer, *loc. cit.*, p. 294), le déterminant qui nous occupe est égal au permanent à $(n-1)$ dimensions et d'ordre κ, tous les éléments valant l'unité.

(3) PROCEEDINGS LONDON MATH. SOC., série 1, t. 11, 1879/80, art. 2/5.

somme des carrés des mineurs d'ordre κ *d'un déterminant ordinaire* B, *d'ordre* p, *est égale, à un facteur numérique près, au produit de la puissance* (κ + 1 — *p*) *du déterminant* B *par le déterminant cubique dont* κ *tranches du groupe fixe* (1) *sont formées par les éléments de* B, *les* p-κ *tranches parallèles ayant toutes pour éléments les premiers mineurs du déterminant* B.

L. Gegenbauer (2), à l'aide du théorème inexact dont nous avons parlé, énonce une proposition qui généralise celle de Scott et exprime la somme des carrés d'un déterminant dont le nombre de dimensions n est pair, sous forme d'un déterminant ayant une dimension de plus. Cette relation est inexacte (pour $n \geqslant 4$) ainsi que d'autres que Gegenbauer en déduit.

En résumé, *les théorèmes sur les déterminants* « composés » *ordinaires et leurs conséquences, n'ont pas lieu pour* $n > 2$ (3).

Le R. P. Bosmans, S. J., fait une communication *sur la première édition de la* « *Clavis Mathematica* » *d'Oughtred*. M. Mansion est nommé commissaire pour l'examen de ce mémoire.

M. Sageret fait une communication *sur la démonstration du Théorème de Fermat*. M. Devriest est nommé rapporteur pour l'examen de ce travail.

M. Neuberg fait à la section la communication suivante : *Sur le tétraèdre orthocentrique.*

Un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ est dit *orthocentrique* si ses quatre hauteurs A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4 concourent en un même point H; il est conjugué à une sphère de centre H. Certaines de ses propriétés rappellent celles du triangle et de son orthocentre; par exemple, *si un tétraèdre orthocentrique est circonscrit à un paraboloïde, son orthocentre est situé dans le plan de Monge, lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits au paraboloïde.*

---

(1) Tranches du groupe fixe = *strates* (Scott). — Pour démontrer le théorème en question, Scott utilise, outre le théorème de Francke, le théorème relatif au déterminant cubique à strates identiques.

(2) *Loc. cit.*, p. 297/8.

(3) Il est visible que l'existence de théorèmes spéciaux au cas $n = 2$, tient à ce que le nombre $2n—2$ n'est égal à n que pour $n = 2$. (Se rapporter à la multiplication des déterminants).

Cette propriété résulte immédiatement de ce que l'invariant simultané Θ d'un paraboloïde et d'une sphère s'annule quand il est possible de circonscrire au paraboloïde un tétraèdre autopolaire à la sphère (Salmon-Chemin, *Géom. analytique*, t. I, 55, 201); elle a été explicitement énoncée par Duporcq, dans ses *Premiers principes de géométrie moderne*, p. 110.

En voici une démonstration analytique directe.

Soient B_1, B_2, B_3, B_4 les points de contact des faces d'un tétraèdre orthocentrique $A_1A_2A_3A_4$ circonscrit au paraboloïde

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x.$$

Les coordonnées de B_i étant x_i, y_i, z_i, l'équation du plan tangent en ce point est

$$\frac{yy_i}{p}+\frac{zz_i}{q}-x-x_i=0,$$

et celle de la sphère conjuguée au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ a la forme

$$\Sigma L_i\left(\frac{yy_i}{p}+\frac{zz_i}{q}-x-x_i\right)^2=0. \ (i=1, 2, 3, 4).$$

On doit avoir

$$\frac{1}{p^2}\Sigma L_i y_i^2=\frac{1}{q^2}\Sigma L_i z_i^2=\Sigma L_i, \tag{1}$$

$$\Sigma L_i y_i z_i=0, \qquad \Sigma L_i y_i=0, \qquad \Sigma L_i z_i=0; \tag{2}$$

l'abscisse du centre de la sphère est

$$x=-\frac{\Sigma L_i x_i}{\Sigma L_i}. \tag{3}$$

Or, des égalités

$$\frac{y_1^2}{p}+\frac{z_1^2}{q}=2x_1, \quad \frac{y_2^2}{p}+\frac{z_2^2}{q}=2x_2, \ldots$$

on déduit

$$\frac{1}{p}\Sigma L_i y_i^2+\frac{1}{q}\Sigma L_i z_i^2=2\Sigma L_i x_i; \tag{4}$$

mais les égalités (1) donnent

$$\Sigma L_i y_i^2 = p^2 \Sigma L_i, \qquad \Sigma L_i z_i^2 = q^2 \Sigma L_i,$$

de sorte que la relation (4) peut se transformer en

$$(p+q)\Sigma L_i = 2\Sigma L_i z_1.$$

Par suite, l'abscisse du centre de la sphère a la valeur constante $-\frac{1}{2}(p+q)$. Le théorème est donc démontré.

Si l'on se donne les points B_2, B_3, B_4, le point B_1 peut être déterminé par deux des équations (¹)

$$\begin{vmatrix} \frac{y_1^2}{p^2} - 1 & y_1 z_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{z_1^2}{q^2} - 1 & y_1 z_2 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{y_1^2}{p^2} - 1 & \frac{z_1^2}{q^2} - 1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0 , \qquad (5)$$

qu'on obtient en éliminant L_1, L_2, L_3, L_4 entre les relations (1) et (2).

Soient C_1, C_2, C_3, C_4 les projections des points B_1, B_2, B_3, B_4 sur le plan des yz. L'équation (5) indique que ces projections sont situées sur une conique dont les axes principaux sont parallèles aux axes Oy, Oz.

Supposons maintenant le paraboloïde de révolution ; alors $p = q$. L'abscisse de H étant $-p$ et celle du foyer $\frac{1}{2}p$, le plan des yz divise la distance du foyer au point H dans le rapport 1 : 2.

Or le plan des yz passe par les projections F_1, F_2, F_3, F_4 du foyer F sur les faces du tétraèdre circonscrit $A_1A_2A_3A_4$; on peut l'appeler *plan de Simson* de F par rapport au tétraèdre. On a donc l'analogue d'une propriété de la droite de Simson d'un triangle (²).

(¹) Nous représentons un déterminant par sa première ligne lorsque les autres lignes ont une composition analogue.

(²) Voir *Nouvelles Annales de Math.*, 1906, pp. 145 et 479 (Fontené et Bouvaist).

Les droites FF_1, FF_2, FF_3, FF_4 sont les arêtes d'un angle tétraèdre complet dont les faces opposées sont perpendiculaires; la droite FF_1 est donc l'intersection des plans hauteurs du trièdre $F_1F_2F_3F_4$.

Enfin, des équations (1) et (2) on déduit

$$| y_1^2 - z_1^2 \quad y_1 z_1 \quad y_1 \quad z_1 | = 0;$$

il resulte de là que les cinq points C_1, C_2, C_3, C_4, O sont situés sur une même hyperbole équilatère.

M. Neuberg expose ensuite un travail *sur une transformation unirationnelle*. La section décide l'insertion de ce mémoire dans la seconde partie des ANNALES.

Seconde section

Le R. P. Lucas, S. J., secrétaire, résume la communication suivante envoyée par M. Van de Vyver : *Prisme à trois positions pour salle magnétique.*

Nous avons adopté pour les observations magnétiques de la station de Géographie mathématique de l'Université de Gand, les appareils de Mascart.

Les installations comportent deux postes : l'un destiné aux appareils à lectures directes, l'autre réservé aux appareils enregistreurs.

Pour ce dernier poste, le montage des appareils a été fait en se rapprochant le plus possible de la façon classique, qui est d'ailleurs très rationnelle et donne d'excellents résultats.

La seule modification, de peu d'importance du reste, que nous ayons apportée au dispositif habituel, c'est de remplacer la lampe à gazogène par un bec à gaz d'éclairage. Un tuyau en cuivre amène le gaz jusqu'au bec papillon installé dans la lanterne ; un robinet à pointeau facilite le réglage de la hauteur de flamme. Nous avons ainsi supprimé les manipulations journalières plus ou moins désagréables de l'ancienne lampe et nous avons en même temps régularisé la hauteur de flamme, fait disparaître les odeurs d'essence, etc.

Pour le poste d'appareils à lectures directes nous avons, mon aide M. Vanden Bosch et moi, imaginé un dispositif nouveau et que nous croyons intéressant de signaler.

On sait que les appareils à lecture directe comprennent (Fig. 1) un déclinomètre D, un bifilaire C et une balance magnétique I. Ces appareils sont posés chacun sur une tablette en pierre fixée sur un pilier (les piliers sont disposés à peu près aux sommets d'un triangle isocèle). Les deux premiers D et C sont dans la direction du N-S magnétique et la balance I occupe le sommet du triangle tourné du côté W. Au milieu de la base du triangle se trouve un quatrième pilier à tablette P, dit pilier des lunettes. C'est sur cette dernière tablette que sont disposées trois lunettes identiques L, L′ et L″, braquées chacune sur un des instruments ; les lunettes étant placées de façon que le champ de la visée de chacune d'elles ne soit pas masqué par la présence des lunettes voisines.

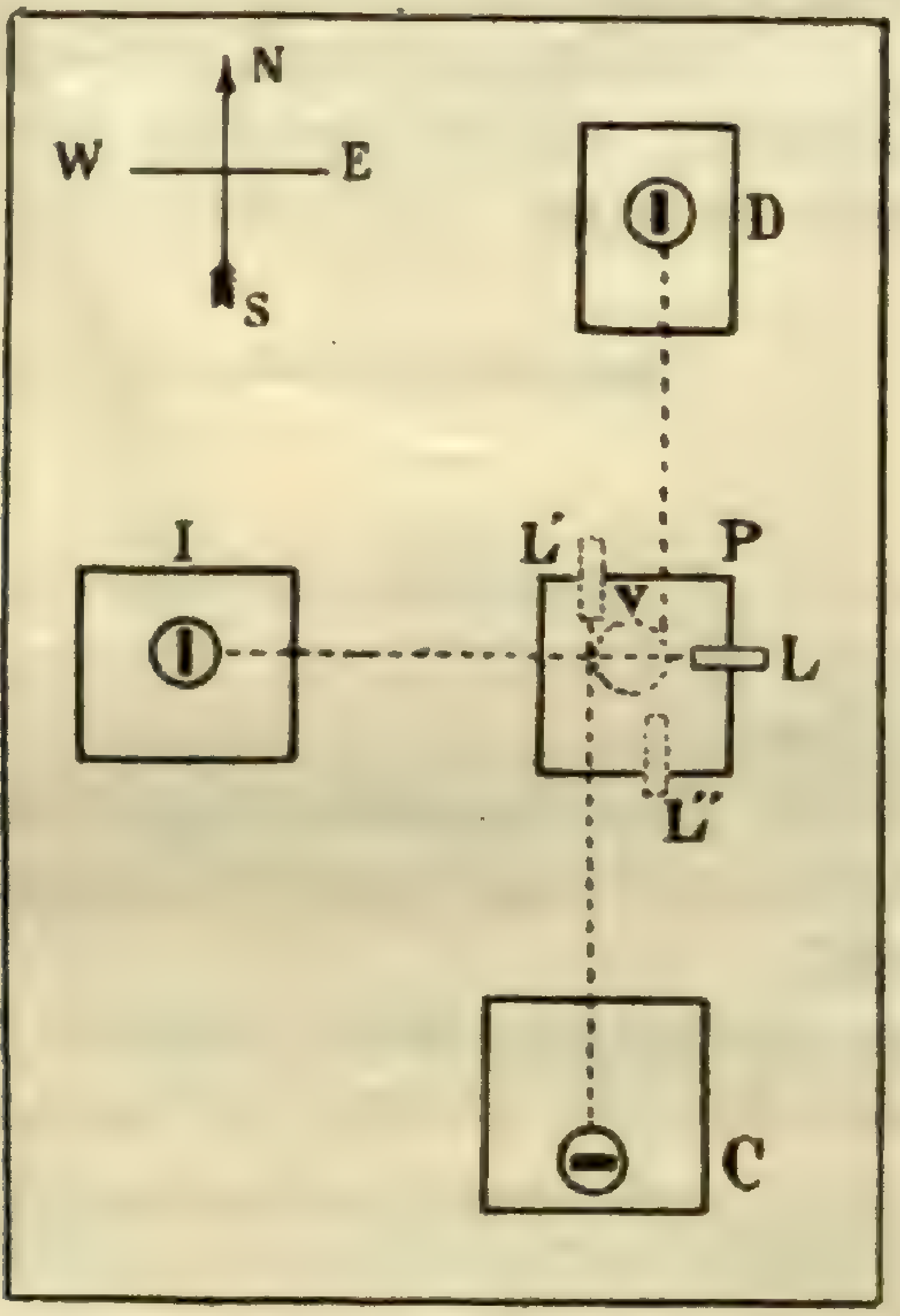


Fig. 1.

Nous nous sommes proposé de supprimer deux des lunettes L′ et L″, et voici comment le problème a été résolu.

Un prisme à réflexion totale R, de 5 centimètres de hauteur et de côtés (Fig. 2) a été posé sur une des moitiés d'un plateau carré A, et retenu en place par un encastrement à rebord M de ce plateau. Le plateau A peut glisser à frottement doux sur un second plateau B, en tournant autour d'un axe O placé excentriquement par rapport à l'axe de l'appareil.

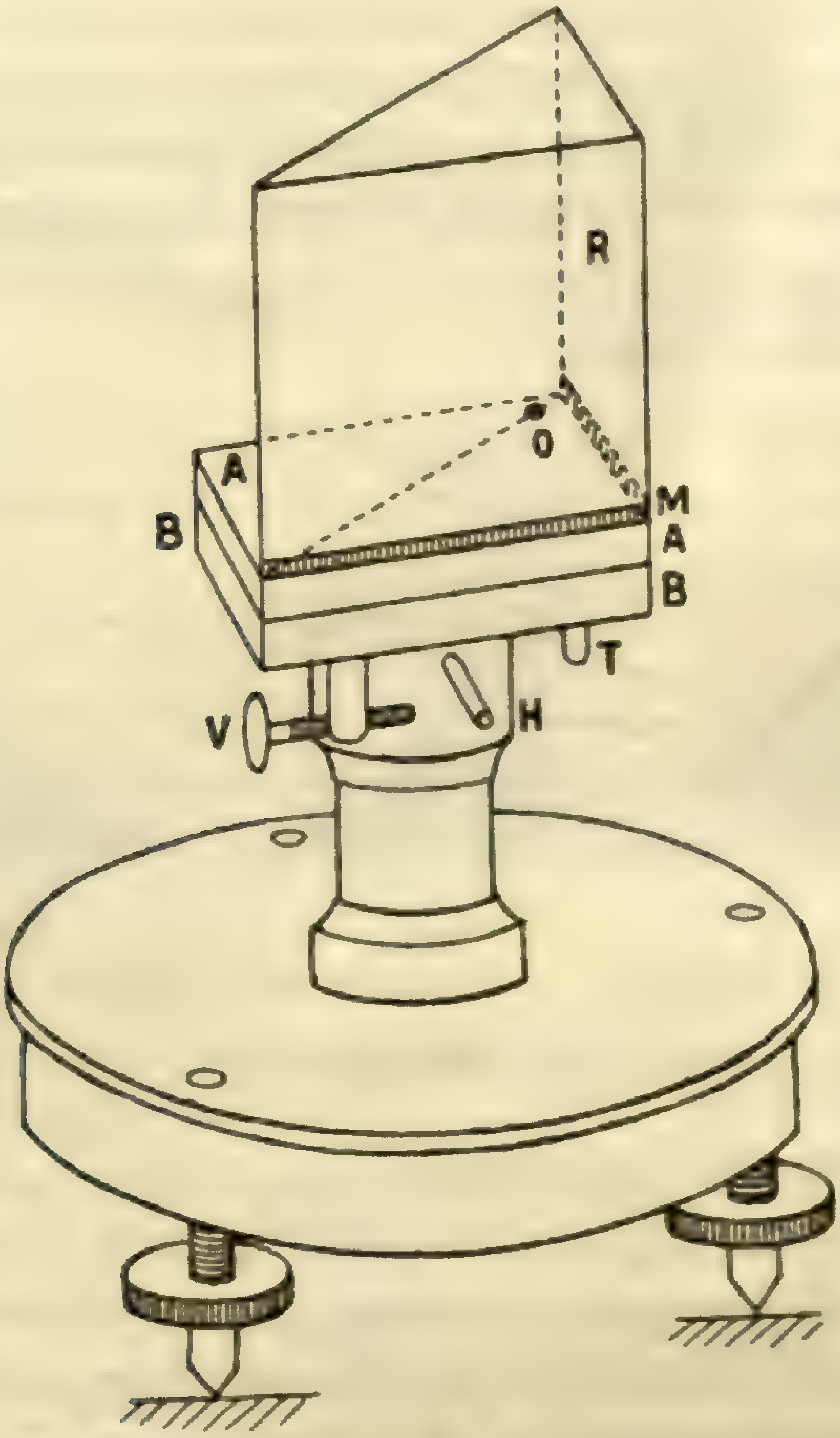


Fig. 2.

Le plateau B est lui-même mobile autour d'un axe central et peut décrire une rotation de 90°, solidairement cette fois avec le plateau A. Il porte en-dessous et à droite un taquet T, qui vient buter contre un arrêt H fixé au pied de l'instrument et qui limite la rotation vers la gauche. Un second taquet à vis de réglage V est fixé à gauche et sous le plateau ; la vis vient buter contre le même arrêt et limite cette fois la rotation du plateau vers la droite. L'appareil est monté sur un support à trois vis calantes ; le tout est en cuivre rouge.

L'installation de l'appareil est très simple.

On place une lunette unique L sur le support des lunettes, face au pilier Ouest et l'on pose chaque instrument magnétique sur son support, à fort peu près à la distance exigée par les longueurs focales des pièces optiques respectives de ces instruments.

Toutes les vis calantes des pieds sont logées dans des crapaudines.

Devant la lunette et dans la direction de la balance I on place le prisme à trois positions que nous venons de décrire.

Cela étant, on fait pivoter le plateau A sur le plateau B (Fig. 3, n° 1), ce qui permet d'écarter le prisme R du champ de la vision de L. Puis, on fait le réglage de la balance I comme d'habitude et sans s'inquiéter du prisme.

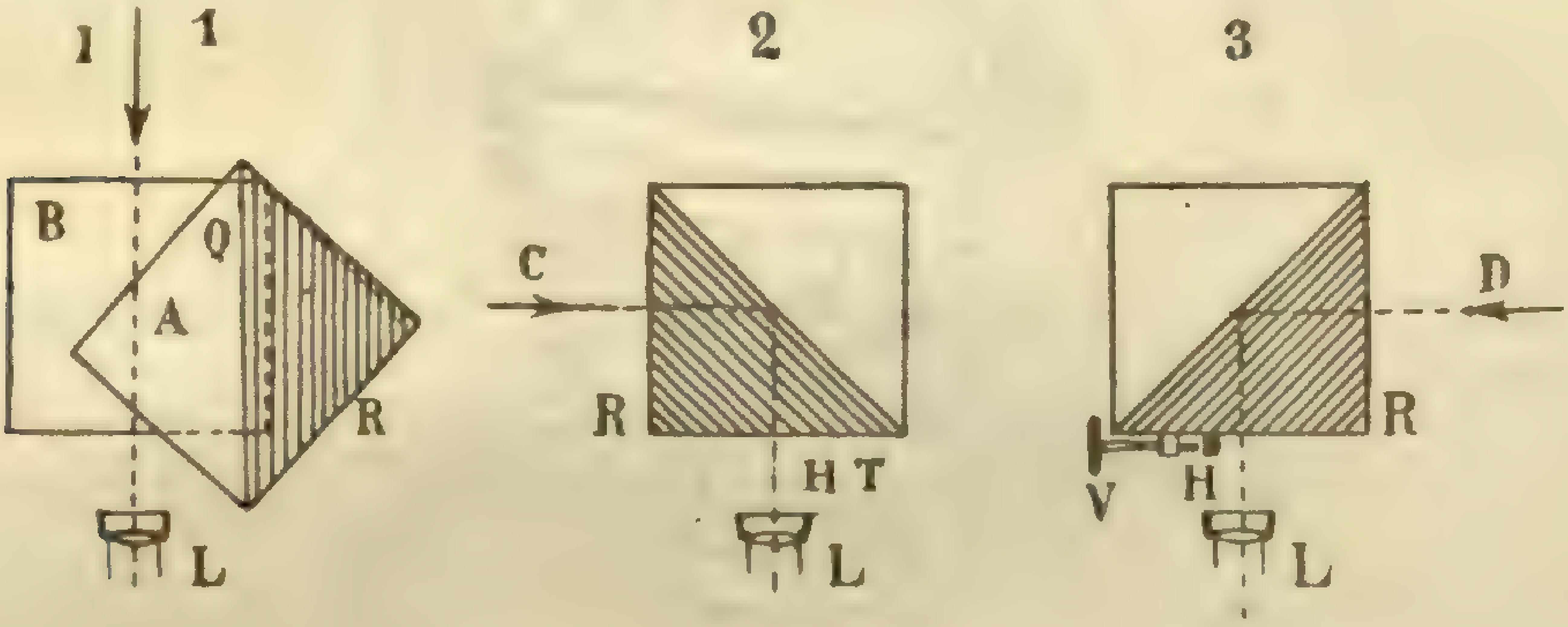


Fig. 3.

Par le mouvement du plateau A on ramène ensuite le prisme au milieu de l'appareil, et l'on fait tourner simultanément les 2 plateaux A et B jusqu'au moment où le taquet I vient donner contre son arrêt H (Fig. 3, n° 2). Par de légers déplacements du bifilaire C on amène ensuite l'échelle fixe et l'échelle mobile de cet appareil à occuper, par réflexion totale, la position voulue dans le champ de la lunette.

Enfin, dernière opération, on fait pivoter à nouveau et simultanément A et B de 90° jusqu'au moment où le taquet à vis de réglage V vient buter contre l'arrêt H (Fig. 3, n° 3). On amène les échelles du déclinomètre à peu près convenablement dans le champ de la lunette, après réflexion totale dans le prisme, et l'on achève de régler par des mouvements lents sur la vis du taquet.

On recommence ensuite les trois opérations, afin de s'assurer si les diverses manipulations n'ont pas dérangé les premiers résultats acquis, et lorsque la mise au point et le réglage sont définitifs, on fixe les crapaudines à l'arcanson.

Les avantages du procédé sautent aux yeux.

Tout d'abord pour faire les trois lectures l'opérateur n'a pas besoin de se déplacer. Il s'installe devant la lunette et 1°) écarte le prisme et prend note des indications de la balance ; 2°) il ramène le prisme, le fait pivoter à gauche, et lit le bifilaire ; 3°) il fait pivoter le prisme à droite et le lit le déclinomètre. Les 3 opérations réunies ne prennent guère qu'une minute.

Les échelles du déclinomètre et du bifilaire peuvent être graduées à l'endroit.

Le prix de l'appareil n'atteint guère qu'une centaine de francs ; la suppression des deux lunettes permet donc de réaliser une économie de près de 500 fr., ce qui n'est jamais à dédaigner dans un laboratoire.

L'appareil est construit par M. Vanden Bosch avec l'habileté qu'on lui connaît ; comme toujours il s'est ingénié à rendre l'instrument aussi simple et pratique que possible.

M. Delemer présente un mémoire intitulé *Une question de géométrie cinématique à propos des mouvements oculaires*. Il en donne ce résumé succinct :

On sait que les mouvements de l'œil dans son orbite, lorsque le regard parcourt l'espace, ne sont que des mouvements de rotation autour d'un point fixe, puisque le centre de rotation de l'œil est fixe par rapport à la tête.

Les lois des mouvements du globe oculaire autour de son centre de rotation sont les lois de Donders et de Listing. La loi de Listing notamment précise le mouvement du globe lorsque « le sujet qui regarde tient sa tête droite et immobile et que sa ligne de regard se porte d'un point situé juste en face de lui à un autre point de son champ de regard. Le point juste en face correspond à ce qu'on appelle : *la position primaire du point de regard* ».

Or, je me suis demandé quel peut être le mouvement du globe oculaire lorsque la ligne de regard se porte d'un point à un autre, alors qu'aucun de ces deux points n'est dans la position primaire. Je crois avoir reconnu, dans ce cas, certaines conséquences non encore signalées des lois de Donders et de Listing.

Le mouvement du globe oculaire, avons-nous vu, est celui d'un solide autour d'un point fixe. Comme tout mouvement de cette espèce, il doit résulter du roulement d'un cône mobile sur un autre cône fixe.

Mais de plus, dans le cas envisagé ici, ce roulement doit être réglé de la manière suivante : il faut que pour chacune des orientations successives *déterminées* de la ligne de regard, le globe oculaire qui est entraîné avec cette ligne droite, prenne aussi autour de cette ligne et en même temps par rapport à des axes fixes dans la tête du sujet, une position *bien déterminée* par les lois de Donders et de Listing.

Quelles propriétés en résulte-t-il pour les formes des cônes fixe et mobile capables de produire par leur roulement le mouvement étudié ?

Les propositions que je crois avoir établies montreraient que ces cônes sont de formes symétriques l'une de l'autre. Le cône mobile roulerait sur le cône fixe de manière à rester constamment symétrique de celui-ci par rapport au plan tangent commun. Enfin, si l'on considère à chaque instant la ligne de regard mobile et en même temps le prolongement en arrière, à partir du centre de rotation, de la ligne primaire de regard, ces deux droites, l'une entraînée avec le corps mobile, l'autre appartenant à l'espace fixe, seraient aussi constamment symétriques l'une de l'autre par rapport au plan tangent susnommé.

Le mémoire se termine par la recherche de la forme du cône fixe quand la ligne de regard se déplace d'un point à un autre en s'appuyant constamment sur la droite qui joint les deux points. Ceci donne lieu à un calcul de géométrie analytique.

La section nomme M. Neuberg et le P. Thirion commissaires de ce mémoire.

M. L. Casteels fait la communication suivante *sur un phénomène lumineux remarquable*, observé lors du passage du noyau de la *comète de Halley* devant le disque solaire.

Il s'agit d'une large bande lumineuse, vue à l'horizon N.-E. de 'Observatoire royal, à Uccle, le 19 mai, entre 0 h. 45 m. et

1 h. 15 m. t. officiel (¹). La bande était visible sur une longueur d'environ 60° ; elle avait l'aspect d'une buée laiteuse, uniformément jaunâtre, d'une intensité lumineuse environ trois fois aussi grande que celle de la Voie Lactée dans la constellation du Cygne. Le bord supérieur — le bord inférieur était constitué par l'horizon lui-même — tranchait nettement sur le fond sombre des parties voisines du ciel ; il avait la forme d'un arc de cercle de très grand rayon, l'extrémité nord, du côté de la ville de Bruxelles, atteignant une hauteur d'environ 20° et l'extrémité est se perdant dans les brumes qui enveloppaient le bois de la Cambre et les parages de l'Exposition. Quand au bord latéral nord, il était moins nettement visible.

Je fais remarquer que le phénomène ne pouvait être pris ni pour un effet de la Lune — cachée derrière un voile épais de nuages vers l'horizon ouest — ni pour un effet de lueurs provenant de quelque éclairement artificiel, soit de la ville de Bruxelles, plus au Nord, soit de l'Avenue Louise, où l'éclairage électrique fonctionnait depuis peu de jours. L'éclairement de l'atmosphère produit par les lumières de l'agglomération bruxelloise est, d'ailleurs, tout à fait caractéristique ; depuis la fameuse nuit du 18 mai, j'ai souvent eu l'occasion d'observer l'horizon nord et l'horizon nord-est de l'Observatoire ; jamais je n'ai revu la bande lumineuse en question.

Au début j'ai attiré l'attention de mon collègue, M. Jamar, assistant à l'Observatoire et de M. Simoens, aide au service astronomique, sur ce phénomène étrange. Par la suite, j'ai voulu m'assurer si la bande lumineuse ne se déplaçait pas ; il m'a semblé, vers 1 h. 10 m., qu'il y avait eu un léger glissement vers l'Est, dans le sens horizontal seulement. Vers 1 h. 15 m., le phénomène avait complètement disparu ; la pluie avait mis fin à toute observation. Et je n'ai plus rien remarqué d'anormal le matin du 19 mai (²).

(¹) Les dates et les heures données dans ces notes se rapportent *au temps officiel belge.*

(²) En ce qui concerne les observations faites à Uccle, voir l'article de M. Delporte : « La Comète de Halley », dans CIEL ET TERRE, 1910, n° 8. Voir aussi, pour plus de détails, les notes qui paraîtront dans les ANNALES de l'Observatoire, et en particulier celles de M. Van Biesbroeck, qui présentera une belle série d'observations.

En d'autres lieux, certains observateurs ont constaté, la même nuit, des manifestations lumineuses semblables à celle qui a été notée à Uccle. L'observation la plus intéressante, à notre point de vue, est celle qui fut faite au Pic du Midi et à Bagnères-de-Bigorre, par MM. Marchand et Latreille. Vers 3 h., M. Latreille, au Pic, « a vu à l'horizon, du N. au N.-N.-E., puis un peu plus tard du N.-W. à l'E., une bande lumineuse, assez large, de couleur jaune orangé », que M. Marchand déclare avoir observée lui-même à Bagnères, entre 3 h. et 4 h. (Voir Ac. des Sc. de Paris : COMPTES RENDUS, tome 150, n° 22).

Cette bande est vraisemblablement celle qui a été observée à Uccle ; s'il en est réellement ainsi, il ne saurait être question d'un nuage proprement dit. Voici, là-dessus, l'opinion de M. Marchand (C. R., loc. cit.) : « Cette bande n'est autre chose que l'un des phénomènes qui précèdent normalement le lever du Soleil ; cependant, c'est seulement lorsque l'atmosphère est chargée de poussières très fines et très élevées (comme cela s'est produit, par exemple, en 1902 et 1903, après l'éruption de la Martinique), qu'elle prend une grande étendue, et qu'elle précède ainsi, de deux heures, le lever du Soleil. » Et M. Marchand conclut : « Il semble bien... que des poussières très ténues, d'origine cosmique, se soient répandues, du 18 au 19 mai, dans l'atmosphère terrestre. »

Je ne partage pas entièrement cette manière de voir. Je pense qu'il s'agit là d'un phénomène purement extra-terrestre, directement en rapport avec le passage de notre planète à proximité de la comète de Halley. C'est ce que je vais tâcher d'expliquer. On me pardonnera, à ce propos, d'entrer dans quelques détails relatifs à la forme affectée par la queue de l'astre, *vers l'époque de sa conjonction inférieure avec le Soleil*.

Observons, tout d'abord, que maintes photographies, prises avant et après le 18 mai, dénotent l'existence d'une queue extraordinairement large, partagée en plusieurs courants, sensiblement en ligne droite, dont quelques-uns, secondaires, s'écartent à une distance parfois considérable des masses plus compactes fournies par les courants principaux. Les belles photographies prises à l'Observatoire du Transvaal et à l'Observatoire Lick sont caractéristiques à cet égard (¹). D'ailleurs, les observations du 17 au 23 mai ont mis en évidence le même fait ; je vais passer rapidement en revue les plus importantes.

Mercredi matin, 18 mai. — Courant principal de la queue, occupant les constellations du Bélier, des Poissons, de Pégasse, du Petit Cheval, et semblant se terminer en pointe dans l'Aigle. Observé en différents endroits du globe.

Courant secondaire très large, beaucoup moins lumineux, au sud du premier. Observé à Williams Bay (Obs. Yerkes), par le Prof. E. Barnard et ses collaborateurs (Astr. Nachr., n° 4431).

Jeudi matin, 19 mai. — Bande lumineuse observée à Uccle, au Pic et à Bagnères. Voir ci-dessus. Puis, d'autres observations semblant se rapporter au même phénomène :

Couleur blafarde à l'horizon N.-E. Observée à Ploesti, en Roumanie ;

Lueurs d'un rouge pâle dans la direction du N.-N.-E., à Nîmes (Bulletin de la Soc. Astr. de France, juillet 1910) ;

Bande vert bleuâtre occupant une assez longue étendue dans la direction du N.-N.-E. (Bulletin S. A. F., août 1910). Observation faite en ballon, à Genève.

Courant principal de la queue, qui s'est déplacé légèrement vers le Nord. Observé dans les localités suivantes :

Williams Bay ;

Joannesburg et Bloemfontein, par MM. Innes, Wood et Worssell ; Finlay et Rudge (Tr. Obs., Circ. n° 3) ;

Buluwayo, dans la Rhodesia, par le R. P. Goetz (Tr. Obs., Circ. n° 4, p. 31) ;

Capetown, par le Dʳ Juritz (Tr. Obs., Circ. n° 3) ;

Athènes, par M. Eginitis (Comptes Rendus, tome 150, n° 22) ;

Bamberg, par M. Hartwig (A. N., n° 4416) ;

(¹) Voir Transv. Obs., Circular n° 4, 1910 et les Publ. of the Astr. Soc. of the Pacific, vol. XXII, n° 132. Voir en particulier, la photographie obtenue à Joannesburg, par M. Wood, le 21 avril, et reproduite dans le n° 4420 des Astr. Nachr.

Teramo, par le Dʳ Cerulli (A. N., nº 4416) ;
Bucarest, par M. Anestin (Revue Astr., Orion) ;
Helwan, en Égypte, par M. Knox Shaw (A. N., nº 4418) ;
Cordoba, dans la République Argentine, par le Prof. C. D. Perrine (Astr. Journal, nº 617) ;
Sonnwendstein, en Autriche, par M. Hartmann (A. N., nº 4414) ; etc.

Courant secondaire de la queue, moins brillant et plus large, au sud du premier ; s'y rattachant à l'est du carré de Pégase ; traversant, presque parallèlement au courant principal, les constellations des Poissons, du Verseau, du Capricorne et les régions limites de l'Aigle et du Sagittaire ; incliné de quelques degrés sur l'axe de la lumière zodiacale. Observé à Williams Bay et, dans de meilleures conditions, en Afrique australe (Innes, Wood, Worssell, Juritz, etc.) et à Cordoba (Perrine). Les deux branches sont séparées l'une de l'autre par une bande sombre bien visible ; le bord nord de la première est à une distance moyenne de 18° environ du bord sud de la seconde.

Courant secondaire de la queue, moins long que le courant principal, au nord de celui-ci ; moins brillant encore que le courant sud. Observé à Capetown, par le Dʳ Juritz (Tr. Obs., Circ. nº 3, p. 18).

Jeudi midi. — Courant principal et courant secondaire sud, observés au Mont Hamilton, en Californie, avant le lever du Soleil, par M. Campbell et ses collaborateurs.

Vendredi matin, 20 mai. — Courant principal, vu à Helwan, à Athènes, à Johannesburg, à Buluwayo et à Capetown. Il a gagné en largeur, du moins dans le carré de Pégase ; mais il a perdu en intensité lumineuse. Position à 1° au nord de la position occupée la veille.

Courant secondaire sud, observé à Johannesburg, par MM. Wood et Worssell et à Capetown, par M. Juritz. Le courant secondaire nord n'a plus été revu.

Vendredi midi. — Courant principal, observé au Mont Hamilton.

Vendredi soir. — Apparence de queue, vue dans le grand équatorial de l'observatoire d'Athènes, par M. Eginitis ; elle est dirigée vers l'Ouest, du côté du Soleil.

Queue dirigée vers l'Est, du côté opposé au Soleil, vue sous forme de traînée lumineuse, droite et simple, à Johannesburg, par M. Innes (longueur de 19°) ; à Capetown, par M. Juritz ; à Buluwayo, par le Père Goetz (15°).

Samedi matin, 21 mai. — Courant principal, vu à Helwan, à Johannesburg, à Capetown et à Cordoba. Plus large encore, dans Pégase, et plus faible. Déplacement peu accentué vers le Nord.

Courant secondaire sud, très large, plus lumineux que le courant principal observé dans l'Afrique australe, par MM. Innes, Worssell et Juritz, et à Cordoba par M. Perrine, qui constate un élargissement assez notable de la bande obscure séparant les deux courants.

Queue dirigée vers l'Est (20°), vue au Mont Hamilton, après le coucher du Soleil.

Samedi soir. — Queue droite et simple, dirigée vers l'Est. Visible à Athènes ; à Helwan (20°) ; à Johannesburg (32°) ; à Buluwayo (20° à 25°) ; à Cordoba (60°).

Dimanche matin, 22 mai. — Branche principale, extrêmement fine et délicate, observée à Johannesburg, par MM. Innes et Worssell. Ils revoient, en outre, la branche secondaire sud, beaucoup plus lumineuse que la branche principale. A partir du 22, la présence de la Lune empêche, pour plusieurs jours, toute observation dans le ciel du matin.

Queue tournée vers l'Est, visible au Mont Hamilton, après le coucher du Soleil. Longueur : de 20° à 30°.

Dimanche soir. — Queue dirigée vers l'Est, vue en différents endroits. A Uccle, j'ai pu l'observer, à l'œil nu, sur une longueur d'environ 2° ; la Lune et les brumes empêchaient d'en voir davantage.

Et maintenant, discutons brièvement ces observations et tâchons d'en tirer quelques conclusions.

Elles corroborent, tout d'abord, ce que j'ai affirmé plus haut concernant l'existence simultanée de plusieurs courants différents, constituant la queue de la comète.

Le courant principal, vu jusqu'au 22 mai dans le ciel du matin, est demeuré assez fortement en arrière du rayon vecteur Soleil-Comète. Sensiblement dans le plan de l'orbite cométaire et faisant avec l'écliptique un angle apparent de plusieurs degrés, il semblait, jusqu'au 21 mai, se déplacer lentement vers le Nord. Cette partie de la queue devait avoir une longueur réelle extraordinaire, dépassant de beaucoup la distance Comète-Terre, puisque, au matin du 21 mai, sa longueur apparente était d'au moins 150°.

Le courant secondaire sud, observé jusqu'au matin du 22 mai, et noté, depuis la veille, plus lumineux que le courant principal, était vraisemblablement en arrière de ce dernier ; quant au courant secondaire nord, le moins lumineux et le moins étendu, observé à Capetown le jeudi 19, et qui n'a plus été revu depuis à l'Est, l'on peut supposer qu'il occupait, par rapport au courant principal, une position réelle à peu près symétrique de la branche sud, c'est-à-dire en avant du courant central.

Enfin, d'autres courants, moins étendus encore, et moins « denses », se seraient trouvés détachés des masses compactes constituant les parties de la queue voisines de la chevelure. Et ce serait l'un de ces courants qui aurait donné lieu à la manifestation lumineuse faisant l'objet de cette communication ; il se serait trouvé en avant de la branche secondaire nord, dont il est question ci-dessus.

En résumé, *la queue de la comète aurait affecté,* « grosso modo », *la forme d'un système de deux cônes à section droite elliptique très aplatie, accolés par leurs bases, le cône opposé à la tête étant moins fourni et beaucoup plus long ; l'axe commun couché sensiblement dans le plan de l'orbite cométaire, en arrière du rayon vecteur ; le plan de la section méridienne la plus grande incliné d'une vingtaine de degrés sur le premier plan.*

Cette hypothèse explique d'une façon satisfaisante toutes les observations signalées plus haut, et, en particulier, le fait que les parties antérieures — et les moins « denses » — de la queue n'ont plus été revues dans le ciel de l'Est, après le 19 mai. Ces parties, en effet, auraient passé au nord de la Terre dans le courant de ce jour et se seraient trouvées le lendemain, en projection, presque entièrement entre la tête de l'astre et le Soleil.

Quant aux observations du vendredi soir, faites à Athènes (trace de queue vers l'Ouest) et en Afrique australe (queue vers l'Est), elles s'expliquent tout aussi bien. En effet, le soir du 20 mai, les courants antérieurs de la queue devaient se trouver en avant du rayon Comète-Terre, c'est-à-dire à l'est du noyau ; tandis que les branches restantes devaient se projeter suivant la droite Comète-Soleil, les parties comprises entre les deux astres demeurant complètement invisibles (sauf celles voisines de la tête ; et cela, non seulement le vendredi, mais également les jours suivants), à cause des lueurs crépusculaires et de la lumière zodiacale.

Enfin, *toutes les parties de la queue auraient passé successivement au nord de la Terre*, sans rencontrer celle-ci; leur ensemble devant ultérieurement affecter, dans le ciel du soir, à l'est de la comète et dans la direction opposée au Soleil, la forme d'une traînée lumineuse droite, de jour en jour plus large, avec des courants secondaires moins nombreux et moins nettement visibles, à cause du plus grand éloignement de la Terre et de la faible inclinaison du plan de l'écliptique sur le plan méridien principal de la queue. Aussi, ces courants ne paraîtront-ils plus distincts de l'ensemble que plusieurs jours après la conjonction de la comète, l'angle sous lequel nous verrons la section méridienne s'ouvrant graduellement, du moins pendant les premières semaines après le passage de la section à travers le plan de l'orbite terrestre (¹).

Il y aurait peut-être lieu, à ce propos, de tenir compte d'un mouvement de rotation, toujours possible, mais qui aurait été très peu prononcé, du plan de la section principale autour de son axe. Mais, pour trancher cette question, il faudrait des informations plus précises et des observations plus sûres, plus nombreuses et plus concordantes (²).

(¹) Voir, par exemple, Trans. Obs., 1910, Circ. nº 4, p. 26. Les photographies prises à Johannesburg révèlent l'existence de courants distincts à partir du 2 juin. Celles prises les 12, 25 et 29 juin, notamment, montrent au nord de la queue une branche secondaire parfaitement visible.

(²) Plusieurs astronomes admettent qu'une partie au moins de la queue a balayé la Terre. Citons, notamment, MM. Frost et Cerulli, donnant comme

Le R. P. Schaffers S. J., présente une *Deuxième note sur les Paratonnerres ;* en voici le texte :

On attribue généralement une grande importance à la bonne communication d'un paratonnerre avec le sol. Elle est même considérée fréquemment comme la condition essentielle d'une installation satisfaisante, et dans son contrôle périodique se résume toute la surveillance exercée sur la plupart des systèmes de protection contre la foudre. C'est une précaution bonne à prendre, sans doute, mais je crois qu'on aurait tort de trop s'y fier.

D'une lettre adressée à NATURE de Londres (n° du 21 juillet 1910), je traduis à peu près littéralement ce qui suit, en omettant quelques détails étrangers à mon point de vue.

Pendant un orage, M. R. W. Wood allait traverser son jardin, à Ean Hampton, Lostg-Island, quand la foudre tomba sur la pelouse à 50 pieds de lui. Il y eut une lueur très nette à la surface du sol, et une colonne de vapeur ou de fumée s'éleva à 6 ou 8 pieds de hauteur. L'examen du terrain fit découvrir deux trous, le premier d'un pouce environ (2,5 cm) de diamètre, l'autre peut-être quatre fois plus petit. Une assez grande quantité de soudure fut aussitôt fondue et versée dans le trou principal jusqu'à refus. En creusant alors avec précaution, on trouva d'abord, à plusieurs pouces au-dessous de la surface, un tube latéral joignant les deux trous, ensuite une ou deux branches latérales du tube principal dans lesquelles la soudure n'avait pas pénétré. Le moulage avait près de 4 pieds de long.

Il avait plu très fort pendant une heure ou davantage, et toute la semaine précédente avait été pluvieuse. L'excavation montra un terrain saturé d'eau, et M. Wood exprime sa surprise de ne pas

---

époque du passage, le matin du 19 mai ; MM. Wolf et Flammarion (soirée du 19) ; Hartmann (nuit du 19 au 20) ; Perrine (le 21).

D'après MM. Innes et Reeve (TR. OBS., CIRC. n° 3), il serait impossible à la Terre de traverser la queue d'une comète ; notre planète « briserait » les queues cométaires passant dans son voisinage immédiat. Ces observateurs n'ont peut-être pas complètement tort. Il semble assez naturel, en effet, d'attribuer à la Terre un rôle plus ou moins marqué dans des phénomènes de ce genre. Mais, pour nous, ce rôle s'est borné, en l'espèce, à une action assez peu sensible sur le plan de la section principale de la queue, dont il est question plus haut.

voir la décharge s'épanouir et se dissiper bien avant d'avoir atteint une profondeur de 4 pieds en terrain humide. Il est à remarquer, au surplus, que la photographie qui accompagne la lettre montre que la soudure n'a pas pénétré dans les ramifications fines de la fulgurite.

La production d'une nappe lumineuse à la surface du sol semble également remarquable à M. Wood, et il en suggère l'explication suivante : elle serait due à la combustion des gaz produits dans le sol par le passage de la décharge.

Je vois une autre explication. Puisque l'électricité du coup de foudre a rencontré une grande résistance dans le sol, une partie a pu se décharger sur la surface en nappe d'aigrettes ou de lueurs, comme il s'en produit souvent dans le passage de l'électricité à travers les gaz raréfiés ou non.

Au reste, cela importe peu ici. L'essentiel, c'est qu'une décharge sur un sol considéré comme bon conducteur parce qu'il était complètement imbibé d'eau, n'a pas pu s'y dissiper tout de suite, mais qu'elle l'a traversé comme un isolant, en le perforant. Il peut donc èn arriver autant, toute proportion gardée, aux conducteurs de paratonnerre considérés comme mis en bonne communication avec le sol humide au moyen de braise ou de plaques métalliques, et même sans doute par immersion dans un puits ou un étang.

C'est qu'après tout, l'eau est un très mauvais conducteur, et pour n'avoir entre le sol et le paratonnerre qu'une résistance réellement insignifiante, il faut que le contact ait lieu par l'intermédiaire d'une surface métallique considérable. A ce point de vue les conduites générales d'eau ou de gaz présenteraient seules assez de garanties. D'après Foussereau (¹), la résistance spécifique de l'eau des conduites parisiennes est de 2700 ohms, et les eaux de pluie récentes en ont sans doute une plus grande encore, parce qu'elles contiennent moins de sels. Or, celle du cuivre n'est que de 1,6 microhms, soit 1 $^1/_2$ milliard de fois moindre. Par conséquent, pour une surface de bon contact avec le sol humide 10 000 fois plus grande que la section d'un conducteur de paratonnerre, la résistance rencontrée par la décharge dans le sol

---

(¹) ANNALES DE CHIMIE ET DE PHYSIQUE, 6e série, t. V (1885), p. 339.

sera encore 150 000 fois plus grande que dans le conducteur pour la même longueur parcourue.

La théorie des paratonnerres se fait généralement par extension des conclusions tirées des expériences de laboratoire exécutées au moyen de conducteurs métalliques. C'est une méthode qu'il ne faut pas condamner, pour la bonne raison qu'on ne dispose pas d'une meilleure, mais dont on a souvent abusé en forçant les analogies. En réalité les éclairs ne se produisent pas entre de bons conducteurs.

Les nuages, d'abord, sont dans l'ensemble de très mauvais conducteurs, puisqu'ils sont constitués par de petites sphérules liquides, électrisées sans doute, mais séparées par des intervalles d'air. C'est donc une absurdité de dire, par exemple, comme on l'a fait longtemps, et Dieu veuille que cela ne se rencontre pas encore dans quelques ouvrages modernes, qu'un nuage peut s'électriser par influence comme un conducteur qui occuperait le même volume. Des savants plus avertis et même parfois très distingués me semblent commettre une erreur du même genre, quand je vois O. Lodge, par exemple, dans ses célèbres conférences, expliquer le *choc en retour* par l'analogie avec le *débordement* des bouteilles de Leyde. Cette explication est inadmissible, parce qu'elle suppose le nuage conducteur, ainsi que le sol.

Le sol, d'ailleurs, c'est-à-dire la surface du terrain, ne constitue pas le second conducteur ou la seconde armature du condensateur au sens ordinaire. Puisqu'il est mauvais conducteur, la charge ne se trouvera pas seulement à sa surface, mais elle sera répartie dans toute sa masse jusqu'à une certaine profondeur. De plus, il y aura peut-être une couche profonde plus conductrice que les parties voisines de la surface, et alors le sol tel qu'on l'entend d'ordinaire ferait plutôt partie du diélectrique du condensateur. Certains coups de foudre dans le voisinage d'un paratonnerre s'expliqueraient ainsi. En effet, on imaginerait aisément des circonstances où la résistance (ou la longueur) totale d'un chemin entre les nuages et le sous-sol conducteur serait moindre le long des murs ou de la toiture d'un bâtiment qu'en passant par le paratonnerre et son conducteur. D'ailleurs, les matériaux de construction, surtout mouillés par l'orage, ont des résistivités du même ordre que celle de l'eau non distillée. Les décharges *im-*

pulsives invoquées par Lodge dans des cas pareils sont bien invraisemblables. Par exemple, dit-il, deux nuages se trouvant l'un au-dessus de l'autre, le nuage supérieur se décharge sur le nuage inférieur et celui-ci d'un coup déborde vers la terre. Or, il s'agit de circonstances telles qu'un champ préalable entre le nuage inférieur et la terre n'ait pas pu préparer par induction le chemin de l'étincelle. Cela suppose des charges opposées et égales sur les deux nuages, et alors l'étincelle ne peut que les neutraliser.

Je suis d'ailleurs porté à croire que Lodge a exagéré la part de la self-induction, même dans les conducteurs métalliques des paratonnerres. Il est certain, par exemple, que pour les coups latéraux en général, l'explication est assez satisfaisante. Mais quand il s'agit d'éclairs qui prennent ou quittent le conducteur à mi-hauteur (ce sont les termes de Lodge), n'est-il pas permis de trouver que la self prend des valeurs bien extraordinaires ? A-t-on jamais rien obtenu de semblable dans aucune expérience? Pour moi, je pense que dans des cas pareils, le manque de conductibilité du terrain intervient en même temps que la self-induction. Celle-ci produit une ou plusieurs ondes de potentiel, mais la première, en vertu de la loi d'Ohm (la grande résistance du sol est incompatible avec les décharges oscillatoires), élève le potentiel de l'extrémité inférieure du conducteur et par suite le potentiel moyen autour duquel s'exécutent les oscillations dans le métal. Ainsi, les deux actions s'ajoutent, et arrivent à produire des effets que chacune d'elles serait incapable de produire isolément. Suivant les circonstances, l'une ou l'autre jouerait le rôle principal.

Au fond, alors, ce cas revient au précédent. La décharge suit le conducteur du paratonnerre sur une partie de sa longueur, parce que ce chemin, combiné avec le trajet semi-conducteur à travers les maçonneries, les planchers, etc., jusqu'au sous-sol vraiment bon conducteur, présente au total, pour une distance équivalente, une résistance moindre que le chemin passant par la longueur entière du conducteur métallique prolongé par l'épaisseur de terrain superficiel qui le sépare des couches profondes conductrices.

Il est probable qu'un bon nombre des bizarreries ou des *caprices* de la foudre se ramèneraient sans peine aux principes ordinaires de l'électricité expérimentale, si l'on ne perdait pas de vue la nature des électrodes entre lesquelles la décharge éclate : ce ne sont pas de bons conducteurs.

La conclusion pratique des considérations qui précédent me semble être que si l'on a raison de chercher à établir les meilleures terres possible, on ne peut guère se flatter d'y avoir réussi, même quand le galvanomètre accuse une faible résistance superficielle ; car cela ne nous renseigne pas sur la résistance qui peut exister entre la couche superficielle et la couche conductrice sous-jacente qui constitue la véritable armature du condensateur.

Il n'y a donc de sûr que le système qui permet de se passer au besoin de la communication avec le sol, celui de la cage de Faraday. Mais il faut que le principe de l'enveloppe conductrice soit appliqué intégralement, c'est-à-dire qu'il ne suffit pas que le toit et les façades latérales d'un bâtiment soient couverts d'un réseau conducteur : il faut encore que ce réseau ferme l'enveloppe sur la face horizontale inférieure, celle qui est en contact avec le sol. On complétera donc le paratonnerre Melsens par des fils couchés dans les fondations, ce qui se ferait sans augmentation de prix, grâce à la suppression des aigrettes de pointes, dont j'ai démontré l'inutilité (¹). Le béton armé, dont l'emploi s'étend si rapidement aujourd'hui, offre dans son armature métallique une enveloppe protectrice parfaite, et qui n'ajouterait rien au coût d'un bâtiment, sauf qu'il faudrait mettre des fers horizontaux sous le sol des caves et dans les massifs de fondation, qui n'en contiennent pas toujours. Seulement, il faudrait veiller à ce que tous les fers soient bien reliés entre eux : il suffirait d'ailleurs de les tordre ensemble, directement ou par l'intermédiaire de fils ordinaires. Il y aurait lieu aussi de faire une étude préalable des effets du passage de forts courants dans des fers encastrés dans le béton, de vérifier, par exemple, s'ils ne pourraient désagréger la masse par leur dilatation ou par un dégagement de gaz.

(¹) Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles, t. XXXI, octobre 1906.

Troisième section

Réunion extraordinaire au Musée colonial de Tervueren, le 25 juin 1910. — M. Maes, attaché au Musée et qui a bien voulu diriger cette visite, présente le rapport suivant sur l'organisation et les richesses du Musée du Congo belge.

Les collections exposées dans le *Musée du Congo belge* se répartissent en quatre sections :

1° Section des sciences économiques ;

2° Section des sciences morales et politiques, toutes deux spécialement réservées à M. de Haulleville, directeur du Musée ;

3° Section des sciences naturelles dirigée par M. Cosart, chef de section et M. Schouteden, chargé de l'entomologie ;

4° La section ethnographique dirigée par le Dr Maes.

La salle d'importation contient la plupart des objets importés au Congo par la Belgique avec leur prix de revient et les principaux débouchés en Afrique, trois maquettes représentant Léopoldville, Stanleyville et Matadi, la reproduction des différents types de bateaux et quatre statues évoquant les grandes périodes de la colonisation belge au cœur de l'Afrique.

Dans le pavillon d'angle est exposée la méthode moderne de l'exploitation de l'arbre à caoutchouc. Dans la galerie latérale sont exposés les beaux spécimens de bois du Congo ; on y remarque aussi les deux cartes murales, physique et économique, du Congo.

Les membres passent aux Salles d'exportation des produits du Congo vers la Belgique. Dans les vitrines murales sont les produits végétaux utiles, dans les vitrines du milieu on retrouve la mise en œuvre industrielle de l'ivoire, des produits animaux et minéraux.

Dans la salle des sciences morales et politiques destinée à réunir les objets ayant trait au développement intellectuel et moral de la colonie, se trouvent les maquettes de Boma, de la mission de Kisantu et de la mission de Baudouinville.

Dans les vitrines sont exposés les monnaies indigènes, des trophées des drapeaux pris aux Arabes et l'histoire figurée du développement des maladies tropicales communiquées par les insectes : œuvre magnifique et très instructive du R. P. Renard, S. J.

Les salles de marbre sont consacrées à l'exposition des collections ethnographiques du Musée. L'immense richesse de cette collection (30 000 objets) nous oblige à nous limiter à l'exposition d'une minime partie.

Dans l'une des ailes se trouvent les objets provenant du district de Stanleyville groupés par ordre idéologique, les objets des Abarambo, peuplade de l'Uelé et les objets des Bangala ; dans l'autre aile ont été groupés les objets provenant des tribus de la région centrale, c'est-à-dire du territoire compris entre la rive droite du Congo depuis l'embouchure du Kasaï jusqu'à Kasongo et limité au sud par le Kasaï, le Sankuru, le Lubefu et une ligne partant du Lubefu jusqu'à Kasongo.

Les principales tribus de la région sont les Bajanzi, les Wangata, les Mongo, les Bokele, les Bole, les Tapoke, les Lokela, les Ikela, les Kundu, les Wabuma et les Wamfumu.

Les objets sont groupés par ordre idéologique et représentent la vie indigène envisagée sous ses différents aspects.

Dans la galerie latérale nous admirons les deux superbes cartes murales, politique et historique du Congo belge, et les sculptures chryséléphatines des plus grands artistes belges.

Le pavillon d'angle est réservé exclusivement à l'exposition des anthropomorphes. Dans la vitrine centrale un groupe remarquable de deux gorilles provenant de la région du lac Kiou.

Dans la salle des mammifères sont exposées les espèces zoologiques les plus curieuses du Congo, on y remarque le fameux okapi, le rhinocéros blanc, une girafe, le porc noir de l'Ituri, une belle série de chimpanzés, des centaines d'antilopes, les carnassiers et les rongeurs.

Dans la salle des oiseaux nous remarquons des touracas, des coucous, des foliotocoles, une série d'échassiers et de rapaces, de nombreux palmipèdes, etc.

Dans la salle des mollusques, arthropodes, poissons, batraciens et reptiles, nous remarquons spécialement le groupe des crocodiles du Nil et la magnifique collection d'insectes.

Enfin dans la salle du sous-sol du Congo nous admirons les magnifiques collections géologiques, minéralogiques et paléontologiques de notre Congo et une vaste carte en relief du Congo belge due au prof. Cornet et au commis Tollen.

Réunion du jeudi 27 octobre 1910. — Pour satisfaire aux vues de la section et, permettre à tous les membres de la Société d'avoir sous les yeux, lors de la prochaine discussion de la question des sciences naturelles dans l'enseignement, le rapport de M. H. Lebrun, il est décidé que ce rapport sera publié, pour le moment, en brochure séparée, mais sera inséré ultérieurement dans les ANNALES de la Société scientifique, avec tous les détails de la discussion.

Conformément à l'avis des commissaires, M. Kaisin et M. le capit.-comm. Baron Greindl, le mémoire de M. le chanoine Bourgeat, *Le facies du Givétier,* prendra place dans la seconde partie des ANNALES.

Les deux mémoires présentés par M. l'abbé Claerhout A) *le Chelléen belge* et B) *l'habitation rurale en Flandre*, sont envoyés à l'examen respectif (A) de M. A. Renier et du R. P. Van den Gheyn, (B) du R. P. Van den Gheyn et de M. le Baron Gillès de Pélichy.

M. De Wildeman, dépose sur le bureau un exemplaire de son dernier travail : *Mission permanente d'Études scientifiques de la Cie de Kasaï*, édité par la Cie de Kasaï. Il donne à cette occasion quelques indications sur la Flore de la région et fait ressortir que tel que le territoire de la Cie est limité il appartient à deux des régions botaniques qui existent au Congo : 1° la zone et la forêt tropicale centrale et 2° la zone de la brousse méridionale. Ces deux zones ont été antérieurement délimitées par l'auteur.

M. De Wildeman montre également que la forêt qui existe vers le nord du Kasaï et le long de rivières sous forme de galeries, n'est, en bien des cas plus primitive ; ce n'est pas de la forêt vierge, c'est de la forêt secondaire, la forêt vierge à été détruite par les indigènes pour leur culture et actuellement encore la forêt secondaire disparaît par incendies.

M. De Wildeman, montre quelques photographies qui font voir les dégâts de la déforestation, creusement de vallées, arrachage des plantes et transport du sol lavé dans les régions basses où se forment de larges estuaires dans lesquels la navigation devient difficile.

M. De Wildeman insiste également sur les plantes vivrières et sur les grandes cultures : caféiers, cacaoyers, caoutchoutiers, qui ont été installées par la Compagnie.

La section vote l'insertion dans la seconde partie des ANNALES d'un mémoire de M. Albert Henry, sur la *Carte panoramique agricole de la Belgique.*

M. Fernand Meunier signale aux membres de la troisième section « *Un Bombylidae de l'ambre de la Baltique* » et fait à ce sujet les remarques suivantes :

Quelques familles de diptères, parmi lesquelles il faut citer les Asilidae, les Conopidae, les Cyrtidae et les Stratiomyidae ne s'observent que bien rarement dans le succin du Samland. En examinant des centaines et des centaines d'inclusions de mouches de l'ancienne collection Stantien et Becker, acquise par l'État Prussien et exposée au Musée Paléontologique de Königsberg, placée sous l'habile direction de M. le Prof. Tornquist, j'ai eu la bonne fortune de trouver une mouche de cette famille en assez bon état de conservation. Ce diptère a déjà été signalé par H. Loew, en 1850, qui s'est borné à le nommer Corsomyza crassirostris sans le décrire, même brièvement, ni le figurer. Les espèces du genre Corsomyza sont actuellement cantonnées dans le sud de l'Afrique. D'actives démarches faites à Posen et à Königsberg ne m'ont pas permis de retrouver le type de H. Loew (¹).

M. Fernand Meunier fait quelques remarques concernant *Les Diptères de l'ambre de la collection de l'Université de Königsberg et des principaux Musées européens.*

La collection de l'Université Albertus de Königsberg appartenait autrefois à la maison Stantien et Becker fondée en cette ville, en 1860, et dissoute en 1899. Actuellement, l'entreprise ambrifère est la propriété exclusive de l'État Prussien. Tout en s'occupant de l'industrie du succin cette firme eut l'intelligente idée de réunir, pendant plusieurs années, une remarquable collection d'insectes, d'Arachnides, de Collemboles et d'autres Arthropodes. Les matériaux de l'Université de Königsberg (Musée paléontologique) sont extraordinairement riches en individus, mais beaucoup d'inclusions sont de deuxième ou de troisième choix ; altérés ou inutilisables pour des déterminations très rigoureuses. Parmi les diptères

---

(¹) La collection du Musée Provincial de Königsberg ne le possède pas non plus.

examinés, je n'ai guère rencontré des formes bien curieuses. Il est vrai qu'on rencontre fréquemment les genres et espèces déjà signalés dans les monographies sur les articulés de cet ordre. Il est probable que l'étude des hyménoptères et des autres ordres, encore peu avancée, jusqu'à ce jour, permettra d'observer des formes inédites.

Donnons maintenant, à grands traits, l'esquisse des principales collections d'Arthropodes de l'ambre. Plusieurs des types signalés par Loew en 1850 (¹) et conservés au Musée Provincial de Königsberg sont chimiquement altérés n'ayant pas été enrobés entre des lamelles de verre. Les spécimens de la collection Sommerfeld sont en bon état de conservation ; ils sont cependant peu intéressants et ne renferment que des formes bien connues se classant parmi les Dolichopodidae, les Tipulidae, les Chironomidae, les Psychodidae et autres diptères, déjà décrits et figurés. La collection du Musée Provincial formée par Berendt, Duisburg et quelques autres naturalistes de la Baltique, a peu de valeur scientifique. Beaucoup de spécimens altérés par l'action de la lumière se prêtent difficilement à de longues recherches, le rembrunissement empêchant souvent d'étudier avec soin la délicate structure morphologique des types inclus.

Les matériaux du Musée Provincial de Dantzig sont plus curieux, les spécimens ayant été triés par feu Menge. Ils comprennent une belle série d'hyménoptères, dont un grand nombre d'espèces vraisemblablement nouvelles attendent un travailleur pour les décrire et les figurer. La collection Menge est riche en Proctotrypidae, Chalcididae et Ichneumonidae.

Dans les grands dépôts européens, on ne trouve guère de collections un peu remarquables d'insectes de l'ambre. Les Musées de Berlin, Dresde, Paris et autres n'ont que des matériaux extraordinairement fragmentaires n'offrant guère d'intérêt général.

Les documents les plus précieux pour le paléoentomologiste, comme les mieux taillés d'ailleurs pour l'examen minutieux au microscope, sont la propriété privée de M. le Prof. D^r R. Klebs de Königsberg. Les inclusions d'insectes de l'ambre de ce savant

---

(¹) Meunier F., Revision des diptères fossiles, types de Loew, MISCELLANEA ENTOMOLOGICA, 1909.

géologue sont non seulement uniques au monde par l'admirable conservation de leurs spécimens mais aussi par la richesse de types appartenant à toute la série des Arthropodes.

M. F. Meunier signale que pour la seule étude des Diptères il a utilisé plus de 15000 inclusions dont un très grand nombre font partie de la collection du Prof. Dr R. Klebs (1) et du Musée minier de l'ambre.

M. F. Meunier présente aussi aux membres de la section, une *Contribution* (2) *à la Faune Diptérologique des environs d'Anvers,* augmentée de quelques espèces des environs de Nessonvaux (Liége).

Depuis 1905 et 1908 (3), j'ai capturé une intéressante série de diptères dans la banlieue de la métropole anversoise.

Beaucoup de ces mouches se trouvent aussi aux environs de Bruxelles ou font partie de la Faune de la Hollande (4).

Les Bombylidae sont très rares aux environs d'Anvers. Quant aux Stratiomyidae, à part les genres Beris, Sargus et Chrysomyia ils sont très peu représentés.

MYCETOPHILIDAE.

Rymosia domestica, Meig.

1 ♂, Contich, 10 novembre. Sur la fenêtre de mon habitation.

CULICIDAE.

Corethra plumicornis, Fabr.

Plusieurs ♂ et ♀, Contich (casernes), au bord d'une mare, 28 avril.

CHIRONOMIDAE.

Chironomus rufipes, Linné.

Plusieurs ♂ et ♀ sur les herbes des remparts (Berchem). Fin mai.

---

(1) Le Service géologique Royal de Prusse possède aussi une belle série de mouches du succin.

(2) IIIe Partie.

(3) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, t. XXIX et XXXII.

(4) Voir Van der Wulp (F. M.) et De Meijere (J. C. H.), *Nieuwe Naamlijst van Nederlandsche Diptera,* 's Gravenhage, 1898.

Ceratopogon pulicaris, Linné.
1 ♀. Berchem (Rempart), 25 mai.

PSYCHODIDAE.

Pericoma nubila, Meigen.
Plusieurs ♀, Contich, 10 mai.
Pericoma ocellaris, Mg.
1 ♂, Contich, 15 mai.
Psychoda phalaeneïdes, Linné.
Plusieurs ♂ et ♀, Contich, mai. Aussi des environs de Bruxelles.

TIPULIDAE.

Symplecta stictica, Meigen.
3 ♂ et 1 ♀, Contich, 24 avril.
Chez deux individus ♂, la cellule discoïdale manque. C'est probablement une variété.
Tipula fenestrata, Schummel.
1 ♀, Anvers. Mon cabinet, 24 mai. Rare.
Gonomyia nubila, Meig.
1 ♂, Contich, 19 juin.
Dicranomyia (Limnobia) morio, Fabr.
Plusieurs ♂ à Contich au mois d'avril.
Empeda diluta, Zett.
Plusieurs ♂ et ♀ à Contich, octobre et avril.
Nota : Premier article des antennes cylindrique, long ; deuxième article ovoïde ; ces deux articles très saillants, le second beaucoup plus gros que les suivants qui sont ciliés et ornés de quelques très longs cils (3 à 4). Ces caractères ne sont pas signalés par les auteurs.
Dusyptera distincta, Egger.
2 ♂ à Contich. Fin avril. La taille semble un peu variable.

TABANIDAE.

Hexatoma pellucens, Fabr.
Une ♀ à Berchem sur un tronc d'arbre, 15 août. Une autre ♀ a été prise au Schootenhof (par M. Bastin d'Anvers).

En 1893, cette espèce était très commune dans une sapinière de Linkebeek (Brabant). Feu le Dr Jean Jacobs et moi nous en avons capturé plusieurs spécimens.

EMPIDAE.

Cyrtoma nigra, Meig.
1 ♀, Berchem, 22 mai.
Pachymeria femorata, Fabr.
Deux ♂ sur les herbes des forts, 25 mai.
Tachydromia compta, (Platypalpus) Walk.
1 ♀, Berchem.
Hemerodromia oratoria, Fall.
1 ♂. Rempart de Berchem, 18 mai.
Sciodromia immaculata, Hal.
1 ♀. Contich, 20 octobre.

SYRPHIDAE.

Didea intermedia, Loew.
1 ♀. Wyneghem. A la lisière d'une sapinière, 31 mai.
Syrphus lunulatus, Meig.
2 ♀. Berchem, 22 mai. Sur les fleurs des remparts.
Criorrhina asilica, Fall.
1 ♀ à Contich (Casernes). Capture de M. le Dr Picquet, médecin militaire. Cette espèce semble être rare aux environs d'Anvers.

STRATIOMYIDAE.

Oxycera pulchella, Meig.
1 ♂. Berchem, 27 mai. Sur les orties. A l'exception des Beris, Chrysomyia et Sargus les Stratiomyidae paraissent être rares aux environs de la métropole commerciale.

DOLICHOPODIDAE.

Rhaphium monotrichum, Loew.
Edeghem, 10 et 16 mai. Sur les orties, près d'un ruisseau.
Hydrophorus inaequalipes, Macq.
1 ♂. Edeghem, 4 mai. Sur une petite ornière de chemin.
Sybistroma nodicornis, Meigen (1).
Edeghem, 30 mai. Au bord d'un petit ruisseau.

---

(1) Déjà cité (IIe partie, ANNALES, t. XXXII, 1908).

Feu le Dr Jean Jacobs a capturé quelques spécimens de ce rare Dolichopodien aux environs de Bruxelles.

Anepsius flaviventris, Meigen.

Edeghem, 1 ♂, 15 juin ; capture de Louise Meunier.

Gymnopternus cupreus, Fall.

Plusieurs ♂ et ♀. Contich, Edeghem, Mortsel, Berchem. Fin juin et juillet.

Cette espèce se place dans la première division des formes décrites par Zetterstedt, à lamelles génitales noires.

PIPUNCULIDAE.

Ateleneura (Chalares) holosericea, Meigen.

1 ♂ sur les herbes d'un ruisseau, Edeghem, 28 juin.

TACHININAE.

Macquartia chalconata, Meig.

1 ♀. Wyneghem, 31 mai.

Cette espèce n'est pas citée par feu le Dr Jean Jacobs.

Ceromasia juvenilis, Mg.

2 ♀ sur les herbes des remparts, Berchem. Cette espèce est voisine de Ceromasia senilis, Meigen, prise aux environs de Bruxelles par feu le Dr Jean Jacobs.

ANTHOMYINAE.

Coenosia globuliventris, Zett. C. atra, Meigen.

5 ♀. Rempart de Berchem, 18 mai.

Hylemyia pullula, Zett.

1 ♀. Edeghem, 25 juillet. Aussi des environs de Bruxelles.

Acanthiptera inanis, Meigen.

Berchem 1 ♂. 17 juin, le long d'une haie.

Hydrophoria linogrisea, Meig.

1 ♂, 6 mai Contich.

Anomalie de l'aile droite : on voit une petite nervule transversale supplémentaire entre les nervures trois et quatre figurant un dessin pentagonal, comme c'est le cas chez les Mycetophilidae Sciophilinae du genre Tetragoneura.

SAPROMYZINAE.

Palloptera saltuum, Linné.
1 ♀ Edeghem, 28 juin.

CORDYLURINAE.

Norellia spinimana, Meig.
1 ♂ var c, Zett, (t. V, p. 2007), Edeghem 24 juillet.
Norellia flavicada, Meig.
♂ et ♀. Edeghem, 24 juillet. Ne semble pas être une commune espèce.

TETANOCERINAE.

Limnia obliterata, Mg.
1 ♀. Berchem, 25 septembre. Sur les broussailles. Capture de Louise Meunier.

TRYPETINAE.

Spilographa zoe, Meigen.
1 ♀. Edeghem le 9 mai.

GEOMYZINAE.

Leptomyza sordidella, Zett.
Plusieurs spécimens. Rempart de Berchem au commencement du mois de juin en fauchant sur les herbes.
Leptomyza gracilis, Fall.
Plusieurs ♂ et ♀. Edeghem 2 août, capture de Louise Meunier.

AGROMYZINAE.

Agromyza Schineri, Giraud.
1 ♂. Berchem, 25 mai, sur les herbes des prairies. Cette espèce est voisine de A. curvipalpis Zett.

PSILINAE.

Loxocera ichneumonea, Linné.
Abondant au mois de septembre sur les broussailles, Morsel, Edeghem, Contich. Aussi commun à Averbode.

OCHTHIPHILINAE.

Ochthiphila polystigma, Meigen.
1 ♀. Berchem (Rempart), 18 mai.
Ochthiphila aridella, Fallen.
1 ♂. Berchem (Rempart), 18 mai.

EPHYDRINAE.

Hyadina guttata. Fall.
1 ♀. Wyneghem, 5 août, sur les herbes.

BORBORINAE.

Limosina bifrons, Stenhammer.
2 ♀ et 1 ♂. Berchem, 25 mai.

HIPPOBOSCINAE.

Ornithomyia avicularia, Linné.
Edeghem 1 ♀, 25 juin. Sur le tronc d'un chêne, capture de Louise Meunier.

Espèces de Nessonvaux (Liège) (1).

Musca corvina, Fabr.
♂ et ♀.
Onesia gentilis, Meig.
1 ♀.
Actia (Roeselia) lamia, Meig.
1 ♀.
Nemoraea radicum, Fabr.
1 ♀.
Exorista libatrix, Meig.
1 ♀.
Meigenia majuscula, Rond.
3 ♂.
Mydaea pagana, Fabr.
1 ♀.
Hyetodesia pallida, Fabr.
1 ♀.

---

(1) Ces espèces ont été prises du 14 au 21 août.

Syritta pipiens, Linné.

Très commun partout en Belgique.

Polietes lardarius, Meign.

Plusieurs ♀.

Rhingia campestris, Meig.

Abondant au mois d'août dans tout le pays.

Arctophila mussitans, Fabr.

3 ♂. Sur Calluna vulgaris (20 août). Cette espèce a été prise une seule fois en Hollande. Jacobs l'a signalée de Verrewinkel (Brabant), aussi de Borchène (Liège).

Exorista (Parexorista) mitis, Mg.

1 ♀.

Clista gagatina, Meig.

1 ♀. Il existe encore beaucoup d'incertitude dans le classement de ces petits diptères.

M. F. Meunier donne aussi le relevé d'une « *Chasse aux Diptères en Campine* ». Cette liste sommaire permet de constater que la faune des insectes de cet ordre renferme bien des espèces intéressantes (1).

1. Sargus cuprarius, Meigen. Commun partout.
2. Tabanus fulvus, Linné.
♀. Testelt.
3. Eristalis intricarius, Scop.
♀. Averbode, dans les broussailles.
4. Helophilus pendulus, L.
♂ et ♀, commun. Averbode, Testelt, Sichem.
5. Helophilus floreus, L.
♂ et ♀. Commun.
6, Helophilus trivittatus, Fabr.
2 ♀. Averbode. Pas commun.
7. Xylota segnis, Linné.
2 ♀. Averbode.
8. Melanostoma mellina, L.
♂. et ♀. Très commun partout.
9. Eristalis horticola, Degeer.
1 ♀. Blauwberg. Rare.

---

(1) Les captures ont été faites du 1 au 15 septembre par un temps continuellement pluvieux.

10. Hilara flavipes, Meigen.
Plusieurs ♀. Averbode, commun.
11. Hybos culiciformis, Fabr.
Commun partout ♂ et ♀.
12. Hybos grossipes, Fabr.
♂ et ♀. Pas rare.
13. Dolichopus simplex, Meigen.
1 ♂. Abbaye d'Averbode.
14. Platypeza vittata, Zett.
1 ♀. Averbode, dans les broussailles. Capture de Louise Meunier.
15. Pipunculus sylvaticus, Meigen.
1 ♀. Testelt. Pas commun aux environs d'Anvers.
16. Conops 4 — fasciata, Degeer. 1 ♂. Averbode. Sur Calluna vulgaris.
17. Leptis tringaria, L.
♀. Un peu partout, Averbode, Sichem, Testelt, Blauwberg.
18. Leptis lineola, Mg.
Plusieurs ♀. Averbode, Sichem.
19. Cyrtoneura hortorum, Fall.
Commun, Averbode.
20. Cyrtoneura pascuorum, Mg.
1 ♀. Testelt.
21. Cyrtoneura stabulans, Fall.
1 ♀. Averbode.
22. Lucilia caesar, L.
Très commune espèce partout en Belgique.
23. Sarcophaga carnaria, Linné.
♂ et ♀. Partout en Campine.
24. Exorista libatrix, Meigen.
1 ♂. Averbode.
25. Siphona geniculata, Degeer.
Averbode, Testelt, Tongerloo, Westerloo; partout très commun.
26. Dexia rustica, Mg.
♂ et ♀. Dans les broussailles des bois. Averbode.
27, Morinia nana, Meigen.
2 ♂. Averbode. Pas rare.
28. Dexia canina, Fabr.
1 ♂. Averbode.

29. Dexia vacua, Fall.

♂ et ♀. Averbode, Blauwberg. Dans les taillis.

30. Aricia umbratica, Meigen (carbo Schiner).

1 ♀. A cause de la teinte métallique de l'abdomen, cette espèce est très caractéristique. Elle se trouve aussi aux environs de Bruxelles.

31. Aricia scutellaris, Fall.

1 ♀. Sichem.

32. Aricia pallida, Fabr.

1 ♀. Averbode (Abbaye).

33. Spilogaster vespertina, Fall.

1 ♂. Averbode. Cette espèce est commune aux environs de Bruxelles et de la banlieu anversoise.

34. Spilogaster pagana, Fall.

1 ♀. Testelt.

35. Spilogaster angelicae, Mg.

Plusieurs ♀. Averbode (Abbaye).

36. Spilogaster tincta, Zett (vemorana Rond).

1 ♂. Averbode.

37. Spilogaster impuncta, Fall.

1 ♀. Averbode.

38. Linnophora littorea, Fall. Zett. Rond.

1 ♀. Testelt.

39. Homalomyia floricola, Mg.

Plusieurs ♀. Averbode, Blauwberg.

40. Anthomyia antiqua, Meigen.

(Hylemyia eod Strobl, et Meade).

41. Oplogaster (Coenosia) mollicula F.

1 ♂. Sichem.

42. Limnophora didyma, Zett.

2 ♂. Averbode. Cette espèce n'est pas rare aux environs d'Anvers et de Bruxelles.

43. Coenosia geniculata, Zett.

1 ♂. Testelt.

44. Coenosia albicornis, Meigen.

1 ♀. Averbode.

45. Sepedon sphegeus, Fabr.

Plusieurs spécimens à Averbode, le long d'un ruisseau. Cette espèce est commune un peu partout mais par places seulement.

46. Helomyza affinis, Meigen.
Averbode, commune espèce.
47. Helomyza flava, Meigen.
Averbode, Sichem. Commune espèce.
48. Opomyza florum, Fabr.
Sichem, Averbode, Westerloo, Testelt. Commune espèce.
49. Opomyza germinationis, Linné.
Commun partout.
50. Hydrellia ranunculi, Loew.
2 ♀. Averbode.
51. Parydra aquila, Fall.
1 ♀. Averbode.
52. Limosina ochripes, Sterls.
1 ♂. Sichem.
53. Simulia reptans, Fabr.
Abondant à Averbode.
54. Ptychoptera albimana, Fabr.
Abondant partout en Campine.
55. Limnobia bifasciata. Schranck.

Une note du R. P. Navás, S. J., intitulée *Chrysopides* (Ins. Neur.) *nouveaux* ; et un mémoire de M. l'abbé Kieffer : *Nouveaux Bethylides et Dryinides exotiques du British Museum de Londres,* sont envoyés à l'examen de MM. F. Meunier et H. Lebrun.

Le R. P. Schmitz, S. J., entretient la section des *brèches du houiller ;* d'un *lieu dit marin sur la veine Petit-Buisson ;* d'un *banc de Sidérolithes* (Ormont), et d'un *nouveau Lepidophyllum.*

M. A. Renier fait la communication suivante : *Sur une graine qui paraît devoir être rapportée à* NEUROPTERIS SCHLEHANI, Stur.

Dans la préface de son célèbre mémoire *Zur Morphologie und Systematik der Culm- und Carbonfarne* (1), Stur émit pour la première fois l'opinion qu'un grand nombre de formes carbonifériennes connues sons les noms de *Neuropteris, Alethopteris, Odontopteris*, etc., ne pouvaient être rangées parmi les fougères, malgré les caractères filicoïdes de leurs frondes, parce qu'aucune d'entre elles n'avait été rencontrée à l'état fertile, malgré les actives et patientes recherches d'une pléiade de chercheurs. Stur réservait pour une publication future l'exposé de ses idées sur la position systématique de ces intéressants fossiles. Il ne lui a pas été donné, que je sache, de réaliser ce projet.

---

(1) SITZB. DER K. AKAD. D. WISSENCH. 1te Abt. Iuli Helft. Iahrgang 1883, p. 638.

L'avenir devait cependant donner pleinement raison au paléophytologue viennois. Il suffit de parcourir l'un des plus récents traités de botanique fossile, les *Studies* de M. Scott (¹), pour juger de l'importance acquise dès à présent par le groupe de Ptéridospermées, créé pour ces plantes à frondes filicoïdes, mais qui se reproduisaient par graines.

Ce n'est cependant que depuis sept ans que les recherches faites dans cette direction, sont entrées dans une phase décisive. Presque simultanément, MM. Oliver et Scott démontraient par l'étude d'échantillons à structure conservée, la dépendance d'une graine, *Lagenostoma Lomaxi* Williamson mnscrpt., à la fronde désignée sous le nom de *Lyginopteris Oldhamia* (Williamson), qui ne peut d'ailleurs être distinguée de la forme connue en empreintes sous le nom de *Sphenopteris Hœninghausi* Brongniart, et, d'autre part, M. R. Kidston établissait par des empreintes qu'une espèce des plus caractéristiques du Westphalien, *Neuropteris heterophylla* Brongniart, avait porté de véritables graines (²). Une série de nodules de sidérose recueillis au toit de la couche Thick Coal à Coseley, près de Dudley par M. H. W. Hughes, contenaient en effet des graines longues d'environ 3 cm., larges de 1 à 1,5 cm., oblongues, se rétrécissant progressivement vers le sommet en un bec micropylaire, et portant de nombreuses stries longitudinales, traces des bandes de sclérenchyme du péricarpe, en un mot répondant à la diagnose du genre *Rhabdocarpus,* et qui, en outre, montraient, encore attachées à leur pédicelle, des pinnules ou folioles présentant tous les caractères morphologiques de *Neuropteris heterophylla.*

(¹) D. H. Scott. *Studies in Fossil Botany*. Second Ed. 1909, II.

(²) R. Kindston. *On the Fructifications of Neuropteris heterophylla*, Brongniart. Phil. Trans. Royal Soc. London. B. Vol. 197, p. 1-5.

M. l'abbé Carpentier a confirmé cette découverte dans ses recherches *Sur quelques graines et microsporanges de Ptéridospermées trouvés dans le bassin houiller du Nord* (Comptes Rendus, 3 mai 1909).

Depuis lors, la preuve directe a été faite que d'autres espèces, notamment *Aneimites fertilis* D. White, et *Pecopteris Pluckeneti* Schlotheim. En outre, divers savants, parmi lesquels il faut mentionner en toute première ligne, notre éminent confrère M. C. Grand'Eury, ont mis en évidence l'association constante de certaines graines et de frondes stériles de *Callipteris, Odontopteris, Neuropteris, Linopteris, Alethopteris*, *Lonchopteris* et *Sphenopteris.*

Ce dernier mode de démonstration a évidemment une valeur moindre que la preuve directe fournie par l'observation de graines en connexion avec des débris de frondes stériles. Mais une étude attentive des conditions de gisement des végétaux fossiles du terrain houiller permet de reconnaître que c'est avec infiniment de raison que M. Grand'Eury y a eu recours en diverses circonstances. Il importe toutefois d'en faire un usage judicieux.

Si les débris de plantes ont subi un transport assez long, si les restes de plantes terrestres sont rares dans le banc de schiste étudié et encore, s'ils sont lacérés et incomplets, et surtout, s'ils se trouvent associés à de nombreux débris de coquillages marins, brachiopodes ou céphalopodes, il n'y a à priori aucune raison d'admettre que les divers débris de plantes contenus dans ce banc aient pu appartenir à la même espèce.

Au contraire, si le facies est marécageux, si la roche contient de nombreux restes de troncs, de rameaux, ou encore de grandes frondes et des pétioles des mêmes espèces, si, en un mot, on a l'impression d'un enfouissement sur place, on peut admettre qu'un organe isolé, dont on ignore les relations, a appartenu à l'une des espèces représentées et déjà connues. En multipliant les observations de ce genre, on peut en arriver à démontrer la constance d'association de l'organe considéré avec telle espèce connue.

C'est en me basant sur ce principe, que je crois pouvoir rapporter à *Neuropteris Schlehani* Stur, une graine analogue, presqu'identique même en apparence, à celle que M. Kidston a décrite en connexion avec des pinnules de *Neuropteris heterophylla.*

Cette graine est toujours fortement écrasée de forme oblongue, mais légèrement dissymétrique, elle mesure de 25 à 27 mm. de longueur et de 8 à 12 mm. de largeur. Dans certains échantillons, l'extrémité supérieure est déchiquetée quoique effilée et rappelle l'échantillon n° 3 figuré par M. Kidston (fig. 5 et 7). Dans un autre, qui montre assez vaguement l'empreinte de la coque, on constate l'amorce d'un bec micropylaire. Cette même graine montre que le péricarpe se prolonge vers le bas en un bord frangé qui n'est pas sans analogie avec celui des graines décrites par Brongniart sous le nom de *Polylophospermum* ([1]). Enfin la surface du péricarpe montre de nombreuses stries longitudinales, dont certaines, paraissant être au nombre de douze, sont légèrement accentuées.

J'ai trouvé cette graine dans le schiste du toit d'une veinette située à 5 m. sous la passée de veine considérée comme la trace de la couche Léopold au puits d'Appaumée des Houillères Unies de Charleroi. Ce toit contenait surtout de belles et nombreuses frondes de *Neuropteris Schlehani*, mais il renfermait en outre de petits débris de *Neuropteris* cf. *heterophylla*, et encore : *Palmatopteris geniculata* (Stur) ; *Sphenopteris* sp. ; *Mariopteris acuta* (Brongniart) ; *Pecopteris* cf. *aspera* Brongniart ; *Aphlebia* sp. ; *Alethopteris lonchitica* (Schlotheim) ; *Sphenophyllum cuneifolium* (Sternberg) ; *Calamites* sp. ; *Asterophyllites grandis* (Sternberg) ; *Sigillaria elegans* (Sternberg) ; *Lepidophyllum lanceolatum* Lindley et Hutton ; *Lepidophyllum* sp. ; *Lepidostrobus* sp. ; *Lepidophloios* sp. ; *Samaropsis* cf. *fluitoms* Dawson.

Les indications fournies par ce premier gîte étaient évidemment douteuses, vu la présence d'une espèce voisine de *Neuropteris heterophylla*.

Mais j'ai retrouvé cette même graine, et en grande abondance, dans le schiste du toit de la couche Dix Paumes au puits n° 12 des charbonnages de Marcinelle Nord dans une région de facies nettement marécageux où abonde *Neuropteris Schlehani*. Je n'y ai vu que peu d'autres fougères ou ptéridospermées, mais aucun *Neuropteris*.

Peut être y aurai-je l'occasion de recueillir la graine en connexion avec un débris de fronde stérile, et d'établir ainsi sans conteste son attribution à *Neuropteris Schlehani*.

([1]) A. Brongniart, *Études sur les graines fossiles trouvées à l'état silicifié dans le terrain houiller de St-Étienne*, Ann. Sciences Natur., 5e Série, Bot., tome 20, p. 256.

Neuropteris Schlehani étant connu partout en Belgique dans la zone inférieure du houiller productif, dont il est éminemment caractéristique, il y a lieu de s'attendre à ce que la même graine soit découverte dans d'autres gisements.

Il ressort de ce qui précède que cette graine présente de grandes analogies avec celle de *Neuropteris heterophylla*. C'est un indice confirmatif du bien fondé de la classification basée sur les caractères morphologiques des frondes stériles.

M. Proost fait une communication sur *la limace et les maladies contagieuses de l'homme et des animaux domestiques ;* en voici le résumé :

Les hygiénistes recommandent, avec raison, de ne pas manger des légumes crus en temps d'épidémie.

Il est certain que ces aliments servent de véhicules aux germes de plusieurs maladies parasitaires, peut-être même du choléra et de la fièvre typhoïde, dont les germes se transmettent si facilement par les excréments.

L'habitude d'arroser les légumes avec du purin provenant des fosses d'aisance n'est pas la seule cause de ces redoutables contaminations. Il existe un animal très nuisible aux cultures de tout genre qui, alors même que l'on prend toutes les précautions requises pour empêcher le contact de l'engrais avec les feuilles de la plante, amène et fait adhérer à leur surface les germes redoutés. *C'est la limace.*

On n'ignore pas dans nos campagnes que les amateurs de salade sont plus sujets que d'autres aux invasions des germes d'*ascarides lombricoïdes*. Or, j'ai constaté que la limace et particulièrement la *grosse limace rouge* qui recherche les matières fécales, transportait les germes de ce dégoûtant parasite sur les feuilles de laitue d'un jardin enclos d'une haie, que longeait un sentier malodorant.

La preuve, c'est que dès que l'on eut remplacé ladite haie par un mur, la contagion cessa. Il conviendrait de répéter ces observations et d'analyser le mucus des limaces contaminées. Mais le meilleur moyen consiste à détruire ces mollusques ou à empêcher leur passage par une barrière de chaux vive, de cendre ou de suie.

Je rappellerai à ce propos une curieuse observation que j'ai faite, il y a plus de trente ans à Andoye, chez M. le Baron de

Moreau et qui a été relatée dans une conférence que j'ai donnée à la Société Scientifique de Bruxelles en 1887 *(L'Analyse du sol par la plante*, voir la Revue). Un engrais cyanuré, incomplet (1) résidu de la fabrication du gaz de Namur, avait donné les années humides de bien meilleurs résultats sur les blés que les engrais complets recommandés par les agronomes dans les champs de *démonstration* que nous avions organisés *pour prouver la supériorité des engrais complets.*

La cause de ces résultats contradictoires, en apparence, était que les limaces, toujours abondantes les hivers humides, sont détruites par les cyanures. A ce point de vue, les nouveaux engrais azotés qui tirent leur azote de l'air et contiennent des cyanures ou des cyanates sont particulièrement recommandables.

Quatrième section

La quatrième section a visité, le 27 octobre, dans la matinée, les importantes installations des *Forges de la Providence*, à Marchienne-au-Pont, dans le but d'étudier de près les conditions hygiéniques du travail dans l'industrie métallurgique. On sait le rôle que joue, dans notre industrie nationale, ce vaste établissement qui a une filiale en Russie, et qui occupe, à Marchienne, une superficie de 65 hectares et emploie plus de 2000 ouvriers.

Le distingué Directeur gérant, M. Lacanne, avait bien voulu charger un de ses ingénieurs, aussi aimable que distingué, de nous montrer, par le menu, toutes les opérations si intéressantes des hauts-fourneaux et des laminoirs.

Nous avons eu, aussi, l'occasion de visiter l'infirmerie annexée aux établissements. Elle peut être considérée comme un modèle d'hospitalisation d'urgence ; elle est pourvue d'un outillage chirurgical des mieux conçus. M. le Dr Tenret, secondé par des religieuses expérimentées et dévouées, en a la direction.

---

(1) Cet engrais qui se vendait à moitié prix de l'engrais pour céréales avait été analysé à Gembloux par feu Peterman et déclaré *insuffisant* et *nuisible*.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

La séance s'ouvre à 2 heures et demie, dans la Salle des Fêtes du Collège du Sacré-Cœur, sous la présidence de M. Ern. Pasquier, professeur à l'Université de Louvain.

La parole est donnée à M. A. Witz, professeur aux Facultés Catholiques de Lille pour une conférence sur *Les moteurs de la métallurgie*.

Cette conférence est publiée dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 janvier 1911 sous ce titre : *Quelques pages de l'Histoire du Fer au XXI*^{e} *siècle.*

Le Président remercie et félicite le conférencier. Il remercie également le R. P. Devroye, recteur du Collège du Sacré-Cœur, pour l'aimable hospitalité accordée à la Société Scientifique, et déclare close la session de janvier 1910.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

SUR LA MÉTHODE DE L'APPROXIMATION MINIMUM

PAR

M. CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN

Professeur à l'Université de Louvain

1. Approximation minimum. — Considérons un système de n équations linéaires à m inconnues $(n > m)$:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + \cdots + l_1 u - m_1 = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots n) \end{cases}$$

Ce système est généralement incompatible. Nous lui substituons le suivant :

$$(2) \qquad \begin{cases} a_i x + b_i y + \cdots + l_i u - m_i = r_i \\ i = (1, 2, \ldots n) \end{cases}$$

où nous donnons aux quantités r_i le nom de *résidus*, et nous appelons, avec M. Goedseels (1), *approximation minimum* du système (1) la plus petite valeur qu'on puisse assigner au plus grand résidu du système (2), considéré en valeur absolue, pour que ce système (2) soit compatible.

---

(1) Théorie des erreurs d'observation par P. J. E. Goedseels ; Louvain, Charles Peeters et Paris, Gauthier-Villars, 1907. M. Goedseels a bien voulu mettre la

L'existence de cette approximation a été établie implicitement par le procédé de détermination exposé par M. Goedseels dans son livre. Il est du reste facile de voir que cette approximation minimum doit exister, car le plus grand résidu, abstraction faite du signe, est une quantité positive et a, par suite, une limite inférieure finie. Il est de plus une fonction continue des variables $x, y, \dots u$. Par conséquent, la limite inférieure est nécessairement atteinte pour un système au moins de valeurs finies des variables, car les valeurs infinies rendent infinis tous les résidus, $m - 1$ seulement pouvant être exceptés quand on suppose les déterminants (a, b, ... l) différents de zéro (¹).

Le problème ayant pour but le calcul de l'approximation minimum correspondant à un système (1) a été énoncé et résolu en 1799 par Laplace dans le n° 39 du Livre III de sa MÉCANIQUE CÉLESTE. Mais la méthode suivie dans cette résolution donne lieu à des calculs trop laborieux pour qu'on puisse en faire usage dans la pratique courante des sciences d'observation.

Six années après Laplace, en 1805, Legendre a posé le même problème, dans l'Appendice à ses NOUVELLES MÉTHODES POUR LA DÉTERMINATION DES ORBITES DES COMÈTES. Il y a constaté qu'il ne connaissait pas de méthode facile pour résoudre la question, et a proposé d'y substituer la méthode des moindres carrés.

La méthode dite de l'*approximation minimum* de M. Goedseels donne lieu à des calculs plus simples que ceux de Laplace, et mieux disposés pour les calculateurs. Mais ces calculs sont encore beaucoup trop longs dans la plupart des cas.

Nous allons donc reprendre la question, et exposer avec précision quelques théorèmes (²) qui peuvent faciliter, en pratique, la

---

rédaction de la présente Note en complet accord avec celle de l'ouvrage précédent. Nous le remercions à cette occasion des corrections que nous devons à son obligeance.

(¹) Si m résidus étaient infinis, la résolution des m équations correspondantes fournirait pour les inconnues des valeurs infinies.

(²) Notre théorème I a été énoncé par Laplace, mais sans démonstration. Les énoncés des théorèmes démontrés ici ont déjà été communiqués à la résolution d'un système d'équations (1) par la méthode de l'approximation minimum. Nous supposons qu'aucun des déterminants $(a, b, \dots l)$ n'est égal à zéro.

Le cas que nous écartons ainsi ne se présente jamais dans la pratique, mais il pourrait mettre en défaut les théorèmes que nous allons établir.

Théorème I.— *Les valeurs* X, Y, Z, ... *des inconnues, qui fournissent l'approximation minimum* M *du système* (1) *donnent au moins* (m + 1) *résidus égaux à* ± M.

Considérons, pour fixer les idées, des équations à deux inconnues, supposons, par impossible, que le premier ou les deux premiers résidus seulement atteignent M en valeur absolue, soit les deux premiers pour fixer les idées, et multiplions éventuellement par —1 les deux membres des équations où M aurait le signe —. Nous avons :

$$\begin{aligned} a_1X + b_1Y - m_1 &= M, \\ a_2X + b_2Y - m_2 &= M, \\ a_3X + b_3Y - m_3 &= R_3. \\ \dots\dots\dots&\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Le déterminant (a_1b_2) n'étant pas nul par hypothèse, X et Y sont fonctions continues de M en vertu des deux premières équations.

Si nous diminuons M d'une quantité quelconque h, le résidu R_3 et les suivants subissent des accroissements proportionnels à la quantité h. Comme tous ces résidus sont, par hypothèse, inférieurs à M en valeur absolue, nous pouvons choisir h assez petit pour qu'ils le restent malgré leurs accroissements.

Puisque les deux premiers résidus ont été abaissés en dessous de la quantité M, cette dernière ne serait pas l'approximation minimum.

L'hypothèse est donc absurde et, par suite, les valeurs X, Y, Z, ... des inconnues qui fournissent l'approximation minimum rendent $(m + 1)$ résidus au moins égaux à ± M.

Société scientifique dans la séance du 20 avril 1908. Annales, t. XXX, 1re partie, p. 173.

Remarque. — *Si les coefficients d'une même inconnue* x *ont le même signe, positif par exemple, dans toutes les équations et qu'on substitue les valeurs* X, Y, Z ... *qui fournissent l'approximation minimum, les résidus atteignant* M *ne seront pas tous de même signe.*

En effet, si tous ces résidus étaient par exemple positifs, en diminuant très peu x, on abaisserait les résidus égaux à M sans élever jusqu'à M ceux qui sont plus petits. Donc M surpasserait l'approximation minimum.

Cette simple remarque est souvent utile en pratique.

Problème. — *On donne* (m + 1) *équations linéaires à* m *inconnues, par exemple 4 équations à 3 inconnues :*

$$a_i x + b_i y + c_i z - m_i = r_i.$$

On demande : 1° de trouver l'approximation minimum M, *et les valeurs* X, Y, Z *des inconnues qui fournissent cette approximation, 2° de démontrer que cette approximation* M *est une fonction continue des coefficients des équations, et que la valeur correspondante de chaque inconnue, par exemple de* X, *est une moyenne entre toutes les valeurs qu'on obtient pour* X *en combinant les équations données* m à m, *de toutes les manières possibles, après avoir annulé tous les résidus.*

1° Désignons par u_1, u_2, u_3, u_4 des unités positives ou négatives à déterminer. Nous avons, en vertu du théorème précédent,

$$a_i X + b_i Y + c_i Z - m_i = - u_i M,$$
$$(i = 1, 2, 3, 4).$$

Ce système peut être résolu par rapport à X, Y, Z, M.

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & m_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & m_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & m_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & m_4 \end{vmatrix}$$

et soient M_1, M_2, M_3, M_4, A_1, A_2, A_3, A_4 les mineurs relatifs à m_1, m_2, m_3, m_4, a_1, a_2, a_3, a_4.

Nous aurons :

$$M = \frac{\Delta}{u_1M_1 + u_2M_2 + u_3M_3 + u_4M_4},$$

$$X = \frac{u_1A_1 + u_2A_2 + u_3A_3 + u_4A_4}{u_1M_1 + u_2M_2 + u_3M_3 + u_4M_4}$$

et des valeurs analogues pour Y, Z,...

Pour que M ait la plus petite valeur positive possible, il faut et il suffit qu'on donne respectivement aux unités u_1, u_2, u_3, u_4 des signes tels que u_1M_1, u_2M_2, u_3M_3, u_4M_4 aient le signe de Δ. On a, alors

$$M = \frac{|\Delta|}{|M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4|}.$$

2° On voit, par la valeur de M ci-dessus, que cette quantité est une fonction continue des coefficients des équations.

D'autre part, les fractions $\frac{u_1A_1}{u_1M_1}$, $\frac{u_2A_2}{u_2M_2}$, $\frac{u_3A_3}{u_3M_3}$, $\frac{u_4A_4}{u_4M_4}$ sont les solutions que l'on obtient pour x en combinant les équations données 3 à 3 de toutes les manières possibles, après avoir annulé tous les résidus ; les dénominateurs de ces fractions ont le même signe, celui de Δ.

Par conséquent, en vertu d'une propriété connue des fractions, la valeur X est une moyenne entre les diverses solutions prémentionnées.

Il y a encore lieu de remarquer que le système de valeurs des inconnues fournissant l'approximation minimum est unique.

Théorème II. — *Si le nombre* n *des équations surpasse le nombre* m *des inconnues de plus d'une unité, l'approximation minimum* M *de l'ensemble des équations est égale à l'approximation minimum correspondant à un des groupes formés en combinant les* n *équations proposées, prises* (m + 1) *à* (m + 1) *de toutes les manières possibles.*

Ce groupe détermine les valeurs des inconnues fournissant l'approximation minimum, ce qui prouve que ces valeurs ne peuvent se déterminer que d'une seule manière.

Deux cas sont à distinguer :

Premier cas. — Les solutions x, y..., fournissant l'approximation minimum M ne forment que $(m+1)$ résidus atteignant M.

Considérons, pour fixer les idées, un système à deux inconnues :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} a_i x + b_i y - m_i = 0, \\ \quad i = (1, 2, \cdots n) \end{array} \right.$$

Plaçons en tête les trois équations pour lesquelles le résidu atteint M. Désignons par M′ l'approximation minimum de ces trois équations, et par X′, Y′ les valeurs de x et y qui fournissent trois résidus égaux à M′.

On a nécessairement un des trois cas

$$\begin{gathered} M < M', \\ M > M', \\ M = M'. \end{gathered}$$

Puisque M′ est l'approximation minimum des trois premières équations, il est impossible de donner aux inconnues des valeurs telles que les trois premiers résidus soient inférieurs à une quantité M moindre que M′. Le premier cas ne peut donc pas se présenter.

Supposons que le second soit possible, et posons :

$$\begin{gathered} x = X + (X' - X)t, \\ y = Y + (Y' - Y)t. \end{gathered}$$

Par cette substitution, les expressions $(a_i x + b_i y - m_i)$ deviennent des fonctions linéaires de t.

Si l'on fait varier t de 0 à 1, les trois premières décroissent, en valeur absolue, de M à M′.

Parmi les suivantes, il peut s'en trouver qui croissent. Mais, comme elles sont numériquement inférieures à M pour $t = 0$, par hypothèse, elles le sont pour des valeurs suffisamment petites de t.

On pourrait donc donner à t des valeurs telles que *tous* les résidus seraient numériquement inférieurs à l'approximation minimum M, ce qui est absurde.

Le second cas, $M > M'$, ne peut donc pas se présenter, et l'on a nécessairement $M = M'$.

Deuxième cas. — Les solutions X, Y,... forment plus de $(m+1)$ résidus atteignant M.

Considérons, par exemple, un système :

$$\text{(I)} \left\{ \begin{array}{c} a_i x + b_i y - m_i = 0, \\ (i = 1, 2, \cdots n), \end{array} \right.$$

dans lequel l'approximation minimum M est atteinte pour plus de trois $(m+1)$ équations, et plaçons ces équations en tête de la série.

Si nous remplaçons x et y par les valeurs X et Y fournissant l'approximation minimum, les seconds membres r_i d'un certain nombres des équations mises en tête,

$$a_i x + b_i y - m_i = r_i,$$

prennent la valeur ± M.

En éliminant X, Y et M entre les quatre premières, il vient

$$\text{(R)} \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & m_1, & \pm 1 \\ a_2, & b_2, & m_2, & \pm 1 \\ a_3, & b_3, & m_3, & \pm 1 \\ a_4, & b_4, & m_4, & \pm 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En opérant éventuellement de la même manière sur les autres groupes de quatre équations dont le second membre vaut ± M, nous obtenons d'autres relations du même genre.

Par conséquent, pour que l'approximation M soit atteinte par plus de $(m+1)$ résidus, il faut que les quantités a_i, b_i, m_i annulent au moins un déterminant de la forme (R).

Remarquons que l'on peut toujours former un système

$$\text{(II)} \left\{ \begin{array}{c} \alpha_i x + \beta_i y - \mu_i = 0 \\ (i = 1, 2, \cdots n) \end{array} \right.$$

pour lequel aucun déterminant de la forme (R) n'est égal à zéro.

En effet, on peut évidemment former quatre équations pour lesquelles le déterminant (R) n'est pas nul. Il suffit pour cela, par exemple, d'annuler a, b, m, sauf sur la diagonale.

Supposons qu'on en ait déjà formé k satisfaisant à cette condition. Nous allons montrer qu'on peut toujours en ajouter une nouvelle

$$\alpha x + \beta y - \mu = 0$$

satisfaisant encore à cette condition.

Les nouveaux déterminants sont des fonctions linéaires de α, β, μ, de la forme :

$$A\alpha + B\beta + C\mu + D,$$

où A, B, C, D sont les mineurs relatifs à une ligne d'un des déterminants (R) formés antérieurement, et ne sont donc pas tous nuls, puisque ce déterminant ne l'est pas. Donc on peut toujours choisir α, β, μ de manière que ces fonctions linéaires, qui sont en nombre limité, ne s'annulent pas.

Cela étant, on peut toujours de proche en proche choisir les α, β, et μ de manière qu'aucun déterminant (R) ne s'annule pour le système (II).

Ayant ainsi construit un système (II) formons un système (III) en soustrayant de (I) le produit de (II) par une quantité arbitraire ϵ. Nous obtenons ainsi :

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} (a_i - \epsilon\alpha_i)x + (b_i - \epsilon\beta_i)y - (m_i - \epsilon\mu_i) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots n). \end{cases}$$

Pour (III), les déterminants (R) sont de la forme de l'un d'eux, Δ, écrit ci-dessous :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - \epsilon\alpha_1, & b_1 - \epsilon\beta_1, & m_1 - \epsilon\mu_1, & \pm 1 \\ a_2 - \epsilon\alpha_2, & b_2 - \epsilon\beta_2, & m_2 - \epsilon\mu_2, & \pm 1 \\ a_3 - \epsilon\alpha_3, & b_3 - \epsilon\beta_3, & m_3 - \epsilon\mu_3, & \pm 1 \\ a_4 - \epsilon\alpha_4, & b_4 - \epsilon\beta_4, & m_4 - \epsilon\mu_4, & \pm 1 \end{vmatrix}$$

Ils sont du 3e degré en ϵ, et le coefficient du ϵ^3 est précisément un des déterminants (R) du système (II) qui ne s'annule pas, par hypothèse.

Il n'y a donc que trois valeurs de ϵ qui puissent annuler le déterminant Δ. Donc, il n'y a qu'un nombre limité de valeurs ϵ qui puissent annuler les déterminants (R) du système (III). *Nous conviendrons de ne pas donner ces valeurs à* ϵ.

Par hypothèse, tous les déterminants (a, b) du système (1) sont différents de zéro. Il en sera de même pour les déterminants correspondants $(a - \epsilon\alpha, b - \epsilon\beta)$ du système (III), à condition d'éviter les valeurs de ϵ, en nombre limité, qui satisfont aux équations du second degré

$$(a - \epsilon\alpha, b - \epsilon\beta) = 0,$$

et celles-ci ne sont pas identiques, car le terme indépendant de ϵ est le déterminant (a, b) supposé différent de zéro. *Nous conviendrons donc aussi de ne pas donner ces valeurs à* ϵ.

Le système (III) rentre maintenant dans le premier cas traité plus haut, et son approximation minimum est celle d'une combinaison de trois équations du système.

Donnons à ϵ une suite de valeurs,

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots \epsilon_s, \ldots$$

tendant vers zéro. A chacune d'elles correspond une combinaison de trois équations du système (III) fournissant l'approximation minimum. Puisque le nombre des combinaisons des équations trois à trois est limité, et que le nombre des valeurs de ϵ ne l'est pas, il y a au moins une combinaison de trois équations du système III fournissant l'approximation minimum qui se répète une nombre illimité de fois.

Supposons que la combinaison des trois premières équations soit dans ce cas, et ne conservons dans la suite des valeurs de ϵ que les valeurs correspondant à cette combinaison.

Soit M_s l'approximation minimum correspondant à ϵ_s, et X_s et Y_s les valeurs correspondantes de X et Y.

On a, pour les valeurs 1, 2, 3 de i :

$$(a_i - \epsilon_s\alpha_i)X_s + (b_i - \epsilon_s\beta_i)Y_s - (m_i - \epsilon_s\mu_i) = M_s,$$

tandis que pour les valeurs de i supérieures à 3, on a :

$$(a_i - \epsilon_s\alpha_i)X_s + (b_i - \epsilon\beta_i)Y_s - (m_i - \epsilon\mu_i) < M_s.$$

Faisons tendre ϵ_s vers zéro. En vertu du principe démontré dans la résolution du problème traité plus haut, X_s, Y_s et M_s tendent vers les valeurs X, Y, M correspondant à l'approximation minimum des trois premières équations (1).

On en conclut, puisque le système (III) dûment corrigé par l'introduction des résidus, peut être mis sous la forme :

$$a_i x + b_i y - m_i = r_i + \epsilon_s (\alpha_i x + \beta_i y - \mu_i)$$

qu'il est possible, étant donnée une quantité quelconque M' supérieure à M, de prendre des valeurs de x, y et ϵ_s telles que les seconds membres ci-dessus soient tous inférieurs en valeur absolue à M', et, par suite qu'aucune quantité $M' > M$ ne saurait être l'approximation minimum des équations (1).

Cette approximation, pour l'ensemble des équations, ne saurait être inférieure à l'approximation minimum M des trois premières.

Par conséquent l'approximation minimum de l'ensemble est nécessairement égale à M, qui est l'approximation minimum d'une combinaison de trois équations.

THÉORÈME. — *L'approximation minimum* M *d'une série de* n *équations linéaires à* m *inconnues :*

$$(1) \qquad \begin{cases} a_i x + b_i y \cdots - m_i = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots n) \end{cases}$$

est égale à la plus grande approximation minimum M_1, M_2, ... *correspondant aux divers groupes que l'on peut former en prenant les équations* (1) m + 1 *à* m + 1.

En effet, l'approximation minimum M de l'ensemble ne peut être évidemment inférieure à une des approximations M_1, M_2... Comme elle est égale à une de ces dernières, en vertu du théorème précédent, elle est nécessairement égale à la plus grande.

RÉSOLUTION DU SYSTÈME. — Le théorème III fournit un procédé systématique pour la résolution d'un système, par exemple d'un système à deux inconnues

$$(1) \qquad \begin{cases} a_i x + b_i y - m_i = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots n) \end{cases}$$

par la méthode de l'approximation minimum.

En effet, on combine les équations trois à trois de toutes les manières possibles et on détermine, par les formules du théorème II l'approximation minimum de chaque groupe. La combinaison pour lequel cette approximation aura la plus grande valeur fournira la solution de tout le système.

Mais on évitera *pratiquement* la résolution de toutes les combinaisons, en procédant de l'une des manières suivantes :

PREMIER PROCÉDÉ. — Après avoir déterminé les valeurs de X, Y, M, qui correspondent à une première combinaison de trois équations, on portera les valeurs trouvées de x, y dans toutes les autres combinaisons. Si tous les résidus sont $=$ ou $<$ M, le problème est résolu. Dans le cas contraire, on ne doit plus s'occuper que des *combinaisons* qui auront fourni au moins un résidu $>$ M.

D'ailleurs cette élimination se fait par de simples calculs d'approximation et, en pratique, on arrive généralement à la solution après quelques tâtonnements.

Voici un autre procédé plus systématique que le précédent et qui a l'avantage d'éviter la considération de *toutes les combinaisons à la fois,* ce qui peut occasionner des confusions et des méprises.

SECOND PROCÉDÉ. — On détermine les valeurs X, Y, M qui correspondent à une première combinaison de trois équations, par exemple la combinaison (123) des trois premières. On substitue successivement les valeurs X, Y dans les autres équations jusqu'à ce qu'on trouve un résidu de valeur absolue $>$ M. Si on n'en trouvait pas, le problème serait résolu.

Supposons que l'équation (4) donne un résidu $>$ M ; alors il est certain que l'une des trois combinaisons (123), (143), (124) obtenues en remplaçant successivement par (4) chacune des équations de (123) donnera une approximation minimum $>$ M (¹).

On détermine donc les approximations minima de (123) et éventuellement de (143) et (124) jusqu'à ce qu'on trouve une approximation M′ $>$ M. Soient X′, Y′ les valeurs correspondantes de X, Y et (123) le système y relatif.

(¹) En effet, l'approximation du groupe (1234) est $>$ M : comme ce n'est pas celle du groupe (123), c'est celle d'un des trois autres.

On substitue successivement ces valeurs dans les autres équations (1), (5), (6) ... jusqu'à ce qu'on trouve un résidu $> M'$. Si on n'en trouvait pas le problème serait résolu.

Supposons que l'équation (5) donne un résidu $> M'$. Alors il est certain que l'une des combinaisons (523), (453), (425) a une approximation minimum $> M'$. On détermine donc les approximations minima de (523) et au besoin de (453), (425) jusqu'à ce qu'on trouve une approximation minimum $M'' > M'$. Supposons qu'elle corresponde au groupe (523) et soient X'', Y'' les valeurs correspondantes des variables.

On substitue ces valeurs dans les autres équations (1), (4), (6) ... jusqu'à ce qu'on trouve un résidu $> M''$, si on n'en trouvait pas le problème résolu.

Sinon, supposons que (6) donne un résidu $> M''$. Alors il est certain que l'un des groupes (623), (563), (526) possède une approximation minimum $> M''$. On détermine l'un de ces groupes comme ci-dessus, et l'on procède de la même manière jusqu'à ce qu'on parvienne à la solution cherchée.

On y arrivera nécessairement, car les nombres M, M', M'' .., sont croissants, donc correspondent à des combinaisons différentes et il n'y a qu'un nombre limité de combinaisons.

CHOIX DE LA PREMIÈRE COMBINAISON. — Le succès plus ou moins rapide de la méthode dépend du choix de la combinaison prise comme point de départ. Il faut trouver une combinaison dont l'approximation minimum soit aussi grande que possible. A ce point de vue, quelques tâtonnements habiles valent mieux que les règles générales. Cependant, faute de mieux, on peut suivre la règle suivante. On écrit les équations de manière que les coefficients d'une des inconnues aient le même signe. On substitue dans les équations des valeurs approchées des inconnues donnant des résidus non tous de même signe. On choisit comme point de départ, le groupe d'équations ayant donné les plus grands résidus non de même signe. A priori, c'est le groupe qui paraît avoir le plus de chances de fournir une approximation minimum élevée (¹).

(¹) A ce point de vue, on se rappellera la remarque qui suit le théorème I.

Nous allons appliquer ceci à deux exemples traités par M. Goedseels.

Premier exemple (¹). — Soit le système de huit équations :

$$\begin{aligned}
0{,}4424\,h + 0{,}0296\,k &= +\,00{,}0\\
0{,}3864\,h + 0{,}0512\,k &= -\,46{,}9\\
0{,}0263\,h + 0{,}0001\,k &= +\,38{,}6\\
0{,}0267\,h + 0{,}0005\,k &= -\,30{,}2\\
0{,}0352\,h - 0{,}0020\,k &= +\,60{,}9\\
0{,}4135\,h - 0{,}3361\,k &= -\,67{,}4\\
0{,}0540\,h - 0{,}0543\,k &= +\,09.5\\
0{,}0802\,h - 0{,}0668\,k &= -\,07{,}3
\end{aligned}$$

L'approximation minimum du système est celle de la combinaison des équations (2), (5) et (6), savoir :

$$\begin{aligned}
0{,}3864\,h - 0{,}0512\,k &= -\,46{,}9,\\
0{,}0352\,h - 0{,}0020\,k &= +\,60{,}9,\\
0{,}4135\,h - 0{,}3361\,k &= -\,67{,}4.
\end{aligned}$$

Il est d'ailleurs naturel d'essayer cette combinaison pour commencer puisque c'est celle qui fournit les trois plus grands résidus non de même signe pour $h = k = 0$. On a ici, d'après les formules générales

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}3864 & -0{,}0512 & 46{,}9 \\ 0{,}0352 & -0{,}0020 & -60{,}9 \\ 0{,}4135 & -0{,}3361 & 67{,}4 \end{vmatrix} = 46\,M_1 - 60{,}9\,M_2 + 67{,}4\,M_3,$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} 0{,}0352 & -0{,}0020 \\ 0{,}4135 & -0{,}3361 \end{vmatrix} = -\,0{,}01100,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0{,}4135 & -0{,}3361 \\ 0{,}3864 & -0{,}0512 \end{vmatrix} = \quad 0{,}10870,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 0{,}3864 & -0{,}0512 \\ 0{,}0352 & -0{,}0020 \end{vmatrix} = \quad 0{,}00103,$$

(¹) Théorie des erreurs d'observation, p. 10.

Donc $\Delta = 706631$, est positif et u_1, u_2, u_3 ont le signe de M_1, M_2, M_3 respectivement. Il vient

$$u_1 = -1, \quad u_2 = +1, \quad u_3 = +1\,;$$

$$M = \frac{|\Delta|}{|M_1| + |M_2| + |M_3|} = \frac{706631}{12073} = 58,53.$$

On obtient alors h et k en résolvant deux équations du système complété

$$\begin{aligned}
0,3864\,h - 0,0512\,k &= -46,9 + 58,5 = \quad 11,6,\\
0,0352\,h - 0,0020\,k &= \quad 60,9 - 58,5 = \quad 2,4,\\
0,4132\,h - 0,3361\,k &= -97,4 = 58,5 = -125,9,
\end{aligned}$$

par exemple les deux premières. Il vient ainsi

$$h = 96,7 \qquad\qquad k = 502.$$

Si on substitue ces valeurs dans les cinq autres équations du système proposé, on voit, à première vue, que les résidus seront < 58 sauf pour la première équation. Pour celle-ci, il faut le calculer. On trouve que ce résidu est égal à 57,7.

La solution cherchée est donc

$$k = 96,7, \;\; h = 502, \qquad M = 58,53.$$

Deuxième exemple. — Considérons les neuf équations

$$\begin{aligned}
y + 0,96884\,x &= 5,13\\
y + 0,74925\,x &= 3,97\\
y + 0,42552\,x &= 2,24\\
y + 0,09481\,x &= 0,56\\
y + 0,00005\,x &= 0,19\\
y + 0,15163\,x &= 0,77\\
y + 0,32735\,x &= 1,70\\
y + 0,68488\,x &= 3,62\\
y + 0,79295\,x &= 4,23
\end{aligned}$$

Nous allons vérifier que l'approximation minimum est celle du système (1), (5), (6) à savoir

$$
\begin{aligned}
y + 0{,}96884\,x &= 5{,}13,\\
y + 0{,}00005\,x &= 0{,}19,\\
y + 0{,}15163\,x &= 0{,}77.
\end{aligned}
$$

On serait conduit à cette combinaison en substituant les valeurs approchées $y = 0{,}1$ et $x = 5$ des inconnues et en appliquant la règle que nous avons énoncée pour le choix de la première combinaison.

On a ici, avec les notations antérieures,

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 0{,}00005 \\ 1 & 0{,}15163 \end{vmatrix} = +\,0{,}15158,\\
M_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0{,}15163 \\ 1 & 0{,}96884 \end{vmatrix} = +\,0{,}81721,\\
M_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 0{,}96884 \\ 1 & 0{,}00005 \end{vmatrix} = -\,0{,}96879\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 5{,}13\,M_1 + 0{,}19\,M_2 - 0{,}77\,M_3\\
&= 0{,}780 + 0{,}155 - 0{,}746 = +\,0{,}189.
\end{aligned}
$$

Donc

$$u_1 = +\,1,\ u_2 = +\,1 \text{ et } u_3 = -\,1.$$

On a

$$M = \frac{\Delta}{M_1 + M_2 - M_3} = \frac{0{,}189}{1{,}938} = 0{,}097.$$

Le système rendu compatible devient

$$
\begin{aligned}
y + 0{,}96884\,x &= 5{,}13 - 0{,}097 = 5{,}033,\\
y + 0{,}00005\,x &= 0{,}19 - 0{,}097 = 0{,}093,\\
y + 0{,}15163\,x &= 0{,}77 + 0{,}097 = 0{,}867.
\end{aligned}
$$

La seconde donne immédiatement y en négligeant le terme en x, d'où

$$
\left\{
\begin{aligned}
y &= 0{,}093\ldots\\
x &= 5{,}103\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on porte ces valeurs dans les autres équations, on trouve des résidus $< M$ (1). La solution est donc la précédente avec l'approximation minimum

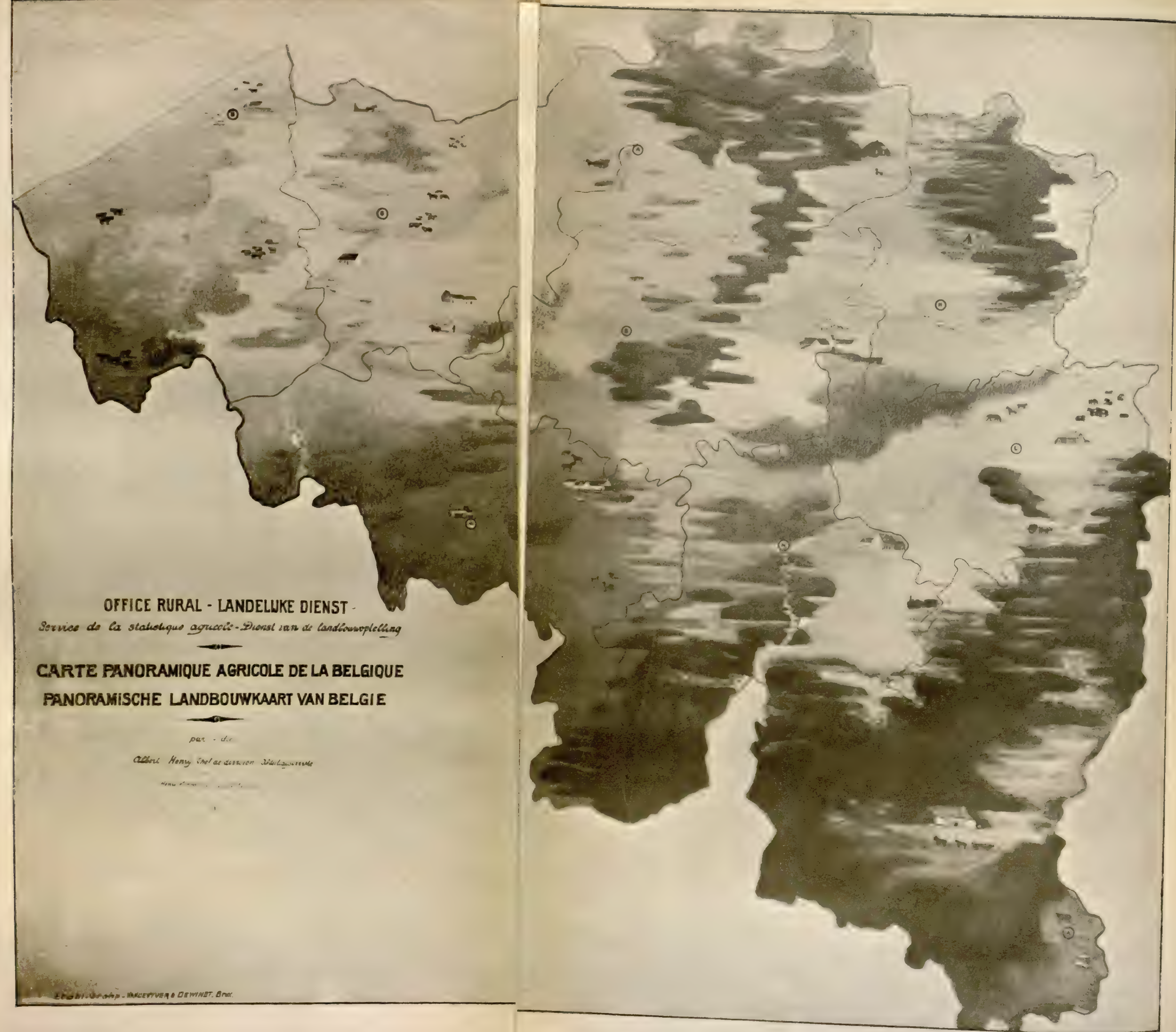
$$M = 0{,}097$$

Celle-ci est donc sensiblement d'une unité sur le premier chiffre décimal.

---

(1) Si l'on pose, en effet, $x = 5{,}1$ et $y = 0{,}093$ dans les équations, on trouve les résidus suivants :

(2)	$+0{,}056$	(4)	$-\ 0{,}02$	(8)	$+0{,}031$
(3)	$-0{,}031$	(7)	$-0{,}068$	(9)	$+0{,}093$.



OFFICE RURAL - LANDELIJKE DIENST -

Service de la statistique agricole - Dienst van de landbouwoptelling

CARTE PANORAMIQUE AGRICOLE DE LA BELGIQUE
PANORAMISCHE LANDBOUWKAART VAN BELGIE

par - door

Albert Henry Chef de division Afdelingsoverste

[illegible]

Etabl. Graph. - VANDEVYVER & DEWINST, Brux.

La carte panoramique agricole de la Belgique

PAR

ALBERT HENRY

Les graphiques imaginés pour concrétiser et animer les résultats des statistiques servent en même temps d'instruments d'investigation et de procédés de vulgarisation. Ils mettent en lumière, aux yeux des chercheurs, les relations qui existent entre les faits observés ; ils expriment en outre, sous une forme frappante pour la masse, les faits eux-mêmes.

La statistique agricole est une matière particulièrement propice à l'établissement de documents de cette nature. L'étendue cultivée, la répartition des cultures, les rendements, le nombre des animaux de ferme, les naissances et les pertes sont autant de constatations simples qui se traduisent aisément en graphiques.

Il est donc naturel qu'on ait largement recouru à ce procédé pour le recensement général agricole de 1895. Pour celui-ci on a utilisé trois modes d'expression de la statistique : les chiffres contenus en quatre volumes, le commentaire qui a fourni un volume et les cartogrammes qui forment un atlas.

Cet atlas comprend les cartes indiquant, par canton judiciaire, l'intensité relative de la culture du froment, du seigle, de l'orge et de l'escourgeon, de l'avoine, du lin, du tabac, du houblon, de la chicorée, de la betterave à sucre, de la betterave fourragère, des prairies, des vergers, des fourrages, ainsi que des jardins potagers, des bois, des terrains incultes, etc.

Comme on peut le constater, tous ces documents graphiques sont basés exclusivement sur la méthode analytique : ils déterminent successivement l'intensité des cultures que je viens d'énumérer dans chaque canton du pays ; mais ils ne renseignent pas l'importance relative de ces diverses cultures entre elles. Il faut, pour y arriver, confronter ces nombreuses cartes ; mais qu'on les superpose ou qu'on les juxtapose, l'opération est difficile et le résultat peu satisfaisant, car la valeur des teintes employées n'a pas été calculée à ce point de vue ; en effet, la teinte la plus foncée représente, suivant les cultures, un pourcentage variant de 4 à 94, et la plus claire, de 0,25 à 10.

De même, les populations chevaline, bovine et porcine sont figurées en des cartes distinctes par des teintes en rapport avec leur importance dans chaque canton ; mais il est difficile de se représenter comment ces différentes populations animales se combinent, ainsi que de déterminer cet élément important de l'économie rurale qu'est l'intensité relative de la vie animale dans les diverses régions agricoles du pays, la puissance productive de vie nouvelle de chacune d'elles, ainsi que les risques particuliers de mortalité qui leur sont inhérents.

Loin de moi la moindre idée de critique à l'égard des travaux dont je parle et dont je suis le premier à reconnaître et à proclamer l'indiscutable mérite. Mais leurs auteurs eux-mêmes, j'en ai la conviction, se joindraient à moi pour déclarer que toute œuvre est susceptible d'être perfectionnée et complétée.

Il semble bien que des synthèses graphiques établissant les relations entre les différents ordres de faits constatés par la statistique ne seraient pas sans offrir de sérieux avantages.

Ils aideraient à l'étude des rapports entre les principaux éléments de l'économie rurale, fourniraient les caractères différentiels des diverses régions du pays, faciliteraient la mise en lumière des faits que la comparaison des chiffres ne permet d'établir que fort laborieusement.

Ces synthèses contribueraient, en outre, à vulgariser les résultats de la statistique et à en faire apprécier la nécessité. Condenser en un tableau unique les impressions visuelles résultant de vingt tableaux différents, offrir d'un seul regard à l'œil le moins exercé le résumé des données du recensement agricole, ce serait mettre un document intuitif des plus précieux à la disposition de ceux qui enseignent la géographie agricole et l'économie rurale ; ce serait travailler à faire apprécier comme elle doit l'être l'importance de l'Agriculture dans notre pays et à faire mieux aimer notre sol patrial dont la vertu productrice est due au labeur persévérant de nos populations rurales.

Un autre complément paraît susceptible d'être apporté à la méthode d'après laquelle les graphiques sont habituellement dressés : les signes et les teintes conventionnels auxquels on a ordinairement recours donnent généralement à ces documents un caractère aride et rébarbatif ; ils exigent, pour être compris, la consultation des légendes ; or, au point de vue de la vulgarisation, cette méthode offre le grand inconvénient de détourner l'attention des faits que les graphiques sont destinés à mettre en lumière pour la consacrer presque exclusivement à la lecture des signes conventionnels. Le caractère intuitif de ces documents est ainsi profondément altéré. Serait-il donc impossible de remplacer par l'image même des objets à représenter les signes arbitraires qui les indiquent d'habitude ?

Un essai très intéressant a été entrepris dans cet ordre d'idées par M. Golescu, Directeur du service de la statistique agricole de la Roumanie. Il a publié en 1905 une carte figurative, par province, des produits de la culture, de l'élevage et des forêts de ce pays. Ces produits sont représentés non par des teintes ou des signes conventionnels, mais par la figure même de l'objet à indiquer. On voit notamment sur cette carte des sacs de grain, des tonneaux de vin, des pommes de terre, des betteraves, des feuilles de tabac, des chevaux, des vaches, des moutons. Chaque figure a des dimensions proportionnelles à son importance relative dans chaque province et, à côté d'elle, on peut lire le chiffre absolu. Cette carte a une très grande valeur au point de vue intuitif, mais elle reste analytique et, par le fait, nécessite l'emploi d'une multitude de figures qui lui donnent un aspect quelque peu embrouillé ; elle ne provoque aucune impression nette et durable, ni dans l'œil, ni dans l'esprit. Un reproche qu'on peut encore adresser à cette carte, au point de vue didactique, c'est l'absence de tout aspect pittoresque et décoratif, de tout cachet artistique, si utiles cependant pour éveiller l'intérêt des élèves, retenir leur attention et faire naître en eux le sentiment du beau.

Je n'aurais aucune autorité pour formuler ces observations si je m'en tenais là et si je n'avais au moins tenté, en réalisant autre chose que ce que nous voyons généralement, de démontrer la possibilité de faire plus.

Je ne me dissimulais pas les obstacles que devait rencontrer un pareil dessein ; les difficultés qu'il soulevait étaient telles que, sans un concours favorable de circonstances, elles en auraient empêché l'exécution.

Il me fallait d'abord et avant tout pour collaborateur un artiste peintre que les chiffres et les précisions mathématiques d'un tel travail n'effrayeraient point. J'eus la chance de le rencontrer en M. Henri Van Haelen, plusieurs fois lauréat du concours de gravure de l'Académie et à qui son envoi à l'Exposition internationale d'œuvres d'art modernes valut, cette année, une médaille d'argent pour la peinture.

D'autre part, l'Exposition de Bruxelles, après des péripéties diverses, me fournit le moyen de surmonter les difficultés d'ordre matériel.

Malheureusement, les autorisations nécessaires ne furent réunies que trois mois environ avant la date où la carte aurait dû être exposée.

Je fus ainsi contrarié dès le début dans l'exécution du programme que je m'étais tracé. Afin de travailler réellement d'après nature et de produire ainsi une œuvre de haute sincérité, l'artiste aurait dû recueillir sur place les notes pittoresques entrant dans la composition ; il n'en eut pas le temps et la saison d'hiver ne s'y prêtait guère.

Malgré tout, la carte fut prête à la date indiquée et figura au Palais de l'Agriculture, dans le Pavillon de l'Administration de l'Agriculture et de l'Office rural.

Le titre de *Carte panoramique agricole de la Belgique* fut choisi, parce qu'il semblait le mieux répondre au but poursuivi : la synthèse intuitive de notre statistique agricole.

La carte donne la répartition du sol belge en terrains cultivés, terrains boisés et terrains incultes.

Les forêts se subdivisent en résineux et feuillus ; les terres cultivées se répartissent entre les grands groupes adoptés par la statistique :

Céréales et farineux ;
Légumineuses ;
Plantes racines ;
Plantes industrielles ;
Fourrages.

Enfin dans chacun de ces groupes, les cultures principales sont représentées séparément.

On a attribué à chacune de ces divisions et subdivisions la part proportionnelle d'étendue qu'elle occupe en réalité. Comme nous voulions combiner le caractère pittoresque de l'ensemble avec l'exactitude mathématique du détail, nous n'avions pas la ressource de simplifier les contours de la Belgique et de donner à celle-ci une forme plus ou moins régulière qui eût facilité la répartition du sol entre les différentes cultures.

Force fut donc de rechercher et de trouver un procédé qui permît de mesurer avec toute la précision nécessaire les surfaces irrégulières qu'imposait la nécessité de sauvegarder le caractère décoratif de la carte. C'était une première difficulté à vaincre et non la plus grande.

Une autre difficulté, c'était de trouver le mode d'expression picturale approprié à chaque objet à figurer. Il fallait une carte parlante, qui exprimât les objets par leur représentation concrète : le froment ou les betteraves par l'aspect d'un champ de froment ou de betteraves, les prairies par la verdure des prés ; nous voulions rendre inutile le recours aux légendes et autres explications de signes et de teintes conventionnels, et ce dans le but d'éviter l'inconvénient que je signalais tantôt.

L'impossibilité où s'est trouvé le peintre d'étudier sur place ces différents objets lui a rendu ce travail particulièrement pénible.

Il ne pouvait s'agir de reproduire en petit la mosaïque de cultures diverses dont nos champs nous offrent l'aspect ; il a fallu grouper les étendues d'une même culture et les placer dans les régions où ces cultures sont, dans la réalité, au maximum d'intensité.

Il ne faudrait point en conclure que les cultures sont exclusivement localisées là où elles ont été situées ; mais c'est là où elles sont figurées qu'elles occupent le pourcentage le plus élevé de l'étendue cultivée.

Pour donner un aperçu aussi complet que possible de l'économie rurale du pays, il n'était pas suffisant d'indiquer la production végétale. Il fallait signaler en même temps la population animale. Par application du principe adopté pour les cultures, je me suis borné à figurer les animaux dans les endroits où leur proportion par cent hectares d'étendue cultivée est la plus élevée ; il en a été dessiné un nombre proportionnel à ce chiffre et l'on s'est attaché à donner dans chaque région la principale caractéristique extérieure de chaque race locale, c'est-à-dire la couleur de la robe. Les chevaux et les porcs ont été représentés dans les mêmes conditions.

A côté de ces deux facteurs : la production végétale et la production animale, il en est deux autres qui ont aussi une importance considérable au point de vue de l'étude de l'économie rurale ; ce sont d'une part l'étendue des exploitations, d'autre part le travail des champs.

La petite exploitation domine en Belgique ; en effet sur 298.508 exploitations de 1 hectare et plus, le recensement de 1908 en relève 205.239 dont le superficie ne dépasse pas 5 hectares, soit 68.75 % du total. On peut donc dire que la petite exploitation forme la trame de notre agriculture ; toutefois, à côté de ces petites exploitations, il en existe de grandes et de moyennes qui exercent sur l'économie rurale une influence considérable. Ce qui caractérise ces exploitations au point de vue extérieur, c'est avant tout le développement des bâtiments de la ferme. C'est ce qui a fait reproduire un certain nombre de types des constructions rurales spéciales aux diverses régions.

A l'étendue des exploitations, au développement des bâtiments de la ferme, est intimement lié le mode de travail rural ; travail humain dans les plus petites exploitations, animal dans les moyennes, mécanique dans les plus grandes. Je me suis efforcé de figurer cet aspect de l'économie rurale en montrant le travail de l'homme, des animaux : chien, bête à corne, cheval seul ou en groupe ; enfin des machines.

La carte exécutée d'après le plan qui vient d'être tracé n'a pas l'aspect froid et nu des cartes murales ; malgré la grandeur de ses dimensions (5 m. × 4 m.), elle se présente comme un tableau où un peu de perspective donne une certaine impression de recul et où des fermes, des animaux, des scènes de travail mettent de la vie et de l'animation.

La répartition des cultures, obtenue d'après la méthode que j'ai indiquée, correspond à ce que les statistiques renseignent de l'économie rurale de la Belgique. On passe successivement des bois et des terrains de l'Ardenne, aux prairies et à l'avoine de cette région et du Condroz, puis au froment, aux cultures fourragères et aux betteraves de la région limoneuse, au seigle de la région sablonneuse, aux prairies de la Flandre ; dans la région sablonneuse, l'influence de la petite culture se fait sentir davantage : il y a de la variété dans les plantes cultivées. Enfin, la Campine apparaît avec ses sapinières et ses terrains incultes, bordant les terres fertiles de la Hesbaye et des alluvions de la Meuse, à droite de laquelle s'étend la région herbagère de Herve.

J'ai éprouvé une véritable satisfaction en constatant que la conception théorique que je m'étais formée était susceptible de réalisation pratique dans des conditions de succès que je n'aurais pu prévoir au premier abord. Malgré l'absence de tout document similaire antérieur qui pût nous servir de guide, nous avons établi la possibilité de dresser dans une note pittoresque et attrayante une carte agricole synthétique et intuitive du pays, appelée à faciliter grandement l'enseignement de la géographie agricole et de l'économie rurale dans les établissements d'instruction.

Le Jury de l'Exposition a reconnu ces efforts en accordant à la *Carte panoramique agricole de la Belgique* un diplôme d'honneur.

Ce n'est pas à dire toutefois qu'il faille voir dans la carte exposée une œuvre définitive à l'abri de toute critique et ne pouvant comporter aucun perfectionnement.

J'ai dit les raisons pour lesquelles il ne nous a pas été possible de pousser aussi loin que nous l'aurions voulu le détail et la précision dans la figuration des objets ; sous ce rapport, la carte est à reprendre toute entière et l'exécution devrait en être serrée de près. De plus, la réflexion nous a montré une série d'améliorations désirables, dont la plus importante serait sans doute la répartition des cultures par régions agronomiques.

Je garde le ferme espoir que les circonstances qui furent favorables continueront de se montrer propices et que je parviendrai un jour à donner, au projet qui vient d'être exposé, sa forme définitive, avec la perfection technique et le cachet artistique qu'il exige, et que je pourrai en même temps faire de la carte ainsi conçue un tirage qui la mette à la disposition des établissements d'enseignement.

La première édition de la " Clavis Mathematica „ d'Oughtred. Son influence sur la " Géométrie „ de Descartes

PAR

H. BOSMANS, S. J.

I

Aux premiers jours de janvier de 1689, Samuel Morland, personnage très oublié, mais neveu d'un ingénieur anglais plus connu que lui sous les mêmes nom et prénom (¹), Samuel Morland, dis-je, écrivait d'Utrecht, à John Wallis, une lettre (²) devenue célèbre par la réponse du destinataire.

« *Au Révérend et très Illustre Monsieur*
» *Monsieur Jean Wallis, docteur en théologie,*
» *Professeur public de théologie, à Oxford.*
» *Salut.*

» 8 janvier 1688/9

» Révérend et très Illustre Monsieur,

» J'espère beaucoup, connaissant votre bienveillance, que vous trouverez juste et convenable, une question que vous pose un homme obscur et qui vous est tout à fait inconnu. Sans vous retarder par de longs et ennuyeux détours, voici le but de ma lettre.

(¹) Né vers 1625, mort à Hammersmith, le 30 décembre 1695.

(²) Publiée dans : *Johannis Wallis S. T. D. Geometriae Professoris Saviliani, in Celeberrima Academia Oxoniensi De Algebra Tractatus Historicus et Practicus.... Operum Mathematicorum Volumen alterum.* Oxoniae, E. Theatro, Scheldoniano. MDCXCIII, cap. 53, p. 206.

» J'ai lu, il y a quelque temps, dans votre très élégant et vraiment précieux (¹) livre d'*Algèbre*, que Descartes, ce philosophe tant vanté, surtout pour être parvenu à édifier, sans l'aide d'autrui et par ses propres moyens un système très parfait ; que Descartes, dis-je, avait puisé, en géométrie, la plus grande lumière dans notre Oughtred et dans notre Harriot ; qu'il avait marché sur leurs traces, tout en célant intentionnellement leurs noms.

» J'en ai fait, en conversation, la remarque à un professeur d'Utrecht, où je me trouve maintenant. Il me demanda de lui indiquer les pages des deux auteurs qui justifiaient cette accusation. Je l'avoue, cela m'a été impossible. La *Géométrie* (²) de Descartes ne m'est pas assez familière, quoique je possède un peu Oughtred.

» Permettez donc, je vous prie, qu'on vous impose ce travail. Donnez-moi, du moins, l'indication des passages des deux auteurs, dont la confrontation fait le mieux ressortir le *plagiat* de Descartes.

» Reste à vous supplier de m'excuser et à former des vœux pour votre bonheur en ce siècle et dans les siècles des siècles.

» Je n'ai rien d'autre à ajouter, si non que je suis
» le très respectueux admirateur
» de la piété et de l'érudition,
» Samuel Morland,
» neveu du chevalier de même nom,
» très appliqué aux sciences mathématiques. »

Réponse de Wallis (³).

« *Au très Illustre Monsieur,*
» *Monsieur Samuel Morland,*
» *Salut.*

» Oxford, 12 mars 1688, style d'Angleterre.

» Très Illustre Monsieur,

» Vos lettres datées d'Utrecht, le 8 janvier 1688, je ne sais en

---

(¹) Le texte a : « In libro tuo elegantissimo, planeque aureo. »

(²) Je citerai la *Géométrie* d'après la réédition donnée dans les *Œuvres de Descartes publiées par Charles Adam et Paul Tannery. T. 6, Discours de la Méthode et Essais.* Paris, Cerf, 1902.

(³) *O. c.*, p. 207.

quel style, me sont parvenues à Oxford, le 7 mars 1688, style d'Angleterre, c'est-à-dire, le 17 mars 1689, nouveau style.

» Vous m'y questionnez sur le *plagiat* de Descartes.

» Nulle part je ne donne à Descartes le nom de *plagiaire.* Je ne veux pas passer pour impoli.

» Mais je dis cependant ceci : Antérieurement à lui, son *Algèbre* se trouve déjà en majeure partie (sinon en entier) dans d'autres auteurs (notamment dans notre Harriot) quoiqu'il affecte néanmoins de ne pas les nommer.

» Que l'algèbre puisse s'appliquer à la géométrie et qu'on l'y applique en effet, voilà qui n'est pas chose nouvelle. Pour passer sous silence les anciens, c'est ce qu'ont fait Viète, Ghetaldi, Oughtred et d'autres avant Descartes. Ils ont résolu par l'algèbre et l'arithmétique spécieuse (¹) de nombreux problèmes de géométrie ; les uns ceux-ci, d'autres ceux-là, comme Descartes les siens. Imaginer, par de vieilles méthodes, de nouveaux problèmes, les résoudre autrement qu'ils l'avaient été jusque-là ; personne n'en est incapable.

» Mais il ne s'agit pas de l'application de l'algèbre à la géométrie, chose antique ; mais bien de l'algèbre cartésienne considérée en elle-même et uniquement comme telle.

» La *Clavis Mathematica* d'Oughtred (publiée de son vivant), et l'*Algèbre* ou *Analytique* d'Harriot (ouvrage posthume, publié dix ans après sa mort, par Walter Warner, mais sans nom d'éditeur) parurent, pour la première fois, en 1631.

» L'œuvre posthume de Ghetaldi, *De Compositione et Resolutione Mathematica* était éditée dès 1630. J'ignore si elle le fut plus tôt ; car ses éditions sont nombreuses, et l'auteur s'était depuis longtemps rendu célèbre par ses écrits mathématiques.

» Viète les précède tous.

» La *Géométrie* de Descartes (je préférerais, pour ma part, la nommer *Algèbre*) ne vit pas le jour avant 1637. Elle était alors en français. Plus tard, en 1649 et 1659, Schooten l'a donnée en latin. Je vais la parcourir méthodiquement, d'après l'édition de 1659 (²). »

Là dessus Wallis part, et cherche à éreinter Descartes.

(¹) *Algebra* et *Arithmetica speciosa.* Les deux mots sont à peu près synonymes, avec une nuance cependant ; l'*Algèbre* est, à plus proprement parler, la théorie des équations ; l'*Arithmétique spécieuse*, le calcul littéral.

(²) Voici le titre de cette édition : *Renati Descartes Geometria. Editio*

Ouvrez la *Géométrie*, dit-il : A la page 1, Descartes dit ceci, c'est dans Viète. A la page 2, il dit cela ; c'est dans Oughtred. A la page 3, il dit telle autre chose ; c'est dans Harriot. Vérifiez : Voyez tel chapitre, tel théorème, tel problème.

Et Wallis va, va, va toujours, d'un ton bref, hautain, dédaigneux, pendant six grandes pages in-folio.

Sans doute, il se défend de traiter Descartes de plagiaire ; mais c'est politesse pure, il ne s'en cache pas, car il a visiblement à cœur de faire croire au plagiat.

Cette lettre m'a toujours paru inexplicable.

Wallis est chauvin parmi les plus chauvins des Anglais ; personne ne le conteste. Mais c'est un érudit, et quand la passion ne l'emporte pas hors des bornes, c'est même un érudit très exactement informé ; j'en parle d'expérience, il m'a bien des fois rendu service.

Aussi, qu'à propos des créateurs de la théorie des équations, par exemple, le professeur d'Oxford nous présente Harriot comme un génie de premier ordre, tandis qu'il parle de Descartes d'un ton méprisant, à peine convenable ; on s'y attend, Harriot est anglais, Descartes ne l'est pas.

Mais que le patriotisme l'aveugle au point de vous dire : lisez telle page de Descartes, comparez la à telle autre page de l'*Artis Analyticae Praxis* d'Harriot, vous verrez bien que c'est copié. (Je dis, copié ; car enfin, il n'y a qu'un mot qui serve, et c'est bien là ce que veut nous faire entendre Wallis). Que d'autre part, à l'épreuve, vous constatiez, non par une fois, mais à peu près chaque fois, qu'au passage indiqué il n'y a équivalemment rien, ou presque rien ; voilà chez un érudit de la valeur de Wallis ce qui est incompréhensible.

Je me charge d'autant moins d'éclaircir ce mystère que je n'ai jamais eu en mains l'*Artis Analyticae Praxis* d'Harriot (2). Mais

---

secunda. Multis accessionibus exornata et plus altera sui parte adaucta. / *Geometria a Renato Descartes Anno 1637 Gallice edita ; postea autem... in Latinam linguam versa, et commentariis illustrata, opera et studio Francisci a Schooten in Acad. Lugd. Batava Matheseos professoris...* Amsterdami, Apud Ludovicum et Danielem Elzevirios. CIↃ. IↃ. CLIX (Bibl. Roy. de Belgique, V. 5008).

(1) Pp. 207-213.

(2) Le *Catalogue of Printed Books* du British Museum donne le titre en ces

le plus compétent et le plus impartial des historiens des mathématiques, M. Moritz Cantor, l'a lu. Or, voici à peu près en quels termes il en résume l'analyse (¹) :

« Aller, dit-il, jusqu'à ne pas nommer l'*Artis Analyticae Praxis* dans l'histoire des mathématiques, peut-être est-ce trop. Mais faire d'Harriot un initiateur, un précurseur, c'est exagération pure.

» Wallis ne s'en est pas aperçu. Celui qui compare son compte-rendu de l'*Artis Analyticae Praxis* avec le texte même, doit croire que Wallis a eu un tout autre ouvrage sous les yeux. »

Deux autres maîtres, MM. Charles Adam et Paul Tannery, dans une note de leur édition de la *Correspondance de Descartes* (²), s'expriment en termes non moins sévères.

Ces jugements si défavorables n'étaient pas faits pour diminuer l'embarras que me causait la lettre de Wallis.

Cantor, Adam, Tannery, quand de pareils hommes sont d'accord, on n'hésite pas à les croire et l'on a raison. Harriot est donc jugé et sa cause est finie. Mais, en était-il de même d'Oughtred ?

---

termes : *Artis Analyticae praxis ad aequationes nova methodo resolvendas.* Londini, 1631, in-f°.

Kaestner, *(Geschichte der Mathematik*, t. 3, Göttingen, bey Johann Georg Rosenbusch, 1799, p. 176) donne un titre beaucoup plus étendu, trop long même pour être transcrit ici.

(¹) *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, 2ᵉ éd., t. 2, Leipzig, Teubner, 1900, p. 792. Voici le texte même de M. Cantor :

« So der wesentliche Inhalt eines Werkes, von dessen Verfasser mangewiss nicht wird behaupten wollen, er verdiene nicht einen Platz in der Geschichte der Algebra, aber von dem man noch weit weniger behaupten darf, er sei Bahnbrecher auf diesem Gebiete gewesen, in dessen Werk man nicht hineinlesen darf, was nun und nimmermehr erthalten war. *En note* : Diesem Fehler verfiel John Wallis in seiner Algebra von 1685. Wer seinen Bericht mit der *Artis Analyticae Praxis* vergleicht, muss glauben, Wallis habe ein ganz anderes Werk vor Augen gehabt. »

(²) *Œuvres de Descartes publiées par Charles Adam et Paul Tannery... Correspondance, t. II*, Paris, Cerf, 1898. Note des éditeurs ajoutée à une lettre écrite par Descartes à Constantin Huygens, en décembre 1638, pp. 457-461.

C'est Beaugrand le premier, qui bien avant Wallis, et dès 1638, accusa Descartes, dans un factum anonyme, d'avoir plagié Harriot. M. Paul Tannery a publié cette pièce dans la *Correspondance de Descartes dans les inédits du Fonds Libri*, Paris, Gauthier-Villars, 1893, pp. 50-55.

Nous ne pouvons que renvoyer, pour plus de détails sur cette affaire, à la note du tome 2 de la *Correspondance de Descartes* indiquée ci-dessus, dans laquelle MM. Adam et Tannery ont épuisé le sujet.

Je connaissais depuis longtemps sa *Clavis Mathematica*, mais par l'édition de 1652 seulement. Or, à l'encontre de l'*Artis Analyticae Praxis* d'Harriot, cette édition de 1652 est un ouvrage très remarquable.

Impossible cependant d'en rien conclure.

Une seule édition de la *Clavis Mathematica*, celle de 1631, précède la *Géométrie* de Descartes, et dans sa lettre à Samuel Morland, Wallis lui-même me fournissait la preuve que l'édition de 1631 diffère beaucoup des suivantes. Pour les principaux passages, il cite la *Clavis Mathematica* en partie double : l'édition de 1631 et une autre dont il ne donne pas la date. Celle-ci se rapproche probablement de celle de 1652, qui est la troisième et la dernière donnée du vivant de l'auteur.

Attribuer un véritable plagiat à Descartes est une accusation, qui dès ma première lecture de la *Clavis Mathematica* me paraissait ne pas pouvoir supporter l'examen, et qui, effectivement, ne le supporte pas.

Mais la *Clavis Mathematica* n'a-t-elle pas eu d'influence sur le développement général de la science ? Ne forme-t-elle pas un chaînon important entre les œuvres de Viète et celles de Descartes, comparable à l'*Invention Nouvelle en l'Algèbre* d'Albert Girard (1), par exemple ?

Voilà un tout autre problème, qui loin d'être résolu, n'a jamais depuis Wallis, été même que je sache discuté.

Cette discussion n'est possible que sur l'édition de 1631. Or, celle-ci est rarissime et la plupart des historiens des mathématiques expriment le regret de ne l'avoir jamais rencontrée.

J'ai fini par avoir plus de chance qu'eux et j'en ai trouvé récemment un exemplaire à l'Université de Louvain (2). Il est donc possible de savoir désormais à quoi s'en tenir.

C'est le but de cette étude.

---

(1) A Amsterdam, chez Guillaume Iansson Blaeuw M. DC. XXIX.

(2) Coté Sciences 565. Je remercie vivement M. Wils, bibliothécaire de l'Université, qui me l'a prêté avec son obligeance habituelle. Je dois les mêmes remerciements à M. Ferd. van der Haeghen, bibliothécaire en chef de la bibliothèque de l'Université de Gand, qui m'a prêté l'exemplaire de l'édition de 1652 possédé par ce dépôt.

Pour la clarté de l'exposition, il est indispensable de donner d'abord une description bibliographique du volume et d'indiquer les principaux traits, par lesquels l'édition de 1631 diffère de celle de 1652. J'analyserai ensuite rapidement l'ouvrage; les conclusions s'imposeront d'elles-mêmes.

II.

L'édition de 1631, n'est à proprement parler intitulée, ni *Clavis Mathematica,* ni *Clavis Mathematicae,* noms sous lesquels l'ouvrage est couramment désigné, mais bien :

Arithmeticæ in // nvmeris et speci- // ebvs institvtio : // qvæ tvm logisti- // cæ, tvm analyti- // cæ, atqve adeo // totivs mathe- // maticæ, qvasi // clavis // est. //

Ad nobilissimvm spe- // ctatissimumque iuvenem Dn. Gvilel- // mvm Howard, Ordinis, qui dici- // tur, Balnei Equitem, honoratissimi Dn. // Thomæ, Comitis Arvndeliæ & // Svrriæ, Comitis Mareschal- // li Angliæ, &c. filium. //

Londini, // Apud Thomam Harpervm. // M. DC. XXXI. //

In-8° de 8 pages non numérotées, suivies de 88 pages numérotées formant le corps de l'ouvrage. L'exemplaire de l'Université de Louvain présente la particularité intéressante d'avoir appartenu jadis au Collège de la Compagnie de Jésus, à Gand, où il fut probablement à l'usage de Grégoire de Saint-Vincent.

La dédicace adressée à Guillaume Howard est datée : « Du château de votre père illustrissime, à Arundel, au bord de la Tamise, 1r janvier 1631. »

Malgré le soin visible qu'on lui a apporté, cette première édition renferme cependant, dans les formules, de trop nombreuses coquilles typographiques, qui sont loin d'être toutes relevées dans l'errata. Les fautes sont même si multipliées, que l'imprimeur a cru de son devoir de s'en excuser, et d'en apporter pour raison : « la difficulté de composer un ouvrage d'un genre aussi insolite »(1).

---

(1) « Typographus in excusationem suam argumenti hujus insoliti difficultatem causatur, » f° (A_4) v°.

L'édition de 1631 est divisée en 20 chapitres, d'étendue assez inégale.

Je ne connais pas d'exemplaire de la 2e édition. Elle est d'ailleurs si rare que le British Museum lui-même ne la possède pas. D'après le *Dictionary of National Biography edited by Sidney Lee* (1), elle serait de Londres, 1648, et aurait pour titre : *Clavis mathematicae, cum Tract. de resolutione aequationum in numeris, et declaratione X, XIII, XIV Elementi Euclidis.*

Le traité de la résolution des équations numériques, et le commentaire des livres X, XIII et XIV d'Euclide annoncés au titre, ne se trouvent pas dans la *Clavis Mathematica* de 1631. L'édition de 1648 se rapproche donc probablement beaucoup plus de l'édition de 1652 que de celle de 1631. Elle est postérieure à la *Géométrie* de Descartes.

L'édition de 1652 (2) est en réalité un recueil de petits traités fort divers, distribués en quatre volumes qui ont chacun leur titre spécial.

Titre du tome 1 : *Guilielmi Oughtred Aetonensis, quondam Collegii Regalis in Cantabrigia Socii, Clavis mathematicae denuo limata, sive potius fabricata. Cum aliis quibusdam ejusdem Commentationibus, quae in sequenti pagina recensentur. Editio tertia auctior et emendatior.* Oxoniae, Excudebat Leon. Lichfield, Veneunt apud Tho. Robinson. 1652. In-8° de 14 pages non numérotées et 151 numérotées.

Ce premier volume contient deux traités :

1° Une réédition de la *Clavis Mathematica* proprement dite.

2° *De Aequationum Affectarum Resolutione in numeris.* De la résolution des équations numériques d'un degré supérieur au second. Cet intéressant sujet n'avait pas été touché par Oughtred, dans la *Clavis Mathematica* de 1631.

Quant à la *Clavis Mathematica* proprement dite, elle est divisée cette fois en 19 chapitres et non plus en 20. De plus, elle a subi d'autres modifications assez notables.

Des modifications et non pas des corrections ; car les changements introduits ne sont pas toujours des plus heureux.

---

(1) Tom. 42, Londres, 1895, p. 357, col. 2.

(2) J'en ai sous la main deux exemplaires : Bibl. Roy. de Belgique, V. 4797 ; Univ. de Gand, Math. 607.

Jusqu'où faut-il en faire un grief à Oughtred ?

Il a atteint l'extrême limite de la vieillesse, dit-il, dans la préface (¹), et n'avait pas l'intention de rééditer son ouvrage ; mais il cède aux bienveillantes insistances de ses amis Seth Ward et Charles Scarbrough. C'est Wallis qui s'est chargé de revoir le texte et de corriger les épreuves.

Rien de ce qui est contenu dans les trois volumes suivants, ne se trouve dans la *Clavis Mathematica* de 1631. Faute d'avoir fait cette remarque, excusable d'ailleurs par la rareté de la première édition, les historiens des mathématiques sont tombés, pour la plupart, dans de nombreuses erreurs, en faisant remonter à l'année 1631 plusieurs découvertes qui ne furent publiées qu'en 1652, ou au plus tôt en 1648.

Titre du tome 2 : *Elementi Decimi Euclidis Declaratio. Necnon De Solidis Regularibus Tractatus. Authore Guilelmo Oughtredo Anglo.* Oxoniae, Excudebat etc. (comme au tome 1), 1652. — 46 pp.

Contient quatre petits traités :

1° *Elementi Decimi Euclidis Declaratio.* Commentaire du dixième livre des Eléments d'Euclide.

Comment ce Commentaire n'a-t-il pas attiré davantage l'attention des historiens ? C'est chose surprenante. Oughtred y multiplie les symboles nouveaux et, sans y réussir parfaitement, il s'efforce de créer ainsi des démonstrations purement idéographiques, accompagnées d'un minimum de texte explicatif en langage courant.

L'essai est on ne peut plus curieux. Mais les symboles d'Oughtred s'écartent malheureusement si fort de nos caractères usuels d'imprimerie qu'il est malaisé de donner une analyse claire et exacte de ce *Commentaire*. Cette difficulté expliquerait-elle peut-être le silence qui s'est fait autour d'un ouvrage aussi original ?

2° *De Solidis Regularibus Tractatus.* Traité des polyèdres réguliers.

3° *De Anatocismo sive Usura composita.* Six théorèmes sur les intérêts composés.

4° *Regula falsae positionis.* Règle de fausse position.

(¹) F° (A_5) r° et v°. Oughtred naquit à Eton, dans le comté de Buckingham, le 5 mars 1574. Au moment où il écrivait sa préface, il devait donc avoir près de 78 ans. Il vécut néanmoins huit ans encore, et mourut le 30 juin 1660.

Cette règle, d'un usage courant depuis des siècles, était acceptée bien souvent de confiance et sans preuve. Oughtred en donne ce qu'il appelle « une démonstration analytique » (¹), c'est-à-dire une démonstration algébrique sur des lettres.

En existe-t-il une plus ancienne ? Il ne serait pas dénué d'intérêt de le rechercher.

Titre du tome 3 : *Theorematum in libris Archimedis de Sphaera et cylindro Declaratio. Authore Guilelmo Oughtredo Anglo.* Oxoniae, Excudebat etc. (comme au tome I), 1652. — 40 pp.

Petit Commentaire sur le traité d'Archimède : *De la Sphère et du Cylindre.* Pour représenter le rapport de la circonférence au diamètre, Oughtred y employe la notation $\frac{\pi}{\delta}$, qui devait donner lieu plus tard au symbole π.

A remarquer aussi quelques formules d'un caractère déjà bien moderne (²).

$\frac{\pi}{\delta}$ Rq est area circuli (Rq = R^2) ; $\frac{\pi}{\delta}$ Rq est l'aire du cercle.

$\frac{\pi}{3\delta}$ Rq × altitud. est conus ; $\frac{\pi}{3\delta}$ Rq × hauteur est le cône.

Titre du tome 4 : *Horologiorum Sciotericorum in Plano, Geometrice solum, sine Calculo Trigonometrico, delineandorum, Modus facillimus. Per quem Meridiana, Substylaris, et Stylus ipse, non investigantur modo, sed etiam, in cujusvis generis Plano, situ proprio inscribuntur, omniaque perspicue demonstrantur. Inventore Guilelmo Oughtredo 23^{um} Aetatis Annum agente.* Oxoniae, Excudebat etc. (comme au tome I), 1652. — 41 pages. Le numérotage des pages est indépendant, mais leurs signatures font suite à celles du volume précédent.

Le traité des cadrans solaires est divisé en onze chapitres. L'auteur avait 23 ans quand il le composa, dit le titre. Malgré cette étrange réclame, ce volume est le moins remarquable des quatre.

La *Clavis Mathematica* eut une quatrième édition (Oxford,

(¹) Préface du tome 1, f° (A_6) r°.
(²) F° A_2 r°.

Lichtfield), en 1667 ; et une cinquième (Oxford, Lichtfield), en 1693. On les trouve au British Museum.

Edmond Halley traduisit l'ouvrage en anglais : *The Key of the Mathematics new forged and filed : together with a treatise of the resolution of all kinds of affected aequations in numbers. With the rule of compound usury,* etc. R. Whitaker, London, 1647. — In-8° (¹).

Le British Museum possède cette édition, ainsi que les rééditions de Londres, 1694, in-8° ; et Londres, 1702, in-12° (²).

Au point de vue de la recherche de l'influence d'Oughtred sur Descartes, il faut s'en tenir à la première édition de sa *Clavis Mathematica.* Elle seule fera l'objet de cette étude.

Nous la diviserons en trois parties principales :

1° Le calcul arithmétique, chez Oughtred.

2° Ses notations et son calcul algébrique.

3° Ses applications de l'Algèbre à la Géométrie.

III

Oughtred a eu la gloire d'attacher son nom à la règle de la multiplication abrégée. Le lecteur me pardonnerait-il de ne pas lui en dire un mot ? D'autant plus que la règle, telle qu'il la formule, n'atteint pas encore toute la perfection de la règle actuelle. Nous la rencontrons au chapitre IV : *De multiplicatione* (³).

L'auteur y sépare la partie décimale d'un nombre de sa partie entière, par une espèce de crochet, Ainsi :

$$246\,\underline{|914} = 246{,}914\;;\quad 35\,\underline{|27} = 35{,}27$$

(¹) D'après le *British Museum Catalogue of printed Books.*

(²) S'il fallait se fier aux Encyclopédies et aux ouvrages de seconde main, on trouverait d'autres éditions et traductions de la *Clavis*. Je crains qu'il n'y ait là parfois de simples erreurs de dates. Quoi qu'il en soit, j'ai préféré courir le risque d'être incomplet que d'être inexact. Je signalerai cependant encore : *Gilberti Clark Oughtredus explicatus, sive commentarius in ejus Clavem mathematicam.* Londini ap. Rich. Davis Bibl. Oxoniensem, 1682, in-8°, ouvrage que je n'ai pas vu, mais dont les ACTA ERUDITORUM, pour l'année 1684, rendent compte, pp. 168 et 169.

(³) Pp. 6 et 7.

Le reste n'offre pas de difficultés.

« Si l'on donne, dit Oughtred, deux nombres fractionnaires à multiplier, et que vous vouliez avoir seulement la partie entière du produit, sans la fraction, — c'est-à-dire, si vous vouliez obtenir le produit diminué d'autant de chiffres, qu'il y a de décimales dans les deux nombres à multiplier, — vous placerez les unités du plus petit nombre sous celles du plus grand, mais en ordre inverse. Puis, vous commencerez partout la multiplication au chiffre du plus grand nombre, qui se trouve au-dessus du plus petit par lequel vous multipliez ; en tenant compte cependant des retenues, qui pourraient provenir des chiffres suivants du plus grand nombre.

» Ainsi, soit à multiplier 246|914 par 35|27. La partie entière du produit serait 8708.

```
2 4 6 9 1 4
7 2 5 3
-----------
        1 7
        4 9
    1 3 2 5
    7 4 0 7
-----------
    8 7 0 8
```

» C'est pourquoi si on recule la place des unités du plus petit nombre, d'un ou de plusieurs rangs vers la droite, à partir du rang des unités du plus grand, vous aurez de même un produit augmenté, c'est-à-dire fractionnaire, mais seulement avec le même nombre de décimales.

```
2 4 6|9 1 4
    7 2|5 3
-----------
    1 7 2 9
    4 9 3 8
1 2 3 4 5 7
7 4 0 7 4 2
8 7 0 8|6 6
```

» En reculant, au contraire, la place des unités du plus petit nombre vers la gauche, à partir de la place des unités du plus grand, vous pourrez obtenir, si c'est nécessaire, un produit inférieur au produit exact, d'autant de chiffres qu'on le voudra.

» Ainsi, s'il fallait multiplier 80902, valeur du sinus de 54 degrés, par 39875, valeur du sinus de la déclinaison maxima 23 1/2 ; le produit diminué des cinq derniers chiffres serait 32260, valeur du sinus de la déclinaison du soleil dans le *Lion*, 24 (1). »

$$\begin{array}{cccccc}
 & 8 & 0 & 9 & 0 & 2 \\
5 & 7 & 8 & 9 & 3 & \\
\hline
 & & & & & 4 \\
 & & & & 5 & 7 \\
 & & & 6 & 4 & 7 \\
 & & 7 & 2 & 8 & 1 \\
 & 2 & 4 & 2 & 7 & 1 \\
\hline
 & 3 & 2 & 2 & 6 & 0
\end{array}$$

Dans ce dernier exemple, Oughtred traite l'un des cas où l'emploi de sa règle était alors regardé comme des plus utiles ; j'entends le calcul des expressions de la forme

$$\sin x = \frac{\sin A \, \sin B}{R}$$

R étant une puissance de 10.

Nous sommes en 1631, et la première table de logarithmes date de 1614 seulement. Beaucoup d'astronomes et de géomètres n'avaient pas encore contracté l'habitude de les employer et s'en tenaient volontiers aux méthodes anciennes, par lesquelles ils craignaient moins de se tromper.

Cet exemple met aussi fort bien en relief le défaut de la règle d'Oughtred, telle que celui-ci la formule ; je veux dire, la nécessité de tenir compte des retenues. Nous l'évitons en reculant les unités du diviseur, d'un nombre convenable de chiffres vers la droite (2).

---

(1) Les tables donnent 32254 = sin 18° 49'.

(2) Je signale ici un excellent article de M. Alfred Loewy, sur la multiplication abrégée d'Oughtred : *Ueber Oughtreds abgekürzte Multiplikation*. Archiv der Mathematik und Physik, gegründet durch J. A. Grunert, 3e sér. t. 3, 1902, pp. 321-323.

La multiplication n'est pas la seule opération abrégée, traitée par Oughtred. Au chap. V, *De divisione*, il donne un exemple de division abrégée. Sa méthode n'est intéressante qu'à condition de la comparer à son procédé ordinaire de division. J'en donnerai donc d'abord un exemple.

Soit à diviser 187 135 075 par 297. Le quotient est 630 084, le reste 127, et les calculs se disposent comme ci-dessous. Il faut y distinguer les chiffres droits, des chiffres penchés. Ces derniers sont biffés par un trait dans le texte original, caractères dont ne dispose pas mon imprimeur (¹).

```
                        1 2
                8 9 2 1 3 1 7
  2 9 7)  1 8 7 1 3 5 0 7 5 (6 3 0 0 8 4 7 1 2 7
                                          -----
                                          2 9 7
              • • • • • •
          ------------------
          1 7 8 2 1 3 7 6 8
              8 9 2 1 1 8
```

Les produits partiels successifs s'écrivent sous la barre horizontale, et les restes au-dessus du nombre à multiplier. Au cours de l'opération on biffe, au fur et à mesure, les chiffres employés.

Dans la suite du texte d'Oughtred, il faut entendre par nombres infinis, ceux qui ne sont pas exactement réductibles en fractions décimales, et dont on peut obtenir une valeur indéfiniment approchée.

« Il faut parfois, dit-il (²), diviser un nombre, par un nombre irrationnel, ou infini, entier ou fractionnaire. Dans ce cas, après avoir gardé, pour premier diviseur, le nombre convenable des premiers chiffres du diviseur, vous diviserez par eux le nombre proposé. Puis, pour chacune des divisions suivantes, vous diminuerez le diviseur en lui enlevant chaque fois un chiffre vers la gauche, jusqu'à ce que vous trouviez un nombre suffisamment grand.

» Soit, par exemple, à diviser 467023 par le nombre infini 3570926425 —

(¹) P. 10.

(²) Pp. 10 et 11.

```
                         3 1 7
                       2 8 0 3
                   1 0 9 9 3 0
3 5 7 0 9 2 6 4 +) 4 6 7 0 2 3 (1 3 0 7 8 5 —
                   -----------
· · · · · · ·      3 5 7 0 9 3
                   1 0 7 1 2 7
                       2 5 0 0
                         2 8 6
```

Règle et exemple sont donnés sans preuve, ni justification d'aucune sorte. Oughtred omet notamment de nous dire comment il faut déterminer le nombre *convenable* de chiffres à conserver dans le diviseur.

D'après M. Tropfke (¹) on rencontrerait, pour la première fois, dans la *Clavis Mathematica*, l'énoncé explicite des théorèmes fondamentaux de la théorie des logarithmes :

$$\log ab = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log a^m = m \log a$$

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}$$

Dans la *Clavis Mathematica* de 1631, il n'y a pas l'apparence d'une proposition de ce genre. Il en est de même dans la *Clavis* de 1652 ; mais ces théorèmes se trouvent effectivement dans le *De aequationum affectarum resolutione in numeris*, publié, à la suite de cette dernière (²). Or, la première édition du *Traité de la résolution des équations numériques* par Oughtred, remonte à l'année 1648 seulement.

Cette date tardive diminue, semble-t-il, l'intérêt de l'observation de M. Tropfke (³) ; car en admettant son exactitude (ce que je n'ai

---

(¹) *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung*... t, 2, Berlin, Veit, 1903, p. 174.

(²) *Clavis*, ed. 1652, pp. 121-122.

(³) M. Tropfke se sert d'un exemplaire de la *Clavis Mathematica*, de 1667, et s'exprime d'une manière équivoque. Quand il dit qu'Oughtred énonce le prepas le loisir de vérifier pour le moment) il n'en est pas moins certain que les quatre théorèmes étaient alors, en fait, d'un usage courant.

IV

Les notations d'Oughtred sont très neuves pour l'époque et se distinguent par une singulière élégance. Elles eurent une indéniable influence sur celles de Descartes.

La plus célèbre est la croix de Saint-André ×, employée comme signe de la multiplication.

« Multiplicatio speciosa, dit Oughtred (1), connectit utramque magnitudinem propositam, cum nota *in*, vel ×, vel plerumque absque nota, si magnitudines denotentur unica littera. La multiplication algébrique réunit les deux grandeurs proposées par le mot *in*, ou le signe ×, ou plus souvent encore sans aucun signe, quand les grandeurs se représentent par une lettre unique. »

Ces derniers mots « par une lettre unique » pourraient paraître surabondants. En 1631, ils étaient indispensables. Malgré les créations de Viète, l'algèbre dépendait encore tellement de la géométrie, que dans nombre de problèmes, quantités connues et inconnues se représentaient par des lignes, et se désignaient dans les calculs algébriques par deux lettres.

$$AB \text{ pour } A \times B$$

est une notation qui s'impose ; mais

$$ABCD \text{ pour } AB \times CD$$

est évidemment incommode et se conçoit à peine.

Oughtred le premier s'est servi de la croix de Saint-André, comme signe de la multiplication. Ce point d'histoire a été mis en

---

mier les quatre règles dans la *Clavis Mathematica*, de quelle édition l'entend-il ? A-t-il poursuivi ses recherches au delà de l'année 1631 ? Oughtred est-il encore le premier, même en 1648 ?

(1) P. 7.

parfaite lumière, par M. Le Paige (1), et confirmé plus tard à l'aide de nouveaux arguments par M. Gravelaar (2) ?

D'après les deux savants, le signe de la multiplication devrait son origine à la vieille habitude de servir de barres de direction, pour montrer que deux grandeurs doivent être combinées ensemble.

A ce propos une observation de détail :

S'il s'agit d'Oughtred lui-même, la lecture de sa *Clavis* me porterait à croire plutôt qu'il a choisi cette notation sans raison bien sérieuse et un peu au hasard ; en un mot, par le seul motif qu'il fallait bien en adopter une. Dans son essai de calcul idéologique de l'*Elementi Decimi Euclidis Declaratio*, il a imaginé tant d'autres symboles purement arbitraires, voire même étranges !

Faut-il faire, dans la *Clavis Mathematica*, une exception pour le signe de la multiplication ?

Sans le nier, je n'en remarque cependant aucun indice.

Autre chose est d'expliquer la diffusion rapide de l'emploi du signe ×. Cette fois c'est bien l'habitude de se servir de barres de direction qui fit paraître la notation naturelle et la vulgarisa. A ce point de vue, on ne peut que partager sans réserve l'opinion de MM. Le Paige et Gravelaar.

Quant aux puissances, elles s'indiquent chez Oughtred par les lettres q et c, qui valent respectivement 2 et 3 et se combinent ensemble par voie d'addition, d'après la règle des exposants.

$$\mathrm{A}q,\quad \mathrm{A}c,\quad \mathrm{A}qq,\quad \mathrm{A}qc,\quad \mathrm{A}cc,$$

désignent donc respectivement

$$\mathrm{A}^2,\quad \mathrm{A}^3,\quad \mathrm{A}^4,\quad \mathrm{A}^5,\quad \mathrm{A}^6.$$

Notation analogue lorsque la grandeur algébrique est représentée par une ligne et s'écrit par deux lettres.

$$\mathrm{BK}q \times \mathrm{BD}q \text{ signifie } \overline{\mathrm{BK}}^2 \times \overline{\mathrm{BD}}^2$$

---

(1) *De l'Origine de certains signes d'opérations.* ANN. DE LA SOC. SCIENT., t. XVI, Bruxelles, 1892, 2e partie, pp. 80-82.

(2) *Over den oorsprong van ons maalteeken* (×). WISKUNDIG TIJDSCHRIFT, 6e année.

Wallis croit devoir signaler (1) cette notation d'Oughtred comme un grand progrès sur celle de Viète, qui écrivait, sans la moindre abréviation, A *quadrato-cubum*, pour A*qc,* ou A^5.

C'est vrai, mais avec deux remarques.

La première, c'est que l'observation de Wallis porte sur les éditions originales de Viète, publiées du vivant de l'auteur. Elle est maintes fois en défaut dans la réédition des œuvres du géomètre de Fontenay-le-Comte, donnée, en 1646, par Schooten, à Leyde, chez les Elzevier (2).

Ainsi la formule

$$\frac{\text{B in D quadratum 3} - \text{B in A quadratum 3}}{4}$$

$$\left(\frac{3BD^2 - 3BA^2}{4}\right)$$

qui se lit dans l'édition princeps des *Zététiques* (3) devient dans la réédition de Schooten (2)

$$\frac{\text{B in D}q\text{ 3} - \text{B in A}q\text{ 3}}{4}$$

On m'objectera qu'en effectuant ces changements, Schooten a subi l'influence d'Oughtred.

Pas tant que cela ; et ceci m'amène à la deuxième remarque : c'est, n'en déplaise à Wallis, que dans la notation des exposants, l'originalité d'Oughtred, comparée à celle de Viète, n'est pas aussi grande que le professeur d'Oxford veut bien le dire.

---

(1) *O. c*, p. 71.

(2) *Francisci Vietae Opera Mathematica in unum volumen congesta ac recognita, opera ac studio Francisci a Schooten Leydensis*... Lugduni Batavorum, Ex Officina Bonaventurae et Abrahami Elzeviriorum CIↃ.IↃC.XLVI.

(3) P. 12 r°. L'exemplaire de la Bibliothèque royale de Belgique (V. 4908) dont je me sers est incomplet de la première page. Ritter en donne le titre en ces termes : *Zeteticorum libri* V. Tours, J. Mettayer, 1593. (*François Viète inventeur de l'algèbre moderne. 1540-1603. Essai sur sa vie et son œuvre.* REVUE OCCIDENTALE, 2e sér., t. 10, Paris, 1895, p. 382.)

(4) P. 60.

Ainsi, soit le polynome

$$2 - 16x^2 + 20x^4 - 8x^6 + x^8$$

le géomètre français l'écrit (1) :

$$2 - 16Q + 20QQ - 8CC + QCC$$

De là, à la notation d'Oughtred, il n'y a qu'un pas.

Au chapitre XII, *De Genesi et Analysi Potestatum* (2), Oughtred se rallia un instant à une idée heureuse, mais qui n'était pas neuve et dont il ne semble pas avoir entrevu toute la fécondité : c'est de représenter les degrés des puissances par des chiffres. Adrien Romain les plaçait entre parenthèses, après la lettre affectée (3) ; Descartes les écrira en exposants, comme nous le faisons encore ; Oughtred les encadre dans de petits carrés.

Je fais allusion au passage de la *Clavis Mathematica* où se trouve exposée la loi de formation des coefficients du binome. Les quatre premières puissances de A + E sont obtenues par des multiplications successives (4). « Par cet artifice, ajoute l'auteur, vous formerez en échelle, depuis la racine, le tableau suivant des puissances ascendantes du binome (5) : »

---

(1) *Ad Problema quod omnibus Mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus Francisci Vietae Responsum*. Parisiis, Apud Iamettum Mettayer Typographum Regium, 1595, f° 11 r°. (Bibl. Roy. de Belgique, V. 5007).

(2) Pp. 23-27.

(3) *In Mahumedis Algebram Prolegomena* (s. lieu, ni date, ni nom d'imprimeur), pp. 26-31, (Univ. de Louvain, Scienc., 1302). Voir mon mémoire sur cet ouvrage. ANN. DE LA SOC. SCIENT., t. XXX, 2e partie, Bruxelles, 1906.

(4) P. 25.

(5) Le triangle se trouve p. 26. Quant à « l'artifice » dont il est ici question, il consiste à bien mettre en évidence la formule de récurrence

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}$$

par laquelle sont formés les coefficients du binome.

Latus sive numerus	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	Aq	Ac	Aqq	Aqc	Acc	Aqcc	Aqqc	Accc	Aqqcc
E	2AE	3AqE	4AcE	5AqqE	6AqcE	7AccE	8AqqcE	9AqccE	10AcccE
	Eq	3AEq	6AqEq	10AcEq	15AqqEq	21AqcEq	28AccEq	36AqqcEq	45AqccEq
		Ec	4AEc	10AqEc	20AcEc	35AqqEc	56AqcEc	84AccEc	120AqqcEc
			Eqq	5AEqq	15AqEqq	35AcEqq	70AqqEqq	126AqcEqq	210AccEqq
				Eqc	6AEqc	21AqEqc	56AcEqc	126AqqEqc	252AqcEqc
					Ecc	7AEcc	28AqEcc	84AcEcc	210AqqEcc
						Eqqc	8AEqqc	36AqEqqc	120AcEqqc
							Eqcc	8AEqcc	45AqEqcc
								Eccc	10AEccc
									Eqqcc

Il n'est peut-être pas sans intérêt de comparer cette forme du triangle arithmétique, avec celles que j'ai données dans ma note historique sur le *Triangle dit de Pascal* (¹).

Revenons un instant en arrière et arrêtons-nous au chap. VI. *De proportione* (²).

Pour désigner les proportions, Oughtred se sert (³), d'un point

---

(¹) ANN. DE LA SOC. SCIENT., t. XXXI. Bruxelles 1907, 1re part. pp. 65-72.

(²) Pp. 11-14.

(³) Outre les deux éditions de la *Clavis Mathematica* (1631 et 1652) mes recherches ont porté sur :

1° *Guilelmi Oughtred Aetonensis. Quondam collegii Regalis in Cantabrigia Socii. Opuscula Mathematica hactenus inedita.* Oxonii, E Theatro Scheldoniano, 1677. J'en possède un exemplaire.

2° *Trigonometria : Hoc est. modus computandi Triangulorum Latera et Angulos, ex Canone Mathematico traditus et demonstratus. Autore Clarissimo Domino Willelmo Oughtred Aetonensi. Unà cum Tabulis sinuum. Tangent : et Secant, etc.* Londini, Typis R. et L. W. Leybourn, Impensis Thomae Johnson, apud quem veneunt, sub signo Clavis Aureae, in Coemeterio S. Pauli, 1657 (Univ. de Louvain, Scienc. 404).

Il parut la même année et chez le même éditeur des exemplaires dont le titre et les pièces préliminaires diffèrent : *Trigonometria : Hoc est Modus computandi Triangulorum Latera et Angulos, ex Canone Mathematico traditus et demonstratus. Collectus ex chartis Clarissimi Domini Willelmi Oughtred* pour séparer les deux termes des rapports, et de quatre points ∷ pour séparer les rapports eux-mêmes. La proportion

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$$

s'écrira donc chez lui (¹)

$$A \cdot B :: \alpha \cdot \beta$$

Dans les ouvrages publiés de son vivant, deux fois, mais à ma connaissance, deux fois seulement (²), il sépare les deux termes des rapports par un double point. Il écrit alors

1 : partes ∷ differentia prima : excessus

et

$$62496 : 3495 :: 1 : 0\,|\underline{54.9}$$

Ces exemples se trouvent aux deux dernières pages des *Canones Sinuum, tangentium, secantium et logarithmorum pro sinibus et tangentibus,* publiés à la suite de la *Trigonometria* (³).

Les deux points se rencontrent au contraire fréquemment dans les *Opuscula* posthumes (⁴). Mais est-ce le fait d'Oughtred, ou celui de son éditeur ?

Aetonensis. Per Richardum Stokesium Collegii Regalis in Cantabrigia Socium et Arthurum Haughton, Generosum. Una cum tabulis sinuum... etc. comme ci-dessus (Bibl. Roy. de Belgique, V. H. 8078).

(¹) P. 13.

(²) La remarque en a été faite, pour la première fois, par M. W. W. Beman, dans la question 2424 de l'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, t. 9. Paris, 1902, p. 229.

(³) Ces tables sont imprimées avec un titre spécial. Londini, Excudebat Josephus Moxon, impensis Thomae Iohnson, apud quem veneunt sub signo Clavis Aureatae in Coemeterio S. Pauli. M.DC.LVII.

Elles offrent cette particularité intéressante, que les degrés n'y sont pas divisés en minutes, mais en 100 parties, comme chez Briggs-Gellibrand (*Trigonomia Britannica* Gouda 1633) et comme Stevin l'avait proposé dans la préface de la *Disme (L'Arithmetiqve de Simon Stevin de Brvges*... A Leyde, De l'Imprimerie de Christophle Plantin *La Pratiqve d'Arithmetiqve*, p. 195). Si ce dernier ne mit pas son projet à exécution dans les *Wiscontige gedachtenissen*... Leyden. Ian Bouwenz CIↃIↃCVIII, c'est qu'il se contenta d'y rééditer des tables anciennes, sans se donner la peine d'en calculer de nouvelles.

(⁴) Voir notamment : *De Sectionibus Angularibus Tractatus Analyticus*, pp. 195-212.

La croix de Saint-André pour la multiplication, les quatre points pour marquer l'égalité des deux rapports d'une proportion seraient, d'après M. Gravelaar (¹), les deux seuls signes opératoires imaginés par Oughtred, encore en usage aujourd'hui.

Je crois cependant pouvoir lui en attribuer un troisième : les deux points séparés par une barre ∺ pour désigner la *proportio continua*, c'est-à-dire la progression géométrique (²).

Oughtred donne de la *proportio continua* une définition qui, je le sais, n'est pas des plus claires, et on pourrait se demander si je traduis correctement. Mais les deux exemples qu'il apporte pour éclaircir la définition, en précisent, me semble-t-il, le sens. Ce sont (³) :

$$8 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 27$$

progression dont la raison est $\frac{3}{2}$; et

$$\alpha \cdot \beta \cdot \frac{\beta q}{\alpha} \,.\, \frac{\beta c}{\alpha q} \,.\, \frac{\beta qq}{\alpha cc} \,,\, \frac{\beta qc}{\alpha qq}$$

c'est-à-dire

$$\alpha \cdot \beta \cdot \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot \frac{\beta^3}{\alpha^2} \,,\, \frac{\beta^4}{\alpha^3} \,,\, \frac{\beta^5}{\alpha^4}$$

dont la raison est $\frac{\beta}{\alpha}$.

D'après M. Moritz Cantor (⁴), Oughtred se servirait encore dans la *Clavis Mathematica* des signes d'inégalité, $\sqsubset$ plus grand que ; et $\sqsupset$ plus petit que.

Enoncé en ces termes, ce n'est pas tout à fait exact.

Ces signes ne se trouvaient pas dans la *Clavis* de 1631, ni même à proprement parler dans celle de 1652. Oughtred les imagina

---

(¹) *Over den oorsprong van ons maalteeken* (×), cité ci-dessus; p. 2 du tiré à part.

(²) P. 13.

(³) Voici le texte d'Oughtred (p. 13) : « Proportio continua ∺ est, quando termini omnes medii inter primum et ultimum, rationum sunt tum consequentes, cum antecedentes ; ut 8, 12, 18, 27, Item

$$\alpha,\ \beta,\ \frac{\beta q}{\alpha},\ \frac{\beta c}{\alpha q}.\ \frac{\beta qq}{\alpha c},\ \frac{\beta qc}{\alpha qq}\ \text{etc.}$$

(⁴) *Vorlesungen*, 2ᵉ éd. t. 2, p. 721.

pour son essai de démonstration idéographique du dixième livre des Éléments d'Euclide, qui se trouve, dans le troisième volume du recueil où parut la *Clavis* de 1652.

Il n'est pas inutile de remarquer à cette occasion, qu'on ne lit pas non plus, dans la *Clavis Mathematica* de 1631, le rapport $\frac{\pi}{\delta}$, dont Oughtred se servira plus tard pour représenter le rapport de la circonférence au diamètre.

Les radicaux se représentent d'une manière analogue aux puissances. Voici un passage qui me dispensera d'explications ultérieures et donnera en même temps une idée du style de l'auteur. Oughtred se propose d'expliquer la multiplication et la division des radicaux, ainsi que leur réduction au même indice.

« Les radicaux hétérogènes, dit-il (¹), ne se multiplient, ni ne se divisent, sans se réduire d'abord au même genre. Cela se fait en divisant les indices des deux radicaux proposés par leur plus grand commun diviseur ; en multipliant (ensuite) les indices eux-mêmes par le quotient de l'autre, (on les ramène) aux espèces homonymes (²) (c'est-à-dire au même indice).

» Ainsi, soit proposé de multiplier ou de diviser

$$\sqrt{qq10}\left(=\sqrt[4]{10}\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{cc7}\left(=\sqrt[6]{7}\right)$$

» Premièrement on les ramène à

$$\sqrt{cccc1000}\left(=\sqrt[12]{1000}\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{cccc49}\left(=\sqrt[12]{49}\right)$$

en faisant le cube de 10 et le carré de 7. Qu'alors seulement se fasse la multiplication, ou la division.

» De même,

$$\sqrt{qqA}\left(=\sqrt[4]{A}\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{ccBq}\left(=\sqrt[6]{B^2}\right)$$

se ramènent à

(¹) P. 37.

(²) « Species cognomines ».

$$\sqrt{ccccAc}\left(=\sqrt[12]{A^3}\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{ccccBqq}\left(=\sqrt[12]{B^4}\right)$$

» C'est ce qui apparaîtra mieux par le tableau des opérations ci-joint :

$$\begin{array}{lllll}
 & \sqrt{\boxed{12}}\,1000 & \sqrt{\boxed{12}}\,49 & \sqrt{\boxed{12}}\,Ac & \sqrt{\boxed{12}}\,Bqq \\
\boxed{2}) & \sqrt{\boxed{4}}\,10 & \sqrt{\boxed{6}}\,7 \quad \boxed{2}) & \sqrt{\boxed{4}}\,A. & \sqrt{\boxed{6}}\,Bq \\
 & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{2} \text{ »}
\end{array}$$

Nous dirions aujourd'hui : pour réduire $\sqrt[4]{10}$ et $\sqrt[6]{7}$, ou bien $\sqrt[4]{A}$ et $\sqrt[6]{B^2}$ au même indice, effectuez le tableau suivant :

$$\begin{array}{lllll}
 & \sqrt[12]{1000} & \sqrt[12]{49} & \sqrt[12]{A^3} & \sqrt[12]{B^4} \\
2) & \sqrt[4]{10} & \sqrt[6]{7} \quad 2) & \sqrt[4]{A} & \sqrt[6]{B^2} \\
 & 3 & 2 & 3 & 2
\end{array}$$

A signaler ensuite chez Oughtred un emploi déjà fort bien entendu des parenthèses qu'il remplace par deux points. Quand aucune équivoque n'est à craindre, les deux points qui ferment la parenthèse sont d'ordinaire omis. Ainsi l'équation (¹)

$$Q : A + 2N : - Q : 2M + E = Aq - Eq$$

s'écrirait aujourd'hui :

$$(A + 2N)^2 - (2M + E)^2 = A^2 - E^2$$

De même (²)

$$\sqrt{q} : \frac{1}{4}\,BKq + 2CAq : + \frac{1}{2}\,BK = BC$$

(¹) P. 46.
(²) P. 61.

signifie

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\overline{\mathrm{BK}}^2 + 2\,\overline{\mathrm{CA}}^2\right)} + \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BK}} = \overline{\mathrm{BC}}$$

Cette notation, systématique chez Oughtred, est en progrès notable sur celles des géomètres de son temps. Elle n'atteint pas cependant l'élégance de la mise en colonnes de Descartes.

Reste pour terminer ce sujet à expliquer les caractères symboliques du chapitre 18.

« Il faut d'abord savoir, dit Oughtred (1), que pour abréger et soulager l'imagination, j'use presque toujours désormais des symboles suivants :

» A désigne le plus grand nombre ou la plus grande ligne donnée, E la plus petite, Æ leur rectangle, Z la somme A + E, X la différence A — E. »

Ici le manque de caractères typographiques appropriés m'obligent à interrompre la citation.

Un Z	bouclé	au *bas*	représente	la somme	$Aq + Eq$ $(= A^2 + E^2)$
» X	»	» *bas*	»	» différence	$Aq - Eq$ $(= A^2 - E^2)$
» Z	»	» *haut*	»	» somme	$Ac + Ec$ $(= A^3 + E^3)$
» X	»	» *haut*	»	» différence	$Ac - Ec$ $(= A^3 - E^3)$

Dans son *Algèbre*, Wallis fait siennes ces notations et leur décerne les plus grands éloges (2).

Son admiration se comprend. Si l'on en excepte quelques pages de l'*In Mahumedis Algebram Prolegomena* d'Adrien Romain (3), pages peu répandues d'ailleurs dans le public du XVIIe siècle, personne n'avait publié jusque-là de démonstration algébrique, sous une forme idéographique aussi brève, aussi parlante, que celle qui fut imaginée par Oughtred, grâce à ces conventions fondamentales.

Je voudrais pouvoir en donner quelque idée. Peut-être y parviendrai-je par une lettre accentuée. Posons donc, au lieu d'un Z bouclé,

---

(1) Pp. 44 et 45.

(2) *Opera*, t. 2, p. 71.

(3) Pp. 26-31. Pour plus de détails, voir mon mémoire consacré à cet ouvrage. *Le Commentaire d'Adrien Romain, sur l'in Mahumedis Algebram, etc.*, cité ci-dessus.

$$Z' = Aq + Eq \; (= A^2 + E^2)$$

Ceci fait, je traduis l'un des théorèmes en gardant exactement la disposition des calculs (1) :

$$\begin{array}{lcr} \text{« Par addition} & \qquad & \text{Par soustraction} \\ Aq + 2AE + Eq = Zq & & Aq + 2AE + Eq = Zq \\ \underline{Aq - 2AE + Eq = Xq} & & \underline{Aq - 2AE + Eq = Xq} \\ 2Aq + 2Eq = Zq + Xq = 2Z' & & 4AE = Zq - Xq \end{array}$$

$$\text{» Donc} \qquad AE = \frac{Zq - Z'}{2} = \frac{Z' - Xq}{2} = \frac{Zq - Xq}{4} \text{ »}$$

Considérées en elles-mêmes, les formules d'Oughtred ont perdu tout intérêt. Seules la nouveauté des caractères employés, la disposition artistique des formules, la concision du style, méritent encore l'attention. Pour apprécier le mérite de cette page de la *Clavis Mathematica*, il faut lui comparer un ouvrage célèbre, publié cette même année 1631, par Beaugrand, et consacré en bonne partie à un sujet analogue, je veux dire : Les *Notae priores* de Viète (2). On sera surpris des progrès faits par le calcul algébrique depuis le géomètre français.

---

(1) P. 46. Pour la facilité de la lecture, voici le raisonnement d'Oughtred en notations modernes. Posons :

$$a + e = z, \qquad a - e = x, \qquad a^2 + e^2 = z'$$

On a :

$$\begin{array}{lcr} \text{» Par addition} & \qquad & \text{Par soustraction} \\ a^2 + 2ae + e^2 = z^2 & & a^2 + 2ae + e^2 = z^2 \\ \underline{a^2 - 2ae + e^2 = x^2} & & \underline{a^2 - 2ae + e^2 = x^2} \\ 2a^2 + 2e^2 = z^2 + x^2 = 2z' & & 4ae = z^2 - x^2 \end{array}$$

» Donc

$$ae = \frac{z^2 - z'}{2} = \frac{z' - x^2}{2} = \frac{z^2 - x^2}{4}. \text{ »}$$

Je corrige une faute de typographie non relevée dans l'errata. Oughtred écrit :

$2Aq + 2Eq = Zq + Xq = Z'$, au lieu de $= 2Z'$
($2a^2 + 2e^2 = z^2 + x^2 = z'$ au lieu de $= 2z'$).

(2) *Francisci Vietae Fontenaeensis in artem analyticem isagoge. Eiusdem ad logisticem speciosam notae priores, nunc primum in lucem editae. Recen-*

Les démonstrations du chapitre 18 de l'édition de 1631 ont été beaucoup remaniées dans l'édition de 1652. Plus d'une fois elles y ont perdu. Mais, en 1631, Oughtred devançait son temps. Il éprouva aussi le chagrin d'être mal servi par son imprimeur. Les formules sont criblées de fautes d'impression. Lettres simples, lettres bouclées en bas, lettres bouclées au haut, mal distinguées l'une de l'autre par les typographes, furent souvent confondues. Pour beaucoup de contemporains les théorèmes et les problèmes d'Oughtred devinrent ainsi d'indéchiffrables logogriphes.

L'auteur s'en plaint dans la préface de l'édition de 1652 (1).

« Mes démonstrations, dit-il, consistaient moins en paroles qu'en peinture par signes. Dans les commencements beaucoup les trouvèrent difficiles. Rebutés par leur nouveauté ils se figurèrent une Chimère ou un Sphinx. Cependant si se mettant au-dessus de ce préjugé on se décide à entrer dans cette voie avec attention et persévérance, on verra combien facile et claire est l'entreprise ! »

Puis il ajoute, non sans quelque grain de fierté (2) :

« Ma belle méthode symbolique n'accable pas la mémoire, par une multitude de termes ; ne charge pas l'imagination, ni ne la distrait, par la comparaison ou la discussion d'un grand nombre d'objets divers ; mais elle fait voir d'un coup d'œil toute la suite des opérations et du raisonnement. Enfin, l'énoncé des théorèmes peut être compris, non plus seulement par un peuple unique, mais par tous les peuples, quelle que soit leur langue, pourvu qu'ils connaissent le sens des symboles ! »

Voilà une idée qui n'est certes pas banale. Un géomètre capable de l'énoncer dès 1652 mérite mieux qu'une simple mention dans l'histoire des mathématiques !

---

suit, scholiis illustravit J. D. B. Parisiis apud Guillelmum Baudry, via amygdalina, prope collegium Grassinorum. M.DC.XXXI. D'après G. Eneström BIBLIOTHECA MATHEMATICA, 3e série, tom. 6, Leipzig, 1905, p. 109. Réédité dans les *Vietae Opera* de 1646, pp. 13-41.

(1) **Éd. de 1652, f° A_4 r° et v°.**

(2) **Éd. de 1652, f° A_4 r°.**

(3) « Theorema denique profert, non uni tantum genti intelligendum, sed omnium, quotquot sunt ubique terrarum linguis (modo de notis constet) efferendum. » Éd. de 1652, f° A_4 v°.

V.

Non moins intéressante que les notations algébriques d'Oughtred, est son application de l'algèbre à la géométrie. L'auteur expose sa méthode à un double point de vue : la démonstration des théorèmes et la résolution des problèmes. Nous suivrons le même ordre.

La démonstration des théorèmes fait l'objet du chapitre 19 (¹), intitulé : *Secundi Elementi Euclidis traditio, pro usu aequationis analyticae*. Littéralement : Exposé du second livre des *Éléments* d'Euclide, pour l'emploi de l'équation analytique. Nous dirions plus clairement : Démonstration analytique des propositions du second livre des *Éléments* d'Euclide.

C'était la première fois qu'un géomètre abordait aussi franchement un essai de ce genre.

Énoncées sous une forme algébrique, les 10 premières propositions deviennent à peu près intuitives.

« *Prop. 1* (²). Si

$$Z = A + E + I$$

on aura

$$ZB = BA + BE + BI.$$

» D'après la prop. 8 du chap. 4. »

Je traduirais volontiers ces mots : « d'après la prop. 8 du chap. 4 », par : *conséquence immédiate du calcul* ; car c'est bien là leur sens. Style du temps. Les géomètres croyaient manquer de rigueur quand ils se dispensaient d'indiquer les théorèmes sur lesquels ils s'appuyaient ; ce qui se faisait, il est vrai, souvent par simples numéros de proposition et de chapitre. Qu'aujourd'hui un calcul élémentaire se présente sous la plume, nous l'effectuons chaque fois au fur et à mesure. En 1631, il n'en était pas ainsi. Le calcul algébrique, science neuve, passait encore pour très difficile. Oughtred exécute le calcul une fois pour toutes ; puis invoque, à l'instar d'un théorème, le résultat obtenu.

(¹) Pp. 49-59.

(²) P. 49. Les propositions d'Oughtred sont précédées d'un simple numéro d'ordre. J'y ajoute, pour la clarté, le mot « proposition » en abrégé.

C'est le sens qu'il faut attacher à toutes les indications du même genre.

« *Prop. 2* (¹). Si

$$Z = A + E$$

on aura

$$Zq\ (= Z^2) = ZA + ZE.$$

» D'après la prop. 8 du chap. 4.

» *Prop. 3.* Si

$$Z = A + E$$

on aura

$$ZA = Aq + AE\ (= A^2 + AE)$$

et

$$ZE = AE + Eq\ (= AE + E^2).$$

» D'après la prop. 8 du chap. 4.

» *Prop. 4.* Si

$$Z = A + E$$

on aura

$$Zq\ (= Z^2) = Aq + Eq + 2AE\ (= A^2 + E^2 + 2AE).$$

» D'après la prop. 8 du chap. 4. »

Dans les *propositions 5 et 6* (²), Oughtred résout l'équation du second degré, sous les trois formes habituelles ; équivalant, on le sait, à

$$x^2 + px = q^2, \qquad x^2 - px = q^2, \qquad px - x^2 = q^2\ ;$$

sujet usé, sans intérêt pour nous.

Les quatre propositions suivantes n'ont plus même le semblant de démonstration des quatre premières :

« *Prop. 7* (³). Si

$$Z = A + E$$

on aura

$$2ZA + Eq = Zq + Aq \qquad (2ZA + E^2 = Z^2 + A^2),$$

(¹) P. 49.
(²) Pp. 49-54.
(³) P. 54.

et

$$2ZE + Aq = Zq + Eq \qquad (2ZE + A^2 = Z^2 + E^2).$$

» *Prop. 8*. Si

$$Z = A + E$$

on aura

$$Q : Z + A : = 4ZA + Eq \qquad [(Z + A)^2 = 4ZA + E^2],$$

et

$$Q : Z + E : = 4ZE + Aq \qquad [(Z + E)^2 = 4ZE + A^2].$$

» *Prop. 9*. Si

$$Z = A + E$$

on aura

$$Aq + Eq = \frac{2}{4}Zq + \frac{2}{4}Xq \qquad \left(A^2 + E^2 = \frac{2}{4}Z^2 + \frac{2}{4}X^2\right) »$$

Chez Oughtred, X, il faut se le rappeler, vaut toujours A-E.

« *Prop. 10*. Si

$$Z = A + E$$

on aura

$$Zq + Eq = \frac{2}{4}Aq + 2Q : \frac{1}{2}A + E$$

$$\left[Z^2 + E^2 = \frac{2}{4}A^2 + 2\left(\frac{1}{2}A + E\right)^2\right]. »$$

Écrite dès 1685, cette page est, au point de vue bien entendu des notations, vraiment trop neuve et trop curieuse pour éprouver la tentation de m'excuser de l'avoir transcrite en entier, malgré ses longueurs et ses maladresses. Qu'on la compare au texte d'Euclide ! On comprendra l'admiration qu'elle provoqua chez Wallis ! (¹)

N'explique-t-elle pas un peu, sa colère contre Descartes ?

Appliquer tapageusement l'algèbre à la géométrie ! C'était suivre la voie ouverte par Oughtred, et cela sans nommer, même en passant, le géomètre qui l'avait frayée !

(¹) *O. c.*, ch. XXVI, pp. 124 et 125. Le passage y est reproduit intégralement.

La solution de la *proposition 11* (¹), diviser une droite en moyenne et extrême raison, mérite l'attention. Devenue classique dans nos manuels de géométrie, elle diffère beaucoup des deux solutions d'Euclide (²). Anaritius l'attribue à Héron (³). Mais ceci, Oughtred l'ignorait et d'ailleurs n'importe guère.

En traduisant, je transcrirai les formules, au fur et à mesure, entre parenthèses, d'après nos habitudes modernes.

« Couper une ligne donnée de telle manière, que le rectangle de la ligne entière et du plus petit segment, soit égal au carré du plus grand.

» Solution. Si

$$\mathrm{Z} = \mathrm{A} + \mathrm{E} \qquad (a = x = y)$$

et si

$$\sqrt{}\, q\, \frac{5}{4}\, \mathrm{Z}q - \frac{1}{2}\, \mathrm{Z} = \mathrm{A} \qquad \left(\sqrt{\frac{5}{4}\, a^2} - \frac{1}{2}\, a = x\right)$$

on aura

$$\mathrm{ZE} = \mathrm{A}q \qquad (ay = x^2)$$

» Car

$$\frac{5}{4}\, \mathrm{Z}q = \mathrm{Q} : \frac{1}{2}\, \mathrm{Z} + \mathrm{A} : = \frac{1}{4}\, \mathrm{Z}q + \mathrm{ZA} + \mathrm{A}q$$

$$\left[\frac{5}{4}\, a^2 = \left(\frac{1}{2}\, a + x\right)^2 = \frac{1}{4}\, a^2 + ax + x^2\right]$$

» Par conséquent

$$\mathrm{ZA} + \mathrm{A}q = \mathrm{Z}q = \mathrm{ZA} + \mathrm{ZE}$$
$$(ax + x^2 = a^2 = ax + ay)$$

Donc.

» On voit ainsi le moyen de couper une ligne donnée $\mathrm{Z}\,(= a)$ en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire de manière à avoir

$$\mathrm{Z} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{E} ∺ \qquad \left(\frac{a}{x} = \frac{x}{y}\right)$$ »

(¹) Pp. 54 et 55.

(²) Liv. II, prop. 11 ; Liv. VI, prop. 30.

(³) *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata edidit Maximilianus Curtze.* Lipsiae. In Aedibus B. G. Teubneri, 1899, pp. 106-108.

Afin d'éclaircir ce raisonnement, Oughtred y ajoute, mais sans explications, la figure ci-contre (fig. 1). Elle ne permet pas de doute sur la manière dont il est arrivé à sa construction. Il a posé l'équation

$$(a - x)a = x^2$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2}$$

Mais rien n'était probablement moins clair, pour un lecteur de 1631. Car que pouvait bien signifier pour lui cette formule tombant on ne savait d'où $\sqrt{q \, \frac{5}{4} \, Zq} - \frac{1}{2} \, Z = A$? Aussi dans l'édition de 1652, Oughtred modifie-t-il complètement sa première rédaction.

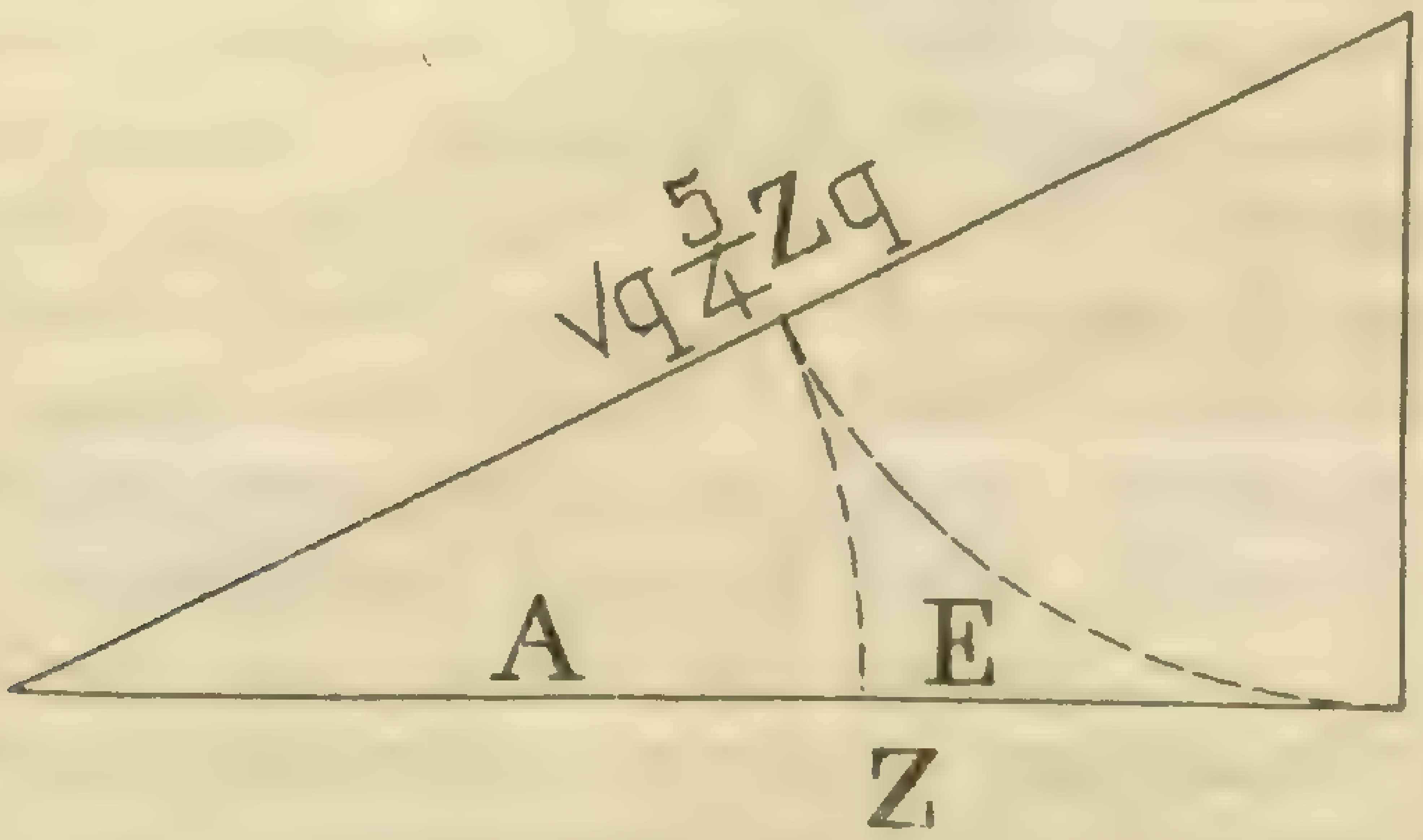


Fig. 1.

« Soit A ($= x$), dit-il (1), le plus grand segment. Le plus petit sera B — A ($= a - x$). Multipliez B — A par B, il vient :

$$Bq - BA = Aq \qquad (a^2 - ax = x^2)$$

» Ou

$$Aq + BA = Bq \qquad (x^2 + ax = a^2)$$

» Donc (2)

---

(1) P. 75.

(2) $\sqrt{u}$ signifie *Radix universalis*. Ce mot très usité au XVIe siècle, indiquait que le radical affectait un polynome.

$$\sqrt{u}:Bq+\frac{1}{4}Bq:-\frac{1}{2}B=A \qquad \left[\sqrt{(a^2+\frac{1}{4}a^2)}-\frac{1}{2}a=x\right]$$

d'après la prop. 9, du chap. 16. »

Dans son *Algèbre*, Wallis (¹) donne la solution d'Oughtred sous cette dernière forme. Elle est évidemment meilleure que la première, et on s'étonne qu'Oughtred ne s'y soit arrêté de prime abord.

« Nous nous émerveillons moins des solutions des anciens, s'écrie Wallis (²), maintenant que nous voyons par quelle route directe nous pouvons y arriver nous-mêmes ! »

Par la première solution d'Oughtred, ce n'était pas si clair que cela ! Quant à la seconde, elle est postérieure à la *Géométrie* de Descartes. Pourquoi Wallis oublie-t-il d'en faire la remarque ? Il est vrai que les propositions 12 et 13 sont à l'abri de ma critique.

» La *proposition 12* (³) donne l'expression du carré du côté opposé à un angle aigu en fonction des côtés du triangle.

La démonstration d'Oughtred tient en deux lignes.

Soit BCD le triangle proposé et CA la hauteur abaissée du sommet C sur la base BD. Aucun des carrés n'est dessiné.

L'auteur fait deux figures, trop simples pour être reproduites ici, car à part la hauteur CA, elles ne contiennent aucune construction. Dans l'une d'elles, le pied A de la hauteur tombe sur la base elle-même ; dans l'autre, elle tombe sur son prolongement.

» Si l'angle B du triangle BCD est aigu

$$BCq + BDq = DCq + 2BD \times BA$$
$$(BC^2 + BD^2 = DC^2 \times 2BD \times BA)$$

» Car

$$BCq - BAq = CAq = DCq - Q : BD \underline{\underline{- BA}}$$
$$- BDq + 2BD \times BA - BAq$$

$$\left[\begin{aligned} BC^2 + BA^2 = CA^2 = DC^2 - (BD \underline{\underline{- BA)^2}} \\ - BD^2 + 2BD \times BA - BA^2 \end{aligned}\right] ».$$

(¹) *O. c.*, p. 132.

(²) *O. c.*, p. 132.

(³) P. 55.

On remarquera le binome souligné par deux barres. Oughtred se sert souvent de cette notation, pour indiquer que l'expression soulignée doit être biffée et remplacée par une autre équivalente.

Prop. 13 (¹). Démonstration analogue pour l'expression du carré du côté opposé à l'angle obtus d'un triangle.

Prop. 14 (²), dernière du second livre des *Éléments*. Construire un carré équivalent à un rectangle donné.

Au point de vue de la construction, la solution d'Oughtred est celle d'Euclide. Il décrit la demi-circonférence sur la somme des côtés comme diamètre et au point de division mène l'ordonnée perpendiculaire ; mais la justification de cette construction est analytique et revient à résoudre une équation du second degré.

Ces trois dernières propositions sont reproduites par Wallis, dans son *Algèbre* (³), comme exemple de l'utilité de l'application de l'algèbre à la géométrie.

Oughtred termine le chapitre 19 par quelques théorèmes d'un intérêt moindre.

D'après M. Tropfke (⁴), on y trouverait cependant énoncé explicitement le théorème du rectangle des segments déterminés par la circonférence, sur deux sécantes menées par un point extérieur au cercle. Ce théorème omis, on le sait, par Euclide, au 3ᵉ livre de ses *Éléments*, aurait été donné ici pour la première fois. La remarque, ajoute M. Tropfke, ne porte que sur l'énoncé *explicite* du théorème. Euclide traitant, dans la proposition 36, le cas de la tangente et de la sécante menées par un point extérieur au cercle, tous les géomètres devaient en avoir, depuis longtemps, déduit un corollaire aussi simple.

C'est évident, mais la remarque de M. Tropfke demande un correctif, ou du moins une addition.

Le savant historien se sert, pour dire cela, de la *Clavis Mathematica* de 1667 (⁵). Je trouve déjà la proposition dans l'édition de 1652 (⁶), mais elle fait défaut dans celle de 1631.

(¹) P. 55.

(²) P. 56.

(³) *O. c.* p. 133. — Le chapitre entier de Wallis est intitulé : Cap. XXIX Accommodatio Algebrae, ad Geometriam, aliaque subjecta.

(⁴) *Geschichte der Elementar Mathematik*, t. 2. Berlin Veit, 1903, p. 85.

(⁵) Ed. 1667, p. 69.

(⁶) Ed. 1652, p. 69.

VI

Le chapitre XX (1) est le plus remarquable de la *Clavis Mathematica*. L'auteur l'intitule : « Exemples de l'équation analytique, pour l'invention des théorèmes et la solution des problèmes » (2).

Ces exemples sont au nombre de 20. Nous allons les parcourir. Pour apprécier le mérite des solutions, il faut ne pas perdre de vue les problèmes similaires de l'*Effectionum geometricarum canonica recensio* par Viète (3), dont Oughtred s'inspire d'ailleurs constamment.

On connaît l'objet des *Effections géométriques* de Viète.

Depuis longtemps plusieurs géomètres, entre autres Regiomontan (4) et Pedro Nuñez (5), lorsqu'ils étaient dans l'impossibilité de résoudre géométriquement certains problèmes, en cherchaient la solution *numérique* au moyen des relations *numériques* de la figure, et arrivaient à une équation du 2^d degré. Cette équation résolue leur donnait un simple *nombre*, comme réponse du problème.

Le but des *Effections géométriques* est de généraliser cet emploi des équations. Viète y montre comment, si l'on applique son algèbre nouvelle aux problèmes de géométrie, et si l'on est conduit à une équation du second degré ou à une équation bicarrée, on peut construire géométriquement, en lignes, la solution au moyen des coefficients de l'équation. Les constructions de Viète sont très simples au point de vue graphique ; mais il les explique dans ce style sibyllin qui lui est propre. Oughtred est, au contraire, fort clair.

---

(1) Pp. 59-88.

(2) « Exempla aequationis analyticae, pro theorematibus inveniendis, problematibusque solvendis. » p. 59.

(3) (Bibl. Roy. de Belgique, V. 4908). L'ouvrage parut en 1593, sans lieu ni date, ni nom d'imprimeur. Il a été réédité dans les Vietae Opera, de 1646, pp. 229- 238.

(4) *Doctissimi viri... Joannis de Regio Monte de triangulis omnimodis libri quinque*... Norimbergae. In aedibus Io. Petri, MDXXXIII, lib. 2, N° 12, p. 51 ; et N° 23, pp. 55 et 56.

(5) *Libro de Algebra en arithmetica y geometria. Compuesto por et Doctor Pedro Nuñez*... En Anvers. En casa de la biuda y herederos de Iuan Stelsio, 1567. N° 46, ff° 270 v°-271 v° ; et N° 51, ff° 273 v°-274 v°.

Les énoncés des dix premiers problèmes sont évidemment empruntés à Marin Ghetaldi (¹). Sujet et figures, souvent identiques, ne laissent aucun doute à cet égard. Souvent aussi les constructions des deux géomètres sont absolument les mêmes. Mais les brèves et élégantes solutions analytiques d'Oughtred n'ont plus rien de la pesanteur des longues et pénibles solutions synthétiques de Ghetaldi.

Voici à titre d'exemple le *Problème 1* (²). Pour faciliter la lecture, je transcris, comme ci-dessus, entre parenthèses, les formules en notations modernes équivalentes.

« Euclide (³) a enseigné le moyen de diviser une droite Z($= a$) en deux parties A($= x$) et E($= y$) telles que

$$\mathrm{ZE} = \mathrm{A}q \qquad (ay = x^2)$$

» C'est une section presque divine. Ce me sera donc, je l'espère, un porte-bonheur de commencer par la généralisation de ce problème, et d'enseigner le moyen de diviser une ligne donnée Z($= a$) de telle manière que le rectangle de la ligne totale Z($= a$) et, du plus petit segment, soit au carré du plus grand, dans le rapport donné de R à S$\left(= \frac{r}{s}\right)$.

» Soit A($= x$) le plus grand segment, le plus petit sera Z — A($= a - x$) et le rectangle Zq — ZA($= a^2 - ax$). Or on a

$$\mathrm{Z}q - \mathrm{ZA} \,.\, \mathrm{A}q \; :: \; \mathrm{R} \,.\, \mathrm{S} \qquad \left(\frac{a^2 - ax}{x^2} = \frac{r}{s}\right)$$

» Donc par la prop. 4 du chap. 6 (⁴)

$$\mathrm{Z}q\mathrm{S} - \mathrm{ZSA} = \mathrm{RA}q \qquad (a^2s - asx = rx^2)$$

(¹) *Marini Ghetaldi Patritii Ragusini, Variorum Problematum Collectio. Cum Privilegiis.* Venetiis. Apud Vincentium Fiorinam MDCVII. (Bibl. Roy. de Belgique, V. H. 8007).

(²) Pp. 59-61. C'est le prob. 27 de Ghetaldi, *O. c.* pp. 58-60.

(³) *Éléments*, l. II pr. 11 ; et l. VI prop. 30. J'ai exposé ci-dessus la solution donnée par Oughtred lui-même, au chap. 19 de la *Clavis Mathematica*.

(⁴) J'ai donné ci-dessus le sens de ces indications.

ou par la prop. 5 du chap. 16

$$\mathrm{RA}q + \mathrm{ZSA} = \mathrm{Z}q\mathrm{S} \qquad (rx^2 + asx = a^2s)$$

ou par la prop. 6 du chap. 16

$$\mathrm{A}q + \frac{\mathrm{ZSA}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{Z}q\mathrm{S}}{\mathrm{R}} \qquad \left(x^2 + \frac{as}{r}x = \frac{a^2s}{r}\right)$$

» Donc par la prop. 6 du chap. 19

$$\sqrt{q} : \frac{\mathrm{Z}q\mathrm{S}q}{4\mathrm{R}q} + \frac{\mathrm{Z}q\mathrm{S}}{\mathrm{R}} : - \frac{\mathrm{ZS}}{2\mathrm{R}} = \mathrm{A}$$

$$\left[\sqrt{\left(\frac{a^2s^2}{4r^2} + \frac{a^2s}{r}\right)} - \frac{as}{2r} = x\right].$$

» De là ce théorème :

» Qu'on fasse le produit des carrés de la ligne donnée et du second terme du rapport donné ; qu'on le divise par le quadruple du carré du premier terme de ce rapport ; qu'on y ajoute le quotient du produit du carré de la ligne donnée et du second terme du rapport, divisé par le premier terme de ce rapport ; qu'on extraie la racine carrée de cette somme ; qu'on en retranche le quotient du produit de la ligne donnée et du second terme du rapport, divisé par le double du premier terme de ce rapport : le reste ainsi obtenu sera le plus grand segment.

» Géométriquement, comme suit (¹) : soit (fig. 2)

$$\mathrm{OZ} = \mathrm{Z}(= a) \quad \text{et} \quad \mathrm{OR} = \mathrm{R}(= r) \quad \text{et} \quad \mathrm{OS} = \mathrm{S}(= s)$$

» Qu'on fasse un angle comme sur la figure ; qu'on mène RS et sa parallèle ZB, et qu'on mesure

$$\mathrm{BC} = \mathrm{OZ}$$

qu'on décrive un demi-cercle sur le diamètre OC, et qu'au point B on mène BD à angles droits ; qu'on divise OB en deux parties égales en F, et qu'on joigne FD.

» Puisque

(¹) « Geometrice sic », p. 60.

$$\mathrm{OR}\,.\,\mathrm{OS} :: \mathrm{OZ}\,.\,\mathrm{OB} \qquad \left(\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OS}} = \frac{\mathrm{OZ}}{\mathrm{OB}}\right)$$

on aura

$$\mathrm{OB} = \frac{\mathrm{ZS}}{\mathrm{R}} \qquad \left(\mathrm{OB} = \frac{as}{r}\right)$$

et

$$\mathrm{OF} \text{ ou } \mathrm{BF} = \frac{\mathrm{ZS}}{2\mathrm{R}} \qquad \left(\mathrm{OF} = \mathrm{BF} = \frac{as}{2r}\right)$$

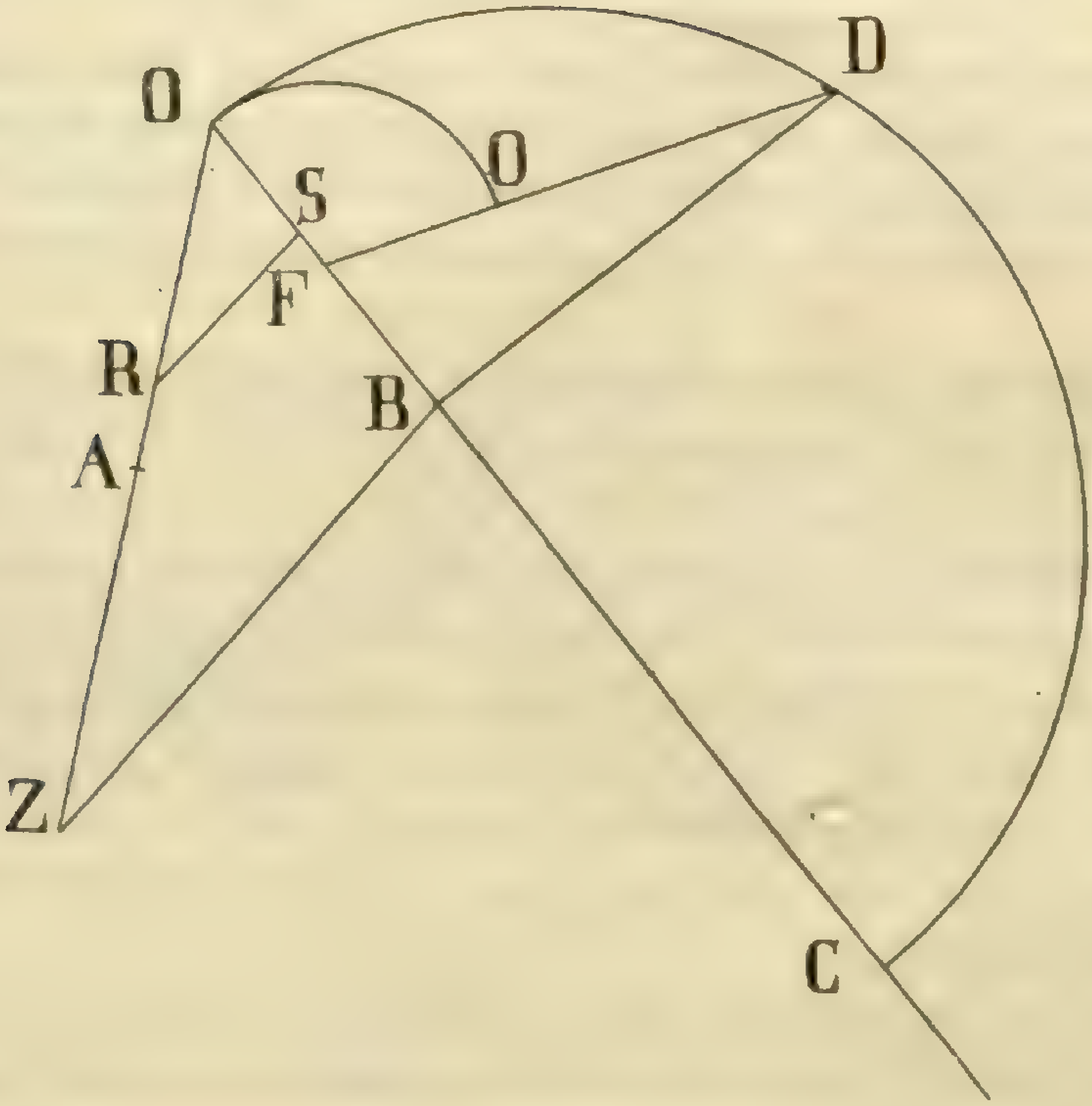


Fig. 2.

et

$$\mathrm{BF}q = \frac{\mathrm{Z}q\mathrm{S}q}{4\mathrm{R}q} \qquad \left(\mathrm{BF}^2 = \frac{a^2s^2}{4r^2}\right)$$

et

$$\mathrm{OB} \times \mathrm{BC} \text{ ou } \mathrm{BD}q = \frac{\mathrm{Z}q\mathrm{S}}{\mathrm{R}} \qquad \left(\mathrm{OB} \times \mathrm{BC} = \mathrm{BD}^2 = \frac{a^2s}{r}\right)$$

» Par conséquent

$$\mathrm{FD} = \sqrt{q} : \frac{\mathrm{Z}q\mathrm{S}q}{4\mathrm{R}q} + \frac{\mathrm{Z}q\mathrm{S}}{\mathrm{R}} : \qquad \left[\mathrm{FD} = \sqrt{\left(\frac{a^2s^2}{4r^2} + \frac{a^2s}{r}\right)}\right].$$

» Si vous en retranchez

$$\mathrm{OF} = \frac{\mathrm{ZS}}{2\mathrm{R}} \qquad \left(\mathrm{OF} = \frac{as}{2r}\right)$$

il restera DO pour le plus grand segment OA. La ligne Z est donc coupée au point A, comme il est demandé (1). »

Dans l'édition de 1652 (2), Oughtred donne de la formule, une construction géométrique différente. Mais peu importe, car elle est postérieure à la *Géométrie* de Descartes et perd son intérêt pour nous.

On remarquera tout d'abord, que la solution de 1631 est à l'abri des reproches mérités par le problème de la division d'une droite en moyenne et extrème raison. L'équation est franchement établie, la solution simple et logique, la construction parfaitement naturelle.

Le progrès fait depuis l'*Effectionum Geometricarum Canonica Recensio* de Viète est marquant. Mais Oughtred n'atteint pas Descartes.

Il y a d'abord la notation des puissances, qui rend ses formules bien moins parlantes que celles du géomètre français. Ensuite une seconde cause d'infériorité est l'emploi des majuscules au lieu des minuscules. Dans les 9 propositions suivantes, il en ajoute une troisième : Quantités connues et inconnues de la question étant des lignes, il les représente par deux lettres et alourdit d'autant son calcul algébrique.

Ce n'est pas Descartes qui eût commis cette maladresse.

Et voilà une des plus incontestables supériorités de l'auteur de la *Géométrie*, sur celui de la *Clavis*.

Oughtred a quelques inspirations vraiment remarquables ; mais, dans l'application, hésite, s'arrête, et n'en déduit pas toutes les conséquences. Descartes saisit d'un coup d'œil ce qu'il y a de bon, même chez les autres, et en tire, avec une maîtrise incomparable, tout le parti possible.

Cette critique faite, les démonstrations d'Oughtred sont simples, naturelles, conduites avec régularité et méthode. Toutes sont intéressantes ; mais je ne m'arrêterai qu'aux principales.

---

(1) Oughtred sous-entend évidemment : en portant sur OZ, OA = OD.
(2) Pp. 81 et 82.

Prob. 2-11. Résolutions de divers triangles donnés par leurs éléments et obtenues par des équations du 2^d degré. Tous les énoncés, sauf un, sont empruntés à Marin Ghetaldi. On en trouvera le détail en note (¹). Ghetaldi a souvent déjà les mêmes solutions qu'Oughtred ; solutions parfois des plus ingénieuses ; mais, pour plusieurs d'entre elles, il devait être presque impossible de deviner, comment l'auteur y parvenait. Oughtred, au contraire, met le problème en équation, la résout, puis construit, d'une manière toute logique, la formule obtenue comme valeur de l'inconnue. C'est, en définitive, la méthode exposée par Descartes

---

(¹) Pour abréger, soient : t le triangle ABC (quand il est rectangle $A = 90°$)
a, b, c, les trois côtés.
h la hauteur abaissée de l'angle A sur a,
p_b et p_c, les projections de b et c sur a.

Prob. 2. On donne : $A = 90°$, b et $p_b - p_c$; on demande, a et t. *Oughtred*, pp. 61 et 62 ; *Ghetaldi*, prob. 18, pp. 43-45. Dans ce qui suit : O = Oughtred ; G = Ghetaldi.

Prob. 3. On donne : $A = 90°$, $b - c$ et h ; on demande, a et t. O, p. 62 ; G, prob. 20, pp. 48 et 49.

Prob. 4. On donne : $A = 90°$. $b + c$ et h ; on demande, a et t. O, pp. 62 et 63 ; G. prob. 21, pp. 50 et 51.

Prob. 5. On donne : $A = 90°$, b et p_c ; on demande, p_b a et t. O, pp. 63 et 64 ; G, prob. 19, pp. 46 et 47.

Prob. 6. On donne : $A = 90°$, $b + c$, $p_b - p_c$; on demande, $b - c$, a et t. O, pp. 64 et 65 ; G, prob. 8, pp. 25-27.

Prob. 7. On donne : $A = 90°$, $b - c$, $p_b - p_c$; on demande, $b + c$, a et t. O, pp. 65 et 66 ; G, prob. 9, pp. 28-30.

Prob. 8. On donne : $a - c$, $c - b$, $p_c - p_b$; on demande, a. $b + c$ et t. O, pp. 66-68 ; G. prob. 5, pp. 15 et 16.

Prob. 9. On donne : $b + c$, $p_b - p_c$, h ; on demande, a, $b - c$ et t. O. pp. 68 et 69 ; G, prob. 2, pp. 10 et 11.

Prob. 10. On donne : $b - c$, $p_b - p_c$, h ; on demande, a, $b + c$ et t. O, pp. 69-71 ; G, prob. 1, pp. 7-9.

Prob. 11. On donne : $A = 90°$, $a - b$, $a - c$; on demande a et t. O, pp. 71-72.

L'énoncé de ce problème n'est plus emprunté à Ghetaldi. La solution est très élégante. Oughtred s'y ressaisit et représente, comme dans le problème 1. les éléments connus et inconnus de la question par des lettres uniques. On conçoit mal aujourd'hui comment il n'aît pas aperçu la clarté que cette notation eût donnée aux solutions des problèmes 2-10.

au commencement du premier livre de la *Géométrie*. On conçoit que Wallis lui en veuille de l'avoir fait sans nommer Oughtred. Mais, sauf les géomètres anciens, et une fois en passant Cardan (¹), Descartes ne nomme jamais personne.

Prob. 12. On donne une droite ; on demande de construire sur cette droite un parallélogramme tel, qu'en en retranchant un parallélogramme équivalent à un polygone donné, le parallélogramme restant soit semblable à un parallélogramme donné (²).

Ce problème conduit, on le sait, à la forme adoptée par les Grecs, pour l'équation de l'ellipse (³). Mais voilà une idée que ni Oughtred, ni Descartes lui-même, ne pouvaient avoir. Bien des années après eux, Tacquet dans ses excellents *Éléments de Géométrie* d'après Euclide, se contente de dire à propos de ce problème : « Proposition difficile, qui embarrasse les élèves et ne sert presqu'à rien. » (⁴) Puis il passe outre, en omettant la solution.

Prenons donc le problème, comme simple application de l'équation du second degré à la résolution d'un problème de géométrie. Voici, en deux mots. le raisonnement d'Oughtred. Tous les éléments du problème, même la surface, sont représentés par une lettre unique, à l'exception de la droite donnée AB, qui l'est par deux lettres, ce qui rend les formules assez étranges. Je me sers, pour la clarté, de notations modernes.

Soit, a la droite donnée ; x la longueur du segment, base du parallélogramme à retrancher ; s la surface donnée du polygone équivalent au parallélogramme à retrancher ; $\frac{b}{h}$ le rapport connu de la base à la hauteur du parallélogramme restant. D'après cela, la hauteur du parallélogramme à retrancher et du parallélogramme

---

(¹) *Œuvres de Descartes*, Ed. Adam et Tannery, t. 6, pp. 471, 472 et 474.

(²) Pp. 72-74. C'est la prop. 28 du 6ᵉ livr. des *Éléments* d'Euclide.

(³) Voir sur ce sujet les travaux de M. Zeuthen, notamment : *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen-âge. Edition française, traduction de Jean Mascart* ; aux endroits indiqués dans la table des matières.

(⁴) *Elementa Geometriae planae ac solidae. Quibus accedunt selecta ex Archimede Theoremata. Auctore Andrea Tacquet Societatis Jesu... Editio tertia correctior*. Antverpiae, Apud Jacobum Meursium. Anno M.DC.LXXIII. « Prop. 27, 28, 29 (lib. VI) tyronibus facessunt negotium et nullius fere sunt usus. » p. 216.

restant est $\frac{h}{b}(a - x)$. Par conséquent, l'équation du problème est

$$\frac{h}{b}(a - x)\,x = s \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b}{h}}$$

Oughtred, sans dire pourquoi, ne tient aucun compte de la deuxième solution, qui est cependant positive. Euclide fait de même, mais prend soin de distinguer dans l'énoncé les deux solutions, en disant : « il faut que le parallélogramme défaillant, ne soit pas plus grand que le parallélogramme appliqué sur la moitié de la droite donnée ». Cette limitation d'un problème était ce que les Grecs appelaient un *diorisme* (¹). Mais Oughtred n'en annonce pas et n'a aucune raison pour négliger la deuxième racine.

Suit une construction géométrique de la racine, qui n'a rien d'assez saillant pour mériter d'être reproduite ici ; puis une discussion. Dans le cas où $\frac{a^2}{4} < \frac{b}{h}$, dit Oughtred, au lieu de prendre pour hauteur $\frac{h}{b}(a - x)$, prenez $\frac{b}{h}(a - x)$.

Prob. 13. On donne une droite ; on demande de construire sur cette droite un parallélogramme tel, qu'en lui ajoutant un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné, on obtienne un parallélogramme équivalent à un polygone donné (²).

Solution analogue à la précédente et qui appelle les mêmes remarques. Elle présente notamment la même singularité au point de vue des notations : la droite donnée AB seule est représentée par deux lettres.

(¹) Voir Zeuthen, *O. c.*, pp. 81 et 82.

(²) Pp. 74-76. C'est la prop. 29 du 6ᵉ livre des *Éléments* d'Euclide.

Les prop. 28 et 29 d'Euclide étaient aussi employées, à la solution de l'équation du second degré ; mais il sortirait du cadre de notre travail de nous étendre sur ce sujet, fort bien traité d'ailleurs par divers auteurs. Voir p. ex. *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen von Ludwig Matthiessen*. Leipzig, Teubner, 1878, pp. 926-931. Et surtout Zeuthen, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen-âge*, aux passages indiqués dans la table des matières.

Prop. 14. Une résolution de triangle (¹).

La *proposition 15* (²) est l'une de celles qui font le plus d'honneur à Oughtred :

« Étant données les bases A$q(=a^2)$ et E$q(=e^2)$ d'un tronc de pyramide et sa hauteur L$(=l)$, trouver la mesure du tronc. »

Le problème était classique. On le trouve chez Héron (³) et Léonard de Pise l'avait emprunté aux Arabes (⁴). Oughtred fait une figure, où il considère le tronc de pyramide, comme la différence de deux pyramides quadrangulaires. Il n'y met que quatre lettres : Le long de deux côtés homologues des bases du tronc, A et E ; puis à côté des hauteurs de la petite pyramide et du tronc, respectivement T et L.

» Il faut savoir, dit-il alors, que d'après les propositions 7 et 10, du livre 12 des *Éléments* (d'Euclide) le parallélipipède vaut trois pyramides et le cylindre trois cônes de même base et de même hauteur.

» On doit chercher premièrement la hauteur T$(=x)$ de la pyramide retranchée ; comme ceci :

(¹) Pp. 76 et 77. En réalité il en contient deux :

1° On donne b, c et A ; on demande A. Nous écrivions la solution trouvée :

$$a^2 = \frac{2bc \text{ sin vers } A}{R} + (b-c)^2$$

Pour en vérifier l'exactitude, il suffit de se rappeler que

$$\text{sin vers } A = R - \cos A$$

en faisant ensuite R = 1, on obtient la formule connue

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

2° On donne a, b et c ; on demande A. La formule obtenue comme solution équivaut à

$$\frac{[a^2-(b-c)^2]\,R}{2bc} = \text{sin vers } A$$

qui se déduit sans peine de la formule précédente.

Ces formules sont, il faut l'avouer, peu commodes, même comparées aux formules courantes d'alors, les tables ne donnant pas les *sin vers* des angles.

(²) Pp. 77-79.

(³) *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, t. 3, éd. H. Schöne, Leipzig, Teubner, 1903, pp. 102-109.

(⁴) *Scritti di Leonardo Pisano... pubblicati da Baldassare Boncompagni...*, *t. 2, Leonardi Pisani Practice Geometriae ed opuscoli...* Roma, tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1862, pp. 177 et 178.

$$\mathrm{A - E \,.\, E :: L \,.\, T} \qquad \left(\frac{a-e}{e} = \frac{l}{x}\right)$$

c'est pourquoi (¹)

$$\frac{\mathrm{LE}}{\mathrm{X}} = \mathrm{T} \qquad \left(\frac{le}{a-e} = x\right)$$

et la hauteur de la pyramide totale est

$$\mathrm{L + T} \qquad (l + x)$$

» De même, le triple de la pyramide totale est

$$\mathrm{A}q\mathrm{L} + \mathrm{A}q\mathrm{T} \qquad (a^2l + a^2x)$$

et le triple de la pyramide retranchée est

$$\mathrm{E}q\mathrm{T} \qquad (e^2x)$$

donc le triple du tronc de pyramide est

$$\mathrm{A}q\mathrm{L} + \mathrm{A}q\mathrm{T} - \mathrm{E}q\mathrm{T} \qquad (a^2l + a^2x - e^2x)$$

» Ce théorème montre un premier moyen de mesurer le tronc de pyramide. On peut le formuler ainsi :

» Si du solide construit sur la grande base et la hauteur totale on retranche le solide formé par la petite base et la hauteur de la pyramide retranchée, le tiers du reste vaut le tronc. »

Par le mot solide, Oughtred entend le prisme droit.

Il continue, et c'est maintenant que la forme purement algébrique de sa démonstration le rend intéressant :

« En outre, puisque d'après la prop. 5 du chap. 18

$$\mathrm{A}q - \mathrm{E}q = \mathrm{ZX} \qquad [a^2 - e^2 = (a+e)(a-e)]$$

(¹) Il importe de ne pas oublier qu'au commencement de chapitre 18, Oughtred a posé une fois pour toutes

$$\mathrm{A - E = X} \qquad \mathrm{A + E = Z}$$

Le raisonnement gagne en clarté pour nous, en n'y introduisant pas ce changement d'écriture, d'ailleurs sans utilité.

et que

$$T = \frac{LE}{X} \qquad \left(x = \frac{le}{a - e}\right)$$

on aura

AqL + (ZEL, c'est-à-dire, d'après la proposition 3 du chapitre 19)

$$AEL + EqL = AqL + AqT - EqT$$
$$(a^2 l + ael + e^2 l = a^2 l + a^2 x - e^2 x).$$

» Donc le triple du tronc de pyramide vaut :

$$Aq + Eq + AE \quad \text{multipliant L (}^1\text{)} \quad [(a^2 + e^2 + ae) l].$$

» Ce théorème enseigne un deuxième moyen de mesurer le tronc.

» On peut le formuler ainsi :

» Si on multiplie la somme des deux bases du tronc et de leur moyenne proportionnelle par la hauteur du tronc, le produit est le triple du tronc. »

Comme troisième expression du volume du tronc de pyramide Oughtred donne encore une formule équivalant à

$$6v = [(a + e)^2 + a^2 + e^2]\, l\,;$$

puis il étend le théorème au tronc de cône.

Prop. 16 (²). On donne deux points fixes ; on demande de décrire une circonférence telle, que le rapport des distances d'un quelconque de ses points aux deux points fixes, soit R à S.

Prop. 17. On demande de jauger un tonneau, dont on connaît la hauteur et les rayons du fonds et du bouge (³).

Solution très intéressante d'un problème ancien que l'on rencontrait, à cette époque, dans tous les traités.

(¹) En d'autres termes : Puisqu'on vient de démontrer que

$$x = \frac{le}{a - e}$$

on a, en représentant par V le volume du tronc :

$$3v = a^2 l + a^2 x - e^2 x = a^2 l + (a^2 - e^2)\frac{le}{a - e} = a^2 l + ael + e^2 l = (a^2 + e^2 + ae)\, l.$$

(²) Pp. 79-81.

(³) Pp. 81-83.

Oughtred considère le tonneau comme un segment d'ellipsoïde de révolution que le traité d'Archimède sur les *conoïdes et les sphéroïdes* lui permet d'évaluer. En effet la proposition 29, dit-il, lui donne le volume de l'ellipsoïde, et la proposition 31, celle de la calotte ellipsoïdale (¹). Toute la difficulté du problème consiste à calculer la longueur de l'axe de l'ellipse, qui a servi d'axe de révolution.

Voici comment il s'y prend :

Il connaît, nous dit-il lui-même, la proposition 13 du premier livre des *Coniques* d'Apollonius. Or celle-ci lui donne l'équation de l'ellipse sous une forme que nous écririons aujourd'hui

$$\frac{y^2}{(a+x)\,a-x)}=\frac{p}{a}$$

équation dans laquelle le paramètre $p=\frac{b^2}{a}$

Soit h la demi-hauteur du tonneau, b le rayon du bouge et r le rayon du fonds ; h est une abscisse et r une ordonnée qui doivent vérifier l'équation de la courbe. Cette idée est évidemment exprimée dans le style géométrique du temps, et les mots « équation d'une courbe » ne sont pas prononcés. Il vient :

$$\frac{r^2}{(a+h)(a-h)}=\frac{p}{a}$$

En remplaçant dans cette formule le paramètre p, par sa valeur, on obtient :

$$a=\sqrt{\frac{b^2h^2}{b^2-r^2}}$$

Or b rayon du bouge est connu. Donc a est aussi connu.

A observer qu'Oughtred ne va pas plus loin et ne donne aucune formule explicite pour le jaugeage. On y chercherait notamment en vain l'expression

$$V=\frac{2}{3}\pi h(2b^2+r^2)$$

(¹) Dans l'édition d'Heiberg, *Archimedis Opera omnia, cum Commentariis Eutocii*.... t. I, Leipzig, Teubner, 1890, ces propositions portent respectivement les N^{os} 27 et 29 et se trouvent, pp. 441-453 et 459-475.

ni, en y faisant $h = \frac{1}{2}\text{H}$, $b = \frac{1}{2}\text{D}$, $r = \frac{1}{2}d$

$$\text{V} = \frac{\pi}{12}\text{H}(2\text{D}^2 + d^2)$$

qui porte encore de nos jours le nom de *formule d'Oughtred.*

L'intérêt de la proposition consiste dans l'emploi qui y est fait, dès 1631, de l'équation de l'ellipse. Ceci montre, soit dit en passant, qu'Oughtred avait parfaitement compris les *Coniques* d'Apollonius.

A observer aussi, que dans les calculs toutes les lignes sont représentées par deux lettres. Même remarque pour les trois propositions suivantes.

Prop. 18 et 19. Deux résolutions de triangles (1).

Prop. 20 et dernière (2). Trouver la corde de la cinquième partie de l'arc d'une corde donnée. C'est le problème des sections angulaires. Wallis s'exprime sur la solution d'Oughtred dans les termes les plus élogieux et la reproduit dans son *Algèbre.* Elle lui a inspiré, dit-il, sa propre théorie des *sections angulaires* (3).

En reproduisant à mon tour, à l'exemple de Wallis, la proposition, j'ai un but tout différent. Pour montrer Oughtred sous son vrai jour, il me reste à donner un spécimen de ses formules et de son style, quand il représente, dans les calculs algébriques, les lignes par deux lettres. N'en sortira-t-il pas un peu diminué dans l'esprit du lecteur? Tant pis, je n'écris pas un panégyrique. Le raisonnement est lourd, je le veux bien, mais la faute en est aux seules notations. En soi la solution est fort élégante (4) et mérite d'être comparée à celles de Van Ceulen (5) et d'Anderson (6).

---

(1) 1° *Prop. 18,* (pp. 83 et 84). On donne $A = 90^\circ$, a et bc ; on demande t.
2° *Prop. 19,* (pp. 84-86). On donne $A = 90$, b et ac ; on demande t.

(2) Pp. 86-88.

(3) *O. c.* pp. 133-135. L'opuscule de Wallis, *De Sectionibus Angularibus, anno 1685, anglice editus,* se trouve dans le même volume, pp. 531-601.

(4) Oughtred a repris le sujet dans ses *Opuscula Mathematica.* C'est l'objet du *De Sectionibus angularibus tractatus,* pp. 195-212.

(5) Voir mon mémoire : *Un émule de Viète ; Ludolphe van Ceulen. Analyse de son « Traité du Cercle. »* ANN. DE LA SOC. SCIENT., t. XXXIV, Bruxelles, 1910, 2e partie, pp. 121-135.

(6) L'édition originale parut à Paris, en 1615. Je ne l'ai jamais vue. Elle a été

» A partir de l'extrémité O du diamètre (fig. 3), qu'on marque sur l'arc cinq parties égales, par les lettres A, B, C, D, E (arc $OA = \alpha$; arc $OE = 5\alpha$) ; qu'on mène les cordes, comme il est indiqué dans la figure ($OA = crd\alpha$, $OB = crd2\alpha$, $OC = crd3\alpha$, $OE = crd5\alpha$) ; qu'on prenne

$$MX = MB.$$

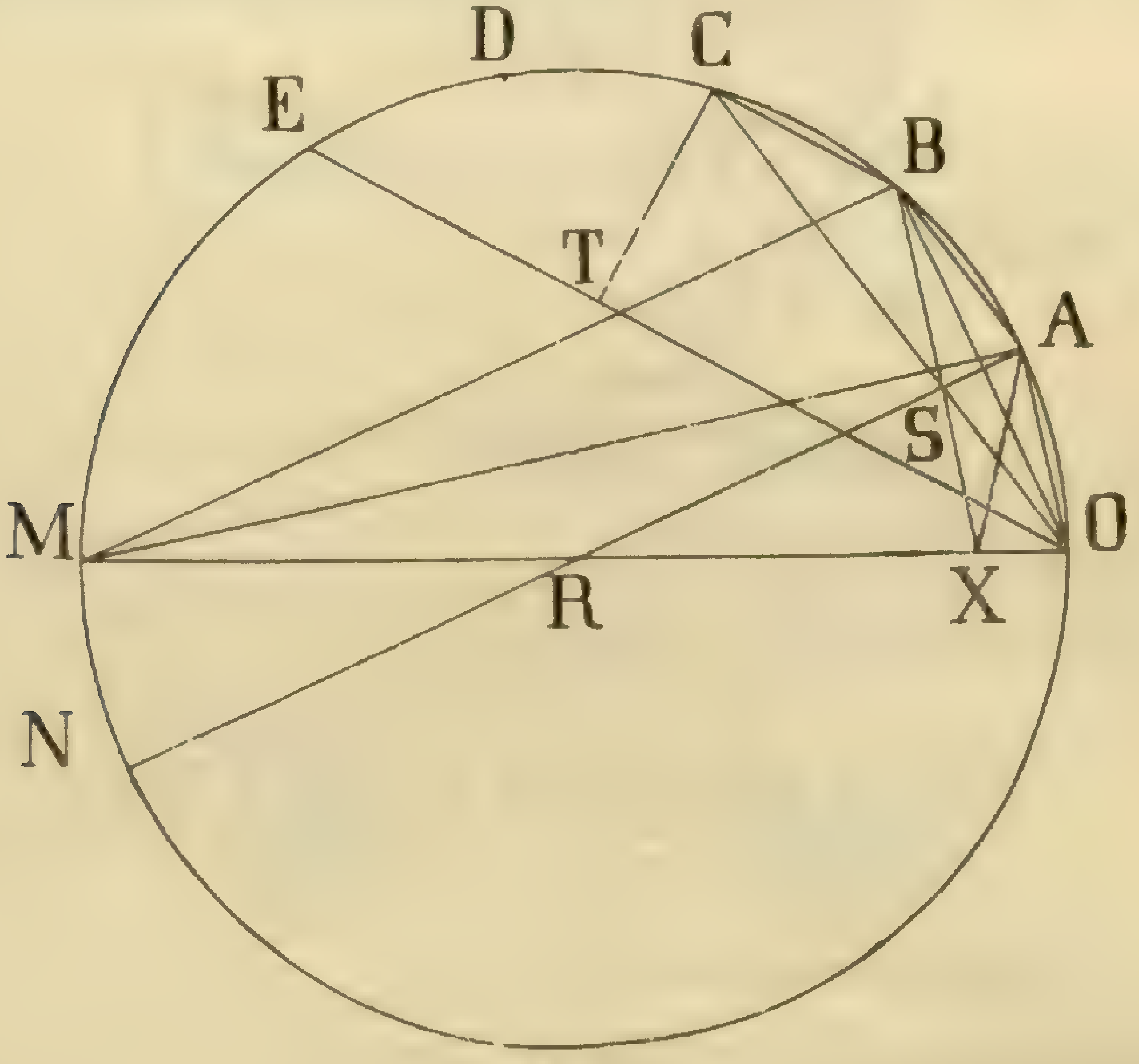


Fig. 3.

» Qu'on mène aussi AX, XB, le diamètre NRA, et la perpendiculaire CT à OE.

» Puisque d'après la prop. 4 du livre I des *Éléments* (d'Euclide) (¹)

$$AB = AX,$$

les triangles BMX, ORA, OAX seront semblables, et par conséquent

$$\frac{OAq}{Rad} = OX \qquad \left(\frac{crd^2\alpha}{R} = OX,\ R = \text{rayon}\right)$$

---

rééditée dans les *Francisci Vietae Opera Mathematica*, de 1646, pp. 286-304. On le sait, les énoncés des propositions sont de Viète et leurs démonstrations d'Anderson.

(¹) C'est un des cas d'égalité des triangles : deux côtés et l'angle compris.

» Les triangles OAB, ARM seront aussi semblables.

» Et d'après la 47ᵉ prop. du livre 1ᵉʳ des *Éléments* (d'Euclide) (¹)

$$\mathrm{MA} = \sqrt{q} : 4\mathrm{R}adq - \mathrm{OA}q \qquad (\mathrm{MA} = \sqrt{4\mathrm{R}^2 - crd^2\alpha})$$

» Ces remarques faites, on aura :

$$\mathrm{RA} \cdot \mathrm{MA} \text{ c. à d. } \mathrm{R}ad \cdot \sqrt{q} : 4\mathrm{R}adq - \mathrm{OA}q \;\because\; \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}$$

$$\left[\frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{4\mathrm{R}^2 - crd^2\alpha}} = \frac{crd\alpha}{crd2\alpha}\right]$$

» Donc

$$\frac{4\mathrm{R}adq \times \mathrm{OA}q - \mathrm{OA}qq}{\mathrm{R}adq} = \mathrm{OB}q$$

$$\left(\frac{4\mathrm{R}^2 crd^2\alpha - crd^4\alpha}{\mathrm{R}^2} = crd^2 2\alpha\right)$$

ce qui est la *duplication* de l'angle.

» Et

$$4\mathrm{R}adq \times \mathrm{OA}q - \mathrm{OA}qq = \mathrm{R}adq \times \mathrm{OB}q$$

$$(4\mathrm{R}^2 crd^2\alpha - crd^4\alpha = \mathrm{R}^2 crd^2 2\alpha)$$

ce qui est la *bissection* de l'angle (²).

» Ensuite, puisque

$$\mathrm{OS} = \mathrm{OA}, \qquad \text{et } \mathrm{SA} = \mathrm{OX}, \qquad \text{et } \mathrm{XS} = \mathrm{MX} = \mathrm{MB}$$

(¹) La proposition du carré de l'hypoténuse.

(²) Dans la *duplication*, $crd\alpha$ est connue ; dans la *bissection*, c'est $crd2\alpha$. Pour pouvoir appliquer dans ce cas les formules classiques de résolution des équations, Oughtred devait commencer par débarrasser la plus haute puissance de l'inconnue $crd^4\alpha$, de son coefficient $\frac{1}{\mathrm{R}^2}$. C'est la distinction qu'il faut faire entre la formule de la duplication et celle de la bissection.

En posant $\mathrm{R} = 1$ et $\alpha = 2\beta$, il vient $crd\alpha - 2 \sin\beta$ et $crd2\alpha = 2 \sin 2\beta$. On voit donc que la formule d'Oughtred équivaut à

$$16 \sin^2\beta - 16 \sin^4\beta = 4 \sin^2 2\beta$$

ou

$$4 \sin^2\beta \cos^2\beta = \sin^2 2\beta.$$

on aura, à cause de la prop. 15 du chap. 19 (1),

$$\frac{\mathrm{NS} \times \mathrm{SA}}{\mathrm{OS}} = \mathrm{SC}$$

c'est-à-dire

$2\mathrm{R}ad - \frac{\mathrm{OA}q}{\mathrm{R}ad}$ (multiplié) par $\frac{\mathrm{OA}q}{\mathrm{R}ad}$, divisé par OA (2)

$$\left[\left(2\mathrm{R} - \frac{crd^2\alpha}{\mathrm{R}}\right)\frac{crd^2\alpha}{\mathrm{R}}\,\frac{1}{crd\alpha}\right]$$

ou (3)

$$\frac{2\mathrm{R}adq \times \mathrm{OA} - \mathrm{OA}c}{\mathrm{R}adq} = \mathrm{SC} \qquad \left(\frac{2\mathrm{R}^2crd\alpha - crd^3\alpha}{\mathrm{R}^2} = \mathrm{SC}\right)$$

» Et si l'on ajoute OA (= $crd\alpha$), il vient :

$$\frac{3\mathrm{R}adq \times \mathrm{OA} - \mathrm{OA}c}{\mathrm{R}adq} = \mathrm{OC} \qquad \left(\frac{3\mathrm{R}^2crd\alpha - crd^3\alpha}{\mathrm{R}^2}\ \mathrm{OC} = crd3\alpha\right)$$

ce qui est la *triplication* de l'angle. Et

$$3\mathrm{R}adq \times \mathrm{OA} - \mathrm{OA}c = \mathrm{R}adq \times \mathrm{OC}$$

$$(3\mathrm{R}^2crd\alpha - crd^3\alpha = \mathrm{R}^2crd3\alpha)$$ (4)

---

(1) La prop. 15 du chap. 19 de la *Clavis*, à laquelle il est fait ici allusion, est le théorème du rectangle des segments déterminés par la circonférence, sur les cordes menées par un point intérieur au cercle.

(2) Textuellement :

$$2\mathrm{R}ad - \frac{\mathrm{OA}q}{\mathrm{R}ad} \text{ in } \frac{\mathrm{OA}q}{\mathrm{R}ad}, \text{ divisa per OA.}$$

(3) Puisque

$$\mathrm{OA} = crd\alpha, \quad \mathrm{OX} = \frac{crd^2\alpha}{\mathrm{R}}$$

$$\mathrm{NS} = \mathrm{MX} = 2\mathrm{R} - \mathrm{OX} = 2\mathrm{R} - \frac{crd^2\alpha}{\mathrm{R}}$$

il vient :

$$\mathrm{SC} = \frac{\mathrm{NS} \times \mathrm{SA}}{\mathrm{OS}} = \frac{\mathrm{MX} \times \mathrm{OX}}{\mathrm{OA}} = \left(2\mathrm{R} - \frac{crd^2\alpha}{\mathrm{R}}\right)\frac{crd^2\alpha}{\mathrm{R}} \times \frac{1}{crd\alpha} = \frac{2\mathrm{R}^2crd\alpha - crd^3\alpha}{\mathrm{R}^2}$$

(4) En posant, comme ci-dessus :

$$\alpha = 2\beta, \qquad crd\alpha = 2\sin\beta, \qquad crd3\alpha = 2\sin 3\beta, \qquad \mathrm{R} = 1$$

on obtient la formule connue

$$3\sin\beta - 4\sin^3\beta = \sin 3\beta.$$

ce qui est la *trisection* de l'angle (¹).

» De même, puisque

$$2\mathrm{ET} + \mathrm{CB} = \mathrm{OE}$$

et que

$$\mathrm{MO}\,.\,\mathrm{MB} \;{:}{:}\; \mathrm{OC}\,.\,\mathrm{OT}\ (^2) \qquad \left(\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OT}}\right)$$

c'est-à-dire (³)

$$2\mathrm{R}ad\,.\,2\mathrm{R}ad - \frac{\mathrm{OA}q}{\mathrm{R}ad} \;{:}{:}\; \frac{3\mathrm{R}adq \times \mathrm{OA} - \mathrm{OA}c}{\mathrm{R}adq}\,.\,\frac{6\,\mathrm{R}adqq \times \mathrm{OA}\,(^4) - 5\mathrm{R}adq \times \mathrm{OA}c + \mathrm{OA}qc}{2\mathrm{R}adqq}$$

$$\left(\frac{2\mathrm{R}}{2\mathrm{R} - \dfrac{crd^2\alpha}{\mathrm{R}}} = \frac{\dfrac{3\mathrm{R}^2 crd\alpha - crd^3\alpha}{\mathrm{R}^2}}{\dfrac{6\mathrm{R}^4 crd\alpha - 5\mathrm{R}^2 crd^3\alpha + crd^5\alpha}{\mathrm{R}^4}}\right)$$

si du double, on retranche OA, il restera :

$$\frac{5\mathrm{R}adqq \times \mathrm{OA} - 5\mathrm{R}adq \times \mathrm{OA}c + \mathrm{OA}qc}{\mathrm{R}qq} = \mathrm{OE}$$

$$\left(\frac{5\mathrm{R}^4 crd\alpha - 5\mathrm{R}^2 crd^3\alpha + crd^5\alpha}{\mathrm{R}^4} = crd5\alpha\right)$$

(¹) Il y a entre la formule de la triplication et la trisection, une différence analogue à celle de la duplication et de la bissection. Même remarque pour la quintuplation et la quintisection.

(²) Dans le texte, il y a CT au lieu de OT, faute qui n'est pas relevée dans l'errata. Elle est corrigée dans l'édition de 1652, p. 108.

(³) En d'autres termes : puisque

$$\mathrm{MO} = 2\mathrm{R}, \qquad \mathrm{MB} = \mathrm{MX} = 2\mathrm{R} - \frac{crd^2\alpha}{\mathrm{R}},$$

$$\mathrm{OC} = \frac{3\mathrm{R}^2 crd\alpha - crd^3\alpha}{\mathrm{R}^2}$$

on a d'abord, toute réduction faite,

$$\mathrm{OT} = \frac{\mathrm{MB} \times \mathrm{OC}}{\mathrm{MO}} = \frac{6\mathrm{R}^4 crd\alpha - 5\mathrm{R}^2 crd^3\alpha + crd^5\alpha}{\mathrm{R}^4}.$$

D'où, en se rappelant que $\mathrm{OA} = crd\alpha$,

$$crd5\alpha = \mathrm{OE} = 2\mathrm{OT} - \mathrm{CB} = 2\mathrm{OT} - \mathrm{OA} = \frac{5\mathrm{R}^4 crd\alpha - 5\mathrm{R}^2 crd^3\alpha + crd^5\alpha}{\mathrm{R}^4}$$

(⁴) Dans le texte le facteur OA est oublié. La faute n'est pas relevée dans l'errata, mais elle est corrigée dans l'édition de 1652, p. 108.

ce qui est la *quintuplation* de l'angle. Et

$$\mathrm{OA}qc - 5\mathrm{R}adq \times \mathrm{OA}c + 5\mathrm{R}adqq \times \mathrm{OA} = \mathrm{R}adqq \times \mathrm{OE}$$
$$(crd^5\alpha - 5\mathrm{R}^2crd^3\alpha + 5\mathrm{R}^4crd\alpha = \mathrm{R}^4crd5\alpha)\ (^1)$$

ce qui est la *quintisection* de l'angle.

» Mais puisque le rayon est égal à 1, il ne change rien dans les multiplications, ni dans les divisions. On peut donc, dans les équations qui précèdent, le supprimer à toutes ses puissances.

» Quant à dire par quel artifice on sait résoudre ces équations difficiles, qui ne sont pas uniquement composées de trois espèces de termes équidistants (²) ; il n'entre pas dans le plan de cette entreprise, de le faire. »

Oughtred promet de publier plus tard ses idées sur le sujet, si toutefois un pareil travail est capable de mériter l'attention de son jeune élève le très noble Guillaume Howard. C'est l'objet du traité *De Aequationum Affectarum Resolutione in numeris*, qu'il ajouta aux éditions suivantes de la *Clavis Mathematica,* comme nous l'avons dit.

« Gloire à Dieu seul ! » s'écrie-t-il enfin ; et sur cette exclamation se clôt la première édition de son ouvrage (³).

(¹) En conservant les mêmes notations que dans les deux notes ci-dessus, cette formule équivaut à

$$5 \sin\beta - 20 \sin^3\beta + 16 \sin^5\beta = \sin 5\beta,$$

qui est aisée à vérifier.

(²) C'est-à-dire les équations de la forme

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0.$$

(³) Dans l'édition de 1652, (p. 109) Oughtred donne encore la formule de la septisection de l'angle, qui est établie d'une manière tout à fait analogue, ne prenant, pour point de départ, la formule de la quintisection. La méthode s'étend évidemment à tous les sous-multiples impairs de l'arc. Wallis reproduit cette partie de la démonstration, dans son *Algèbre*, *Opera*, t. 2, p. 135.

Quant à l'importance que ce genre de problèmes avait encore à l'époque d'Oughtred, voir les *Vorlesungen ueber Geschichte der Trigonometrie* de von Braunmühl, t. 2, Leipzig, Teubner, 1903, Ch. 2, « Die Trigonometrie bis zum beginn des 18 Jahrhunderts, § 2, Winkelschnitte und Kreismessung », pp. 54 et suiv.

VII

Nous voilà arrivés au terme de notre tâche. Il est temps de conclure.

La *Clavis Mathematica* est mieux qu'un simple ouvrage de valeur. A l'égal de l'*Invention Nouvelle en l'Algèbre* d'Albert Girard, mais à l'occasion de théories différentes, elle marque une étape entre les travaux de Viète et ceux de Descartes. Si nous ne nous illusionnons pas, notre analyse en a convaincu le lecteur.

Le chapitre sur les opérations abrégées a eu la gloire de populariser la mémoire de l'auteur. Nos écoliers eux-mêmes connaissent encore le nom d'Oughtred, grâce à sa méthode de multiplication.

Oughtred a créé des symboles opératoires entrés dans l'usage courant : la croix de Saint-André ×, comme signe de la multiplication ; les quatre points séparés par une barre horizontale ∺, pour désigner les progressions géométriques ; les quatre points ∷ simples, pour indiquer l'égalité des deux rapports d'une proportion.

Ses démonstrations algébriques sont écrites avec une clarté, une brièveté, une élégance, une sobriété d'explications en langage courant, à peine égalées par quelques pages de l'*In Mahumedis Algebram Prolegomena* d'Adrien Romain, et qui leur donnent un caractère déjà tout moderne. On croit souvent rencontrer pour la première fois ces qualités dans la *Géométrie* de Descartes ; c'est oublier la *Clavis Mathematica* d'Oughtred. L'impartiale histoire demande qu'on le rappelle. Ce serait au besoin l'excuse des multiples extraits de la *Clavis*, que j'ai donnés dans toute leur étendue. En mettant les pièces de conviction sous les yeux du lecteur, il a pu se faire une opinion par lui-même.

L'exposé du second livre des *Éléments* d'Euclide, par Oughtred, fut, au point de vue de l'avantage des notations algébriques, une révélation pour les contemporains.

Quant à son curieux essai de démonstration idéographique du 10e livre de ces *Éléments*, je l'ai passé aujourd'hui volontairement sous silence : la *Clavis Mathematica* de 1631, n'en a pas de trace ; les notations de l'auteur y méritent un examen particulier, que l'étrangeté de leur forme rend malaisé avec les moyens typographiques dont dispose mon imprimeur ; enfin et surtout, cet essai parut postérieurement à la *Géométrie* de Descartes et n'apprend rien au point de vue spécial de mon travail.

Un des problèmes d'Oughtred, mais un seul, sa recherche d'une formule pour le jaugeage des tonneaux, montre que l'auteur savait se servir de l'équation d'une courbe. C'est une constatation très curieuse, mais dont je ne voudrais pas exagérer, outre mesure, l'importance. Oughtred fait une simple application d'un théorème du premier livre des *Coniques* d'Apollonius, sans rien y ajouter de neuf.

Aucune des idées d'Oughtred sur la résolution des équations ne se trouve dans la *Clavis* de 1631. Dans cette théorie capitale, Descartes ne lui doit rien. En revanche, dans l'application de l'algèbre aux problèmes déterminés de la géométrie, dans la construction des formules algébriques par la règle et le compas, dans la manière d'obtenir par le calcul les formules à construire elles-mêmes, la *Clavis Mathematica* contient des pages, qui peuvent être mises en parallèle avec les bons passages du premier livre de la *Géométrie* sur les sujets similaires. Wallis en fait, avec raison, l'observation.

Faut-il en conclure pour cela que, là du moins, Descartes ait plagié Oughtred ?

Sans prononcer le mot, Wallis ne demanderait qu'à le faire croire. L'accusation ne supporte pas un instant l'examen. Est-ce être plagiaire, que de se tenir au courant des travaux de son temps, et de les prendre pour point de départ de ses recherches personnelles ? A ce titre quel savant, digne de ce nom, ne serait plagiaire ?

Mais faut-il aller jusqu'à dire, que la *Clavis Mathematica* ait été sans influence sur Descartes ? Je suis, pour ma part, convaincu du contraire.

Descartes prend volontiers l'attitude d'un homme, qui ne lit pas, ne possède même pas de livre, médite, crée la science de toutes pièces, par ses réflexions et ses propres moyens. Baillet, par exemple, a soutenu, dans sa *Vie de Monsieur de Descartes*, que son héros n'avait jamais vu l'*Artis Analyticae Praxis d'Harriot* (1).

On a aujourd'hui la preuve que c'est inexact.

---

(1) *La Vie de Monsieur Descartes* (sans nom d'auteur). A Paris, chez Daniel Horthemels, M.DX.XCI, t. 2, liv. 8, ch. 10, p. 541.

La *Correspondance* de Descartes publiée par MM. Charles Adam et Paul Tannery, contient une lettre écrite par Descartes à Constantin Huygens (1), précisément dans le but de l'informer qu'il lui renvoie le volume d'Harriot.

Descartes eut-il de même en mains, la *Clavis Mathematica* d'Oughtred ? Je n'en ai, cette fois, aucune preuve positive ; mais il importe assez peu.

Si Descartes ne lisait guère, ce qui n'est pas prouvé, il n'en était pas moins très bien informé. Personne ne contestera sa parfaite connaissance du mouvement intellectuel de son temps. La *Clavis Mathematica* eut un succès rapide. Impossible qu'il n'ait pas connu, du moins indirectement, les idées les plus originales qu'elle contenait.

Loin de diminuer Descartes, ceci, je ne saurais trop le répéter, est, à mon avis, plutôt pour le grandir.

En cette circonstance, comme en tant d'autres, il s'est montré un maître incomparable, d'un talent prestigieux. Saisissant tout le mérite des idées les plus neuves de la *Clavis Mathematica*, les dégageant du milieu encore compliqué où elles étaient pour ainsi dire noyées, il les a isolées, les a mises bien en évidence, les a employées, non plus de temps en temps, mais systématiquement, en toutes circonstances, et en a tiré ainsi un parti qu'Oughtred lui-même ne semble pas avoir toujours entrevu.

La *Géométrie* de Descartes est, à ce point de vue, un chef-d'œuvre hors de pair, auquel il serait ridicule de vouloir, je ne dis pas égaler, mais même sérieusement comparer, la *Clavis Mathematica* d'Oughtred. Celle-ci reste néanmoins un ouvrage original et de haute valeur, en progrès notable sur les travaux de Viète et ayant exercé une grande influence. Il n'est pas permis de la passer sous silence dans l'histoire des mathématiques.

---

(1) T. 2, Paris, Cerf, 1898, pp. 456 et 457. Constantin est, on le sait, le père du grand Christiaan Huygens.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXIV, 1875 à 1910. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun . . . . fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Un vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr. ; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Un vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Éd. Van der Smissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905). . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : **T. I.** Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. (Épuisé.) **T. II.** VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gênes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. III.** XIII. Le Port moderne de Gênes, M. Theunissen. XIV. Ostende. L.-Th. Léger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow. A. Vanderstichele. Prix : 3 francs. **T. IV.** XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. V.** XXVIII. Rouen, G. Blondel. XXIX. Montréal, M. Dewavrin. XXX. Seattle et Tacoma, M. Rondet-Saint. XXXI. Trieste, Fiume, Venise, M. Dewavrin. XXXII. Venise au moyen âge, C. Terlinden. XXXIII. Les ports du Nord-Est de l'Angleterre, J. Meuwissen. — Conclusions, G. Blondel. — Appendices : L'administration des Ports, J. Charles, S. J. ; L'industrie des transports maritimes, H. Mansion. Prix : 3 francs.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le Dr X. Francotte. Brochure in-8° de 48 pages (1907) . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le Dr Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) fr. **0 75**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901). La livraison de janvier 1902 a inauguré la **troisième série**.

La revue paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de **Variétés**.

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** %; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la REVUE. Un vol. du format de la REVUE de XII-168 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. & R. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.

SUPPLÉMENT AU FASCICULE I DU TOME XXXV DES

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

TRENTE-CINQUIÈME ANNÉE, 1910-1911

L'influence de l'enseignement des sciences naturelles dans la vie publique

par le **Dr H. LEBRUN**
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND

RAPPORT

présenté à la troisième section de la Société scientifique
le 7 avril 1910

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1910

SUPPLÉMENT AU FASCICULE I DU TOME XXXV DES

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
DE BRUXELLES

TRENTE-CINQUIÈME ANNÉE, 1910-1911

L'influence de l'enseignement des sciences naturelles dans la vie publique

par le Dr **H. LEBRUN**
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND

RAPPORT
présenté à la troisième section de la Société scientifique
le 7 avril 1910

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1910

La lecture du rapport de M. le Dr H. Lebrun sur l'*Influence de l'enseignement des sciences naturelles dans la vie publique* a été suivie, le 7 avril 1910, d'un échange de vues que la troisième section a décidé de reprendre au cours de la session de Pâques 1911.

L'envoi de cette brochure est une invitation à prendre part à cette discussion qui sera résumée et publiée à la suite du rapport de M. le Dr H. Lebrun, dans le troisième fascicule du tome XXXV des Annales de la Société.

La réunion se tiendra à Bruxelles, au local PATRIA, 15, rue des Ursulines, le jeudi 27 avril 1911, à 10 h.

L'INFLUENCE
DE
L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES NATURELLES DANS LA VIE PUBLIQUE

L'an dernier, au Congrès des Catholiques à Malines, j'ai montré la nécessité de l'enseignement des sciences naturelles dans les humanités, et l'urgence qu'il y aurait dans notre pays de modifier nos programmes d'enseignement. J'ai indiqué sommairement dans quelles conditions cet enseignement devrait être donné pour atteindre le but éducatif que l'on se propose.

On a fait à mon rapport certaines objections, et l'une de celles qui ont paru avoir le plus d'influence sur les membres du Congrès fut formulée de la façon suivante : « Voyez l'Allemagne qui se trouve à la tête du mouvement scientifique et pédagogique ! »

Le P. Verest écrivait dans son rapport sur la nécessité de maintenir et de relever les humanités gréco-latines : « Les humanités gréco-latines ont donc les titres les plus incontestables à rester le centre de la haute éducation intellectuelle. C'est pour l'avoir compris que l'Allemagne a conquis et détient l'hégémonie du mouvement scientifique et que l'Angleterre garde son prestige dans le monde des idées. Fait non moins significatif, les États-Unis, où tout est dirigé vers les affaires et vers la vie pratique, manifestent néanmoins de plus en plus la préoccupation de mettre l'éducation classique à la base du haut enseignement, et chose, en soi plutôt surprenante, ce sont tout juste les médecins, les ingénieurs, les hommes de science qui se montrent le plus pénétrés de cette nécessité. »

Partisan convaincu de l'enseignement des humanités gréco-latines, et de leur importance dans l'éducation de la jeunesse universitaire comme le P. Verest, je ne suis plus du tout de son avis quand il attribue à cet enseignement l'hégémonie du mouvement scientifique à l'Allemagne. Je ne partage pas plus l'avis de M. Mansion qui estime que « l'enseignement des sciences naturelles doit être reporté à la fin des humanités et après les humanités. »

La conclusion du P. Verest me paraît erronée parce qu'il a oublié une chose que tous ceux qui ont vécu en Allemagne connaissent pour l'avoir sentie dans toute la vie publique, c'est l'influence profonde qu'a sur la mentalité du peuple allemand l'enseignement scientifique approfondi qui se donne concurremment aux autres branches du programme, dans toutes les classes de tous les établissements d'instruction.

Pour montrer combien l'opinion du P. Verest était unilatérale et loin de la vérité, j'ai publié une petite brochure dans laquelle j'ai exposé le programme allemand de l'enseignement des sciences naturelles tel qu'il a été adopté à l'unanimité par le Congrès des naturalistes et médecins allemands, après quatre années d'études. Les pédagogues, les ingénieurs, les professeurs d'université les plus éminents, n'ont pas dédaigné de prendre part à cette discussion pour y donner leur avis sur les matières à enseigner, et sur les méthodes à suivre. Or ce programme comprend un minimum de deux heures de sciences dans toutes les classes. Si donc dans les pays germains on maintient dans les programmes les études gréco-latines, c'est une très bonne chose ; mais en conclure que c'est à leur influence exclusive que ces pays doivent leur hégémonie scientifique est une erreur à mon avis. Je serai plus près de la vérité en affirmant que c'est grâce à son enseignement scientifique généralisé que l'Allemagne a conquis et détient l'hégémonie du mouvement scientifique contemporain.

On aime et on cultive toutes les sciences dans les pays germains, parce qu'on les enseigne à tous ; dans les pays latins, et la Belgique peut être comptée parmi eux, on se désintéresse, et on ne donne pas aux sciences l'importance qu'elles devraient avoir dans la vie publique, parce qu'on ne les enseigne pas suffisamment, ou bien mal ; parce qu'en somme on les ignore.

Je vais essayer de vous montrer aujourd'hui, en prenant comme exemple quelques-unes des sciences naturelles, comment leur enseignement a retenti sur la prospérité économique et scientifique des pays qui l'ont adopté, et comment ceux qui le négligent assistent impuissants aux progrès réalisés sous leurs yeux ; sans espoir d'égaler leurs rivaux.

Mais je vous entends me dire : vous exagérez, on enseigne les sciences naturelles d'une manière très brillante dans nos universités. Nous avons des laboratoires très bien outillés, nous formons des médecins, des pharmaciens, des ingénieurs très compétents, très instruits. Sans doute, mais en dehors de ces catégories de personnes quels sont ceux qui s'intéressent aux sciences naturelles ?

Vous conviendrez que c'est bien là une proportion excessivement minime en comparaison du reste de la population.

La vérité est celle-ci, l'enseignement des sciences naturelles dans nos universités n'a pas d'existence autonome. Cela veut dire qu'on ne les enseigne pas pour elles-mêmes, parce que dans notre pays elles ne sont pas des sciences qui conduisent à une carrière.

Elles sont satellites des professions libérales, et on ne les enseigne que pour autant qu'elles peuvent rendre des services au médecin, au pharmacien, à l'ingénieur.

Tous nos professeurs d'universités sont d'excellents préparateurs aux examens, et bien peu sont ceux qui font progresser les sciences qu'ils enseignent ; ils sont avant tout préoccupés de la formation professionnelle. Il en résulte que l'immense majorité du public ne connaissant rien ou très peu de chose de sciences naturelles, chimie, physique, zoologie, botanique, se désintéresse entièrement des industries modernes qui sont toutes scientifiques.

Toutes nos professions libérales s'encombrent, il y a surproduction de diplômés ; mais ces porteurs de diplômes sont incapables de tenter d'industrialiser leurs connaissances, en dehors de leur profession. Cette pléthore devient un danger social, qui n'a de remède que dans l'expatriation.

On me dira : « Vous broyez du noir, la situation n'est pas aussi mauvaise que vous le prétendez. Voyez comme la Belgique prospère, nos affaires sont en très bonne situation, et vous êtes vraiment mal venu de critiquer, alors que de l'avis unanime la Belgique marche en tête de toutes les nations européennes dans tous les progrès scientifiques et industriels. »

Vous aurez tous entendu des phrases pareilles, débitées par nos hommes politiques avec plus ou moins d'emphase, dans nos réunions électorales.

Quand j'entends nos ministres et nos hommes politiques débiter ces boniments avec autant d'audace que de sérénité, je ne puis m'empêcher de me souvenir de certain tableau allégorique de notre vieux Breughel qui se trouve au Musée de Naples. Il est intitulé *Les Aveugles :* sur une prairie aux tons verdoyants, ils sont sept qui cheminent gauchement en se tenant par la main, les yeux ternes, la démarche hésitante, la tête dressée, ils déclament et ils discutent. Le chef de file arrive au bord d'une rivière, le sol manque sous ses pas et il entraîne tous les autres. Ils passent au milieu du monde ignorant tout de la beauté et des trésors de la nature, ils poursuivent mentalement des chimères, vivent de souvenirs, et meurent entraînés vers l'abîme par leur aveuglement. Je demande à nos dirigeants qu'ils veuillent seulement réfléchir à ce qu'écrivait, en 1896, un grand économiste français, M. Edm. Thiéry :

« L'industrie de l'avenir ne sera jamais plus stationnaire, elle réalisera incessamment des progrès, toujours plus nombreux, toujours plus rapides. En un mot l'industrie de l'avenir, c'est l'industrie scientifique dans toute l'acception du mot, et malheur aux nations insouciantes qui resteront au-dessous de la situation nouvelle : elles seront dévorées par leurs rivales. »

Or ce n'est un secret pour personne, il suffit de réfléchir, de regarder autour de soi, pour s'apercevoir aussitôt que les industries vraiment et purement scientifiques sont quasi inconnues en Belgique.

Jamais je n'ai pu m'en convaincre d'une manière plus précise et plus indubitable que dans une réunion tenue à Bruxelles il y a trois ans, en vue d'une participation officielle de la Belgique à l'Exposition de Bordeaux.

On nous avait convoqués à une vingtaine d'hommes de science pour nous demander de former une section des sciences, appareils et industries scientifiques.

Notre section était présidée par un officier qui est, je crois, actuellement un de nos plus brillants professeurs de l'École de guerre. Il ouvrit donc la séance par un petit discours très patriotique, faisant ressortir l'importance de l'Exposition, et émettant le vœu de voir la Belgique, dont le renom scientifique n'est plus à faire, qui se trouve parmi les nations les plus instruites de la terre, participer brillamment à l'Exposition des sciences de Bordeaux.

« Elle doit, disait-il, à sa réputation mondiale de montrer qu'elle est à la tête de tous les progrès, et qu'aucune science ne lui est étrangère ! » « Nous voulons former, ajoutait-il, une section essentiellement belge, dans laquelle figureront des produits, des instruments scientifiques de précision, des appareils, fabriqués par des Belges ou inventés par eux. »

Très satisfait de son petit discours et de sa péroraison patriotique, le Président se rassit, et jetant un coup d'œil à la ronde il ajouta : « Quelqu'un demande-t-il la parole ? » Tout le monde se tut et nous étions tous à nous regarder, et à nous tâter. Il ne pouvaient en croire ses yeux et interpellant alors quelques négociants il reçut les réponses suivantes : « Je suis en Belgique le représentant des fabriques allemandes ». « Moi, dit un autre, j'importe surtout les appareils anglais et américains », et ainsi de suite. Après un court échange de vues on se sépara en constatant qu'il n'existe en Belgique aucune fabrique d'appareils de précision, d'instruments scientifiques, d'appareils optiques.

Il existe dans tout notre pays, 4 ou 5 ouvriers qui suffisent à peine à réparer les instruments que nous importons de Paris, d'Allemagne et d'Angleterre.

Nous fabriquons des locomotives, des voitures de chemins de fer, de tramways, des machines à battre le grain, des automobiles, des bicyclettes, nous avons des métallurgistes de première force, des ouvriers qui travaillent le cuivre mieux que personne, mais nous employons cette main-d'œuvre si habile à fabriquer des gros morceaux. Nous fabriquons du verre, des cristaux, nous exportons de la gobeletterie dans le monde entier. Nos ouvriers taillent des cristaux dignes de figurer sur les tables des rois, et nous ne savons pas tailler scientifiquement une paire de lunettes. Nos artisans n'ont jamais appris les sciences optiques : nos médecins emploient des thermomètres, des microscopes, des stéloscopes, nos pharmaciens des balances de précision, nos ingénieurs des tachéomètres, des théodolites, nos sucriers, nos distillateurs, des polarimètres, nos astronomes des téleseopes, etc. Nos sociétés photographiques sont très prospères, et nous ne parvenons pas à fabriquer un appareil, ni un objectif photographique, ni à tailler une lentille.

Il n'y a peut-être pas en Belgique un mécanicien capable de fileter convenablement une vis micrométrique.

Il en est de même de tous les appareils de mensuration des courants électriques.

Tous ces instruments, nous les employons quotidiennement, nous les manipulons, nous les corrigeons parfois, mais nous sommes absolument impuissants à les produire industriellement.

Tous ces appareils sont aujourd'hui indispensables à toutes les industries qui veulent lutter et suivre les progrès réalisés ailleurs. On ne coule plus une tonne de fonte ou d'acier, on ne brasse plus un hectolitre de bière sans examiner les substances dont on se sert à l'aide du microscope. On fait le diagnostic de toutes les maladies au moyen du microscope, qu'elles atteignent les plantes, les animaux ou l'homme.

Tous les agents physiques sont aujourd'hui employés comme moyens thérapeutiques, l'électricité, le radium, la lumière, et vous aurez tous déjà visité les instituts luxueusement installés où tous ces agents physiques sont utilisés dans un but curatif.

D'où nous viennent ces appareils ? Tous indistinctement d'Allemagne. Il n'est plus une industrie, même agricole, qui ne nécessite aujourd'hui des appareils de précision. Les sciences physiques président à notre vie quotidienne, au développement de toutes nos industries, et nous sommes incapables de fabriquer nous-mêmes les instruments qui sont devenus nécessaires à leur fonctionnement et à leurs progrès.

Je me contente aujourd'hui de poser la question suivante : Pourquoi pareille sujétion, et pareille inertie ?

Nous avons pourtant la main-d'œuvre la plus habile peut-être qui soit au monde, et la population étrangère de nos universités serait à coup sûr suffisante pour alimenter notre production et se faire dans les pays éloignés les propagateurs de nos industries scientifiques.

Faut-il vous rappeler qu'il y a vingt-cinq ans, on comptait dans le monde entier 4 ou 5 fabricants de microscopes ? Aujourd'hui il y en a trente dont vingt Allemands. Il y a trente ans Carl Zeiss était un tout petit opticien d'Iéna travaillant avec 6 ouvriers, aujourd'hui la firme Zeiss occupe 1600 ouvriers. Pendant ce temps il y a en France une seule maison occupant une dizaine d'ouvriers.

La seule maison Leitz de Wetzlar produit annuellement plus de 6000, microscopes sans compter les autres appareils accessoires.

Il en est de même pour tous les autres appareils médicaux, d'électricité et d'optique. Notre production dans ces industries dont l'avenir nous démontrera tous les jours l'importance sans cesse croissante, est aujourd'hui absolument nulle.

Vous aurez tous encore présent à la mémoire le remarquable article publié par M. le comte Joseph de Moussac sur l'industrie chimique, paru en octobre dernier, dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Je vous y renvoie pour constater le développement incroyable que cette industrie a pris de l'autre côté du Rhin, depuis vingt-cinq ans. Il a mis en lumière tout ce que nos voisins sont parvenus à extraire du goudron de la houille, matières colorantes, substances médicamenteuses.

Ce goudron de la houille est chez nous un déchet presque sans valeur. Nous le produisons en quantité fabuleuse dans nos fours à coke, dans toutes nos usines à gaz, mais nous ne savons pas l'utiliser scientifiquement.

Nos industriels vont chercher au loin, en Afrique, en Suède, en Sardaigne, des minerais de fer, de cuivre, de zinc, de plomb, qu'ils manufacturent ici, et pour lesquels ils immobilisent des capitaux par millions, et ils ont sous la main des produits qui renferment des richesses inouïes, dont ils sont incapables de tirer parti.

Mais vous m'objecterez « nous avons en Belgique de nombreuses fabriques de produits chimiques », oui sans doute, mais que fabriquons nous ? Les corps les plus communs, de la soude, de la potasse, les acides les plus simples, sulfurique, chlorhydrique, acétique, les sels pour les engrais destinés à la terre et puis c'est tout. Nous en sommes encore à l'enfance de l'art.

En lisant l'article de M. de Moussac, je me remémorais une scène inoubliable dont je fus le témoin il y a quelque vingt ans devant le grand institut chimique de l'Université de Bonn, voisin de l'institut anatomique où je travaillais alors.

L'Allemagne fêtait le 70^{me} anniversaire de la naissance du grand chimiste Kékulé, geheimrath et professeur à l'Université, dont les immortels travaux ont été le point de départ de toute l'industrie chimique. Dans les allées ombreuses qui entourent les instituts universitaires à Poppelsdorf, une manifestation grandiose s'organisait. La famille impériale, presque toutes les maisons régnantes, l'armée, la magistrature, les académies de tous les pays, les universités, avaient envoyé des délégations pour se joindre aux savants et aux étudiants qui honoraient le grand savant dont les recherches, les découvertes, et les élèves avaient tant contribué au développement des industries chimiques de son pays.

Je me disais à part moi : « Pourtant cet homme, la Belgique aurait pu le garder chez elle quand il était professeur à l'Université de Gand ! Si notre gouvernement lui avait fourni alors le bel institut et les laboratoires superbes dont il dispose ici, toute cette industrie aurait pu naître dans mon pays ! ! »

J'interrogeai alors plusieurs personnes, des professeurs, des bourgeois, des étudiants de diverses facultés, tous avaient conscience de l'immense service que ce seul homme avait rendu à son pays, et de l'importante influence que ses découvertes avaient exercée sur la prospérité industrielle de sa patrie. J'admirais cette communauté, cette généralité de la reconnaissance nationale et j'en arrivais à conclure : Non, cette manifestation n'eût pas été possible en Belgique. Pourquoi ? Parce que dans notre pays les classes dirigeantes ne connaissent rien de la chimie ni des sciences naturelles ; nos hommes politiques sont tous des avocats, ils n'ont aucune formation scientifique, ni aucune compréhension des nécessités actuelles de la science.

Eussions-nous encore aujourd'hui un Kékulé parmi nos professeurs d'université, il ne trouverait pas plus aujourd'hui qu'il y a cinquante ans, dans notre pays, l'appui moral, l'encouragement des autorités ni le concours financier de nos capitalistes. Il ne serait pas mieux compris à l'heure actuelle par notre élite intellectuelle dont les préoccupations sont ailleurs. Parlez leur de chemins de fer, de tramways, de mines de charbon, à la bonne heure !

Le public belge capitaliste, dans l'immense majorité, est guidé dans le placement de son argent par une nuée d'agents de change qui derrière leur compteur sont renseignés sur la valeur de toutes les entreprises industrielles ; mais, je mets au défi un savant belge de trouver 10 000 francs pour lancer un produit ou une invention purement scientifique qui n'aurait pas fait ses preuves à l'étranger !

Ce que je viens de vous dire des industries physiques et chimiques, vous aura, je pense, suffisamment édifiés sur le côté pratique et sur l'importance économique de ces sciences dans le développement industriel des pays germains.

Vous aurez pu constater, d'autre part, en examinant ce qui se passe chez nous, combien nous sommes arriérés et combien les industries similaires de notre pays sont encore hélas embryonnaires et très primitives.

Je voudrais, en outre, vous donner un autre exemple non moins démonstratif de la transformation qu'on peut faire subir à des objets sans valeur intrinsèque en y mêlant quelques connaissances scientifiques.

Il existe actuellement en Allemagne plus de 150 maisons de commerce qui se sont fait une spécialité de la vente, la préparation, la récolte des objets d'histoire naturelle, animaux, végétaux, minéraux.

Vous pouvez vous procurer dans ces maisons, les animaux, les plantes, les roches du monde entier.

Les uns récoltent spécialement les insectes, les papillons, les coléoptères, d'autres les peaux d'animaux, d'oiseaux, les œufs de tous les oiseaux, les coquillages de toutes les mers, les coraux de tous les récifs du monde entier.

Ils fournissent ces spécimens aux collectionneurs, aux musées d'histoire naturelle, quand ils les ont au préalable déterminés, et fournis d'un état civil complet, c'est-à-dire qu'ils leur ont donné un nom scientifique, avec la mention de l'endroit précis d'origine.

Certains de ces objets sans aucune valeur, dans les mains d'un indigène ou d'un ignorant, deviennent un objet rare pour un savant, un objet de valeur pour un commerçant. Les Allemands, les Anglais, les Américains sont pratiques, ils se disent qu'une espèce animale, végétale, minérale nouvelle est une source de profits et de ressources pour une foule de personnes. En effet, elle occupe le naturaliste qui le recueille, le savant qui l'étudie ; celui-ci, pour la faire connaître, emploie un dessinateur pour la représenter, un peintre pour lui donner la couleur, un lithographe pour reproduire les dessins et aquarelles, un graveur, un imprimeur pour imprimer le mémoire qui en fournit la première description, et un éditeur pour vendre le livre.

Ces maisons de commerce envoient des chasseurs dans le monde entier, ils se réunissent et font les frais d'expéditions de recherches, les musées ont toujours des savants en voyage d'exploration.

Les objets étrangers et rares ne sont pas les seuls à présenter de l'intérêt pour le naturaliste, il est parvenu aussi à employer les objets les plus vulgaires dans un but éducatif.

Utilisant les connaissances d'anatomie et d'embryologie, il prépare, d'une manière intelligente, les animaux les plus vulgaires pour en démontrer l'organisation. On dissèque des pigeons, des poules, des chiens, des chats, des poissons, pour montrer les systèmes digestif, circulatoire, nerveux. On monte des squelettes, qui restent en partie recouverts de la peau de l'animal pour en faire saisir les rapports.

Il recueille les œufs de grenouille, de poissons, en sériant les moments de la récolte et il parvient ainsi à donner dans des séries continues, tous les stades, toutes les formes, par lesquels ces animaux passent pour arriver à l'état adulte. C'est une vulgarisation sommaire d'une science trop peu connue : l'embryologie.

D'autres maisons se sont une spécialité de la fabrication des préparations scientifiques.

D'autres recueillent tous les objets qui peuvent démontrer les lésions et les maladies, et ils les préparent pour servir aux professeurs comme objets de démonstration dans les cours d'universités, d'instituts agricoles ou forestiers.

Une autre industrie très intéressante s'est imposé la tâche de fabriquer en carton pierre, en papier mâché, des modèles pour l'enseignement de toutes les sciences biologiques ; pour composer des tableaux muraux, reproduire artistiquement des scènes de la nature, qui font connaître aux enfants la faune et la flore de leur pays.

Je pourrais allonger encore l'énumération, mais je la crois pourtant suffisante pour vous faire comprendre que l'Allemagne fournit le monde intellectuel et enseignant de son matériel pédagogique.

Pendant que les Allemands, les Autrichiens, les Anglais, les Américains, qui s'inspirent des mêmes principes, entreprenaient cette conquête pacifique du monde, qu'avons-nous fait en Belgique dans cet ordre d'idées ?

Ce commerce scientifique est absolument inconnu chez nous, cette industrie créatrice du matériel pédagogique pour l'enseignement des sciences nous ne la connaissons pas. Nous n'avons jamais eu la pensée de la développer, parce que nous n'en sentons pas le besoin. Nous enseignons les sciences nouvelles d'une manière mauvaise, insuffisante et superficielle, quand nous les enseignons, et à ceux qui en ont le plus grand besoin, aux prêtres, aux avocats, aux philosophes, nous ne les enseignons souvent pas du tout. Et pourtant c'est à eux que nous confions l'avenir, la direction morale et économique du pays.

Et pourtant les avertissements, les exemples ne nous ont pas manqué. Le grand savant que fut P. J. Van Beneden, nous avait montré tout ce qu'on pouvait espérer d'une étude systématique de la faune marine, il avait fondé la première station zoologique à Ostende. Aujourd'hui tous les peuples civilisés qui ont un peu de leur territoire au bord de la mer ont une station de biologie marine, la Belgique n'a pas encore la sienne !

Remarquez que nous avons sous la main tous les éléments nécessaires, les matières pour créer, pour utiliser tous ces objets naturels à l'éducation de nos enfants. Il faudrait seulement se pencher sur la terre pour les ramasser, mais nous préférons les laisser pourrir le long de nos chemins.

La Providence nous a, en outre, donné un champ immense et neuf d'exploration. Qu'en avons-nous jusque maintenant retiré au point de vue scientifique ?

La part qui revient aux Belges dans cette exploration est bien minime à côté de ce que les étrangers ont récolté là bas, sous nos yeux, avec l'appui de nos fonctionnaires, avec l'aide de toutes les autorités congolaises.

En effet, à ma connaissance sept expéditions parfaitement équipées, comprenant zoologues, botanistes, minéralogistes, anthropologistes, ont été envoyés au Congo par des musées anglais, américains, autrichiens, allemands qui ont rapporté de notre colonie les trésors scientifiques innombrables, qui remplissent ces musées étrangers.

Pendant ce temps il n'est jamais venu à l'idée des autorités belges ou congolaises d'y envoyer une mission scientifique belge. On a bien envoyé l'un ou l'autre botaniste, ou géologue, isolément, mais dans des buts exclusivement pratiques, et comme ils étaient des hommes de science, tels Laurent et Cornet, ils ont fait une très ample moisson, pour le court temps qui leur restait à employer aux recherches purement scientifiques. A toutes les suggestions qu'on a faites d'envoyer sur place des hommes compétents pour recueillir les objets d'histoire naturelle, il était répondu : « Nous ferons récolter tout cela par nos agents ». Or, ces agents n'ont aucune connaissance des sciences naturelles et l'on peut mesurer tout ce que nous aurions pu réaliser au Congo, aux magnifiques résultats obtenus par notre savant collègue De Wildeman avec l'aide du frère Gillet, si nous avions pu organiser la récolte et la recherche d'une manière vraiment intelligente.

Voulez-vous bien saisir le vice fondamental de notre éducation scientique, réfléchissez bien aux faits suivants : Le duc de Mecklembourg, dans son exploration du Congo, a rapporté plus de deux mille espèces animales et végétales nouvelles. Les musées de Londres et de Berlin sont plus riche que notre musée de

Tervueren, en espèces congolaises, et pour faire les travaux qu'on leur confie, les savants belges sont obligés d'aller à Berlin ou à Londres, et de s'adjoindre les collègues qui conservent ces collections étrangères.

C'est ainsi que Dubois, Matschie, De Wildeman et Warburg se sont réunis. Il arrive souvent ceci : c'est que nos savants belges arrivent à Berlin avec des espèces qu'ils croient nouvelles, et qu'on leur réponde : « En effet, c'est une espèce nouvelle, voici les épreuves du mémoire où nous allons la publier ! »

Tandis que nos nationaux ne trouvent aucun intérêt à la récolte des objets d'histoire naturelle, parce que leur éducation au pays natal a été absolument détournée de toute préoccupation scientifique, les étrangers qui séjournent au Congo renvoient à leurs nationaux des quantités innombrables d'objets, dont nos savants belges apprennent l'existence par les revues étrangères.

Je ne puis me rappeler sans mélancolie une visite que je faisais au musée de Tervueren en compagnie de deux anciens congolais, officiers d'ailleurs distingués. En entrant dans la salle des mammifères, l'un d'eux s'écrie : « Tiens c'est ça le fameux okapi dont on a tant parlé dans la presse ; mais je le connais très bien cet animal là, j'ai en mangé plusieurs fois, c'est très bon ! » Voilà tout l'intérêt que le curieux animal avait excité chez mon compatriote ! Il ne pouvait en croire ses oreilles quand je lui appris que la peau de l'animal, qu'il n'avait pas même eu l'idée d'écorcher proprement, avait été vendue 15 000 francs.

Un des autres résultats de cette déplorable méthode de récolte, c'est que la moitié des objets que vous verrez au musée de Tervueren portent des indications fausses sur la localité de la récolte. Les objets portent l'indication du chef-lieu du district d'où on les a expédiés. Comment y sont-ils parvenus ? Par qui ont-ils été récoltés ? En quel endroit ? Est-ce une plaine, une montagne, un marécage ? On ne sait. On indique bien parfois une région, de l'Est par exemple. Savez-vous ce que représente cette région de l'Est ? Elle s'étend depuis l'Arruwimi jusque Bulmoayo ! Quelle est la cause de cet état d'esprit lamentable ? Ignorance et insuffisance d'éducation scientifique. Le Belge en dehors de sa profession ayant une culture générale insuffisante s'ennuie à son poste de colonisateur, tandis que l'Allemand, l'Anglais, qui ont une idée générale du monde entier, trouvent partout et en tout une occasion favorable de mettre leurs connaissances scientifiques à profit, ce qui leur procure une occupation saine et intellectuelle, dont la science et l'humanité entière tireront des découvertes qui auront peut-être des conséquences incommensurables.

Il y a une seule science naturelle que nous soyons parvenus à industrialiser convenablement, c'est la botanique, l'horticult culture et l'agriculture. Pourquoi ? Parce que c'est précisémendans ce domaine que les idées de saine pédagogie et d'enseignement scientifique ont été le mieux réalisées sous la vigilante impulsion de notre savant collègue le professeur Proost. Nous avons eu des hommes comme Van Hout, Lynden, Carnoy, Errera, qui ont transporté dans la pratique leurs connaissances scientifiques. Ils ont organisé des expéditions pour aller dans tous les pays du monde récolter les espèces nouvelles de plantes, des orchidées au Brésil, des palmiers en Afrique, et nous sommes pourtant dépassés sur ce terrain par les Allemands et les Américains. Je n'ai jamais visité plus belles pépinières, plus belles plantations que celle de Burbanck en Californie, qui, à l'heure actuelle, a produit par sélection plus de 1200 variétés de fleurs et de plantes.

Nous sommes fiers de nos floralies gantoises et à juste titre, mais elles sont dépassées par celles de San-Francisco en intérêt purement scientifique. J'y ai vu exposées en quantité innombrable quarante variétés de fleurs nouvelles, gagnées en une seule année par Burbanck. Il en est de même en pomologie, j'ai vu à l'exposition de Buffalo plus de 200 variétés de pommes gagnées et cultivées en grand sur le sol américain, fruits admirables que vous voyez aujourd'hui chez tous nos marchands de primeurs et que les Américains exportent dans le monde entier.

En voilà assez pour vous faire comprendre que le développement de toutes ces industries repose sur l'esprit d'observation et l'éducation scientifique des peuples où elles se sont si magnifiquement épanouies. Si elles ont pu trouver dans le public des encouragements, des initiatives, cela ne tient pas uniquement au côté professionnel de l'éducation, mais à la formation générale, à la culture scientifique généralisée, qui éclaire l'intelligence populaire, sur les nécessités modernes de la science et sur les applications pratiques toujours plus nombreuses.

Ce n'est pas en Belgique qu'un opticien enverrait son fils à l'Université pour y faire un doctorat en sciences physiques et mathématiques, qu'un empailleur ferait faire à son fils un doctorat en sciences zoologiques pour qu'il devienne un naturaliste éclairé ! Nos jeunes gens en possession de leur parchemin ne rêvent qu'une chose : devenir professeurs ou fonctionnaires ! En Allemagne, toutes ces professions sont devenues aujourd'hui des prolongements de l'enseignement scientifique, parce que celui-ci a élargi leur horizon en élevant leur niveau intellectuel ; tandis que chez nous ceux qui les exercent sont restés de simples trafiquants. Nous sommes victimes du professionnalisme.

J'estime, après une enquête personnelle, que les industries allemandes que je viens de vous esquisser sommairement occupent d'une manière très rénumératrice plus de 250 000 personnes des deux sexes.

L'idée de vous en entretenir aujourd'hui m'est venue en pensant à nos ouvriers belges auxquels la France veut interdire l'accès de son territoire. Il m'a paru urgent et opportun de signaler que nous avons encore chez nous les moyens de les occuper et de les diriger vers des professions plus intellectuelles en leur enseignant à tirer parti des objets d'histoire naturelle.

Les nations qui ont développé chez elles l'enseignement scientifique sont incontestablement aujourd'hui les éducatrices du monde civilisé, parce qu'il a un retentissement profond sur tout le caractère national.

Il suffira pour en percevoir les effets frappants de regarder autour de vous.

Les pays de race germanique et anglo-saxonne ont été les premiers à comprendre le rôle vraiment éducatif des sciences de la nature. Ils ont vu avec une clairvoyance admirable que la condition primordiale d'une bonne éducation, c'est d'avoir une idée précise, exacte de la réalité.

Ils ont compris qu'un littérateur avant d'entreprendre la description d'un paysage doit au moins connaître les choses qu'il veut décrire et savoir les appeler par leurs noms.

Ils ont pénétré la pensée de saint Thomas d'Aquin quand il dit : *Nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu.* Rien n'existe dans l'intelligence qui n'y soit éveillé par le moyen des sens, autrement dit par la méthode expérimentale, par l'observation de la nature (De Give).

Le développement et l'exercice conscient de nos moyens de perception a été considéré par eux comme une partie importante de toute formation de la jeunesse.

Voilà, je crois, la vraie raison de la supériorité de l'Allemagne et des pays anglo-saxons sur les peuples latins. Les uns préparent leurs jeunes gens à la vie réelle en leur donnant un aperçu général de l'univers, du milieu où ils auront à lutter pour l'existence. Ils sont armés pour la lutte, ils connaissent le sol sur lequel ils marchent et savent qu'on peut y trouver des pépites et des perles même dans les fumiers.

Les peuples latins sous prétexte d'idéalisme nourrissent leurs enfants, pendant tout le temps de l'écolage, de fictions, d'histoires plus ou moins chevaleresques, qui les entraînent une fois dans la vie publique à la poursuite d'utopies irréalisables.

Lancés après une telle préparation dans un monde qu'ils ignorent, ils y apportent leurs systèmes intangibles, leurs illusions poétiques, leurs idées arrêtées. Ils sont butés sur une formule !

Ils veulent résoudre les questions sociales avec des règles absolues comme des théorèmes de géométrie, sans tenir compte des contingences et de l'imperfection de notre pauvre nature humaine.

N'est-ce pas le socialisme français triomphant et généralisé ! Or, ce n'est un secret pour personne, les peuples latins sont ceux qui font le moins de sacrifices pour les progrès de la science, qui paient le plus mal leurs savants, qui leur donnent les moyens de travail avec le plus de parcimonie. Pourquoi ? Parce que chez eux les classes dirigeantes imprégnées d'idées païennes, du culte exagéré de la Beauté, conventionnelles et de la mode, sont la proie du dilettantisme ou du snobisme. On les a élevées en les nourrissant de grec et de latin, et on leur a fermé les yeux devant le grand livre de la Nature, la source de toute vraie Beauté.

Les peuples latins sont les plus ignorants des choses de la Nature, parce qu'on ne les enseigne pas dans leurs collèges !

Nous sommes encore trop latins dans nos méthodes et dans nos programmes, et aussi longtemps que nous ne nous serons pas affranchis de cette tutelle, pour adopter franchement la pédagogie et les méthodes anglo-saxonnes, nous assisterons impuissants au triomphe de nos voisins.

Imprimerie F. & R. Ceuterick, 60, rue Vital Decoster, Louvain.
(Ancienne rue des Orphelins, 32).

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXIV, 1875 à 1910. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun . . . . fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Un vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr. ; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Un vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Éd. Van der Smissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905). . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : **T. I.** Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. (Épuisé.) **T. II.** VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gènes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. III.** XIII. Le Port moderne de Gènes, M. Theunissen. XIV. Ostende. L.-Th. Léger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow. A. Vanderstichele. Prix : 3 francs. **T. IV.** XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. V.** XXVIII. Rouen, G. Blondel. XXIX. Montréal, M. Dewavrin. XXX. Seattle et Tacoma, M. Rondet-Saint. XXXI. Trieste, Fiume, Venise, M. Dewavrin. XXXII. Venise au moyen âge, C. Terlinden. XXXIII. Les ports du Nord-Est de l'Angleterre, J. Meuwissen. — Conclusions, G. Blondel. — Appendices : L'administration des Ports, J. Charles, S. J. ; L'industrie des transports maritimes, H. Mansion. Prix : 3 francs.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le Dr X. Francotte. Brochure in-8° de 48 pages (1907) . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le Dr Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) fr. **0 75**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième,** 20 volumes (1892-1901). La livraison de janvier 1902 a inauguré la **troisième série.**

La revue paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique,** où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de **Variétés.**

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** % ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la REVUE. Un vol. du format de la REVUE de XII-468 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. & R. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

TRENTE-CINQUIÈME ANNÉE, 1910-1911
SECOND FASCICULE

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1911

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Session du 26 janvier 1911, à Bruxelles. — Séances des Sections.

Première Section 121
Deuxième — 129
Troisième — 141
Quatrième — 154
Sixième — 176
Assemblée générale 176

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité, par M. le comte de Sparre 79
Quelques remarques sur le principe de la « tendance des rotations au parallélisme » énoncé en 1852 par Léon Foucault, par M. Henry Janne 151
Sur une transformation unirationnelle, par M. J. Neuberg 170
Sur la géométrie des mouvements oculaires, par M. J. Delemer . . 179
Nouveaux Bethylides et Dryinides exotiques du British Museum de Londres, par M. J.-J. Kieffer 200
Le Chelléen belge, par M. l'abbé J. Claerhout 234
L'habitation rurale de la Westflandre, par M. l'abbé J. Claerhout . . 248
Chrysopides nouveaux (Ins. neur.), par le R. P. Longin Navas, S. J. 266

Le volume des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** de la REVUE et des ANNALES, et l'**Administration** de ces deux publications et de la *Société scientifique*, au Secrétariat, 11, rue des Récollets, Louvain.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : **M. Paul Mansion,**
2, quai des Dominicains, Gand.

SESSION DU 26 JANVIER 1911

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première Section

M. Mansion, à l'examen duquel le travail du R. P. Bosmans sur la *Clavis mathematica* d'Oughtred a été renvoyé, trouve que ce mémoire est très digne d'être imprimé dans la seconde partie des Annales. L'auteur, qui, dans ses recherches historiques antérieures, a montré que plusieurs algébristes du xvi^e siècle étaient de vrais précurseurs de Viète, prouve ici que la première édition de la *Clavis* d'Oughtred (1631), comme l'*Invention nouvelle* d'A. Girard (1629), est un des chaînons qui relient l'algèbre de Viète à celle de Descartes. Oughtred, en particulier, se sert des symboles algébriques qu'il a imaginés (symboles assez compliqués, mais plus simples que ceux de Viète), avec la pleine conscience de la valeur de cette langue idéographique, à laquelle le génie de Descartes allait donner une forme définitive six ans plus tard, dans sa *Géométrie* (1637).

La Section adopte les conclusions du rapport de M. Mansion.

M. de la Vallée Poussin fait rapport sur le mémoire de M. Goedseels intitulé *Simplification de la méthode de l'approximation minima* et propose l'insertion de ce mémoire dans les Annales.

Après quelques remarques de M. Mansion et une réponse du rapporteur, la proposition de ce dernier est adoptée.

M. Lecat fait la communication suivante *sur une généralisation d'un théorème de Brioschi.*

Il est bien connu qu'un déterminant symétrique gauche (hémisymétrique) ordinaire, d'ordre pair, est, en valeur absolue, le carré d'une fonction entière des éléments, appelée *pfaffien* (A. Cayley). On sait aussi que ce théorème admet la réciproque : *le carré de tout déterminant peut être mis sous forme d'un déterminant symétrique gauche* ; en d'autres termes, tout déterminant est égal à un pfaffien (F. Brioschi).

Le théorème de Cayley a été généralisé par L. Gegenbauer ([1]) au cas des déterminants à n dimensions. Il démontre notamment que (pour n pair, seul cas qui nous intéresse ici) *tout déterminant D symétrique gauche* ([2]) (hémisymétrique) *à $n = 2\nu$ dimensions et de degré pair $p = 2\pi$* [défini par la propriété que dans l'élément général

$$b_{i_1,\ldots,i_n} \quad (i = 1, \ldots, p) ,$$

tout indice de rang impair peut être permuté avec l'indice qui le suit immédiatement, à condition de changer le signe de l'élément] *est le carré d'une fonction entière des éléments* ([3]). On a effectivement ([4]) :

([1]) *Ueber windschiefe Determinanten höheren Ranges.* Denkschriften Akademie Wien (Math.-naturwiss. Classe), tome 55 I (1889), pp. 39/46. Dans une Note [Proceedings London math. Society, t. 24 (1892-1893), p. 67 et suivantes] non signalée dans nos *Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions*, 1910, J. Campbell dit — à tort — que le théorème de Cayley ne se généralise pas pour les déterminants de classe supérieure. Cette erreur tient à la manière dont Campbell définit les déterminants symétriques gauches.

([2]) *Windschief* (Gegenbauer).

([3]) Cf. l'Intermédiaire des mathématiciens, tome 17 (1910), p. 98/9.

([4]) La somme, s'appliquant à tous les ω, est une somme multiple. Nous abrégeons le plus possible les notations, afin d'en diminuer la complication encombrante.

La signification de la parenthèse soumise au signe Π, résulte de la notation assez usitée, par certains auteurs, dans la théorie des déterminants, consistant à représenter par le symbole

$$(a_1, \ldots, a_p) ,$$

la valeur v du déterminant obtenu en prenant pour colonne de rang r celle de rang a_r $(r = 1, \ldots, p)$ du déterminant dont tous les éléments sont nuls, sauf les

$$D = (p!)^{\nu-1} \left[\sum_{\omega=1}^{p} \prod_{\sigma=1}^{\nu} \left(\omega_{2\sigma-1}^{(1)}, \ldots, \omega_{2\sigma-1}^{(\pi)} ; \right.\right.$$

$$\left.\left. \omega_{2\sigma}^{(1)}, \ldots, \omega_{2\sigma}^{(\pi)} \right) \prod_{\alpha=1}^{\pi} b_{\omega_1^{(\alpha)}, \ldots, \omega_n^{(\alpha)}} \right]^2$$

La quantité entre crochets pourrait être appelée *pfaffien (généralisé)*.

On n'a pas encore essayé d'étendre le théorème de Brioschi au cas des déterminants de classe supérieure (réciproque du théorème de Gegenbauer).

Voici quelques indications à ce sujet. Suivons une méthode analogue à celle du théorème ordinaire de Brioschi, et examinons quelle est la structure sous laquelle se présente alors le déterminant C dont la racine carrée est un déterminant quelconque à $\nu + 1$ dimensions. Si, dans les expressions bien connues

$$\left\{ \begin{aligned} \left| d_{i_1, \ldots, i_{r+s-2}} \right|_p &= \left| b_{j_1, \ldots, j_r} \right|_p \left| h_{k_1, \ldots, k_s} \right|_p \\ d_{i_1, \ldots, i_{r+s-2}} &= \sum_{\rho=1}^{p} b_{i_1, \ldots, i_{r-1}, \rho} \cdot h_{i_r, \ldots, i_{r+s-2}, \rho} \quad , \end{aligned} \right.$$

donnant le produit de deux déterminants, l'un à r, l'autre à s dimensions, sous forme d'un déterminant à $r + s - 2$ dimensions, on remplace l'indice ρ de l'élément h par

$$\rho - (-1)^{\rho} \quad , \qquad (1)$$

et si l'on compense l'effet de cette transformation, en introduisant convenablement des signes + ou —, on peut écrire, en faisant $r = s = \nu + 1$:

$$d_{i_1, \ldots, i_{2\nu}} = \sum_{\rho=1}^{p} (-1)^{\rho}\, b_{i_1, \ldots, i_\nu, \rho} \cdot h_{i_{\nu+1}, \ldots, i_{2\nu}, \rho - (-1)^{\rho}} .$$

---

diagonaux qui valent l'unité. Cette valeur v est $+1$ ou -1, suivant que, tous les a étant différents, le nombre des inversions est pair ; nulle, s'il y a au moins deux a égaux entre eux.

En remplaçant les h par des b, ce qui revient à prendre le carré du déterminant des b, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & d_{i_{\nu+1},\dots,i_{2\nu};\,i_1,\dots,i_\nu} \\ = & \sum_{\rho=1}^{n} (-1)^{\rho} b_{i_1,\dots,i_\nu,\,\rho-(-1)^{\rho}}\,.\,b_{i_{\nu+1},\dots,i_{2\nu},\,\rho} \\ & = -d_{i_1,\dots,i_{2\nu}}\,, \qquad (d) \end{aligned}$$

ce qui entraîne $d=0$ pour

$$\prod_{\epsilon=1}^{\nu} \delta_{i_\epsilon,\,i_{\epsilon+\nu}} = 1,$$

En utilisant un théorème fondamental, on voit que dans l'élément général du déterminant C, on peut grouper les indices en ν couples d'indices consécutifs, les indices devant être permutés entre eux simultanément dans tous les couples (¹). Si donc, dans le déterminant symétrique gauche, i_τ peut (à condition de changer le signe de l'élément) être remplacé par $i_{\tau-(-1)^\tau}$, cette opération étant effectuée pour un *nombre quelconque de valeurs de* τ, choisies parmi les nombres $1, 2, \dots, 2\nu$; dans le déterminant caractérisé par *(d)*, cette opération doit, au contraire, être effectuée pour *toutes les valeurs de* τ, dans un même élément. Il est évident que *les deux déterminants ne se confondent que si* $\nu=1$, auquel cas on obtient le théorème de Brioschi.

Il ne faudrait pas pousser la conclusion plus loin et, s'appuyant sur ce qu'un déterminant symétrique gauche peut être considéré comme *cas particulier* (excepté pour $\nu=1$) d'un déterminant caractérisé par la condition *(d)*, affirmer que le théorème de Brioschi ne peut être généralisé pour $n>2$, c'est-à-dire que la

---

(¹) Des déterminants satisfaisant à cette condition se présentent dans plusieurs questions. Nous proposons de les appeler « *zygomorphes* gauches ». Le terme « zygomorphe » est emprunté à la Botanique. Le déterminant que l'on obtiendrait sans effectuer la transformation *(t)* serait simplement zygomorphe (non gauche). De tels déterminants se rencontrent dans la théorie des invariants des formes algébriques.

réciproque du théorème de Gegenbauer n'est vraie que pour $\nu = 1$. Car le déterminant C n'est qu'un déterminant *spécial* satisfaisant à *(d)* et, s'il est *vraisemblable* qu'aucune transformation, n'altérant pas sa valeur, ne pourrait le mettre sous forme symétrique gauche, soit à 2ν, soit à $\nu + 1$ dimensions (ν impair), cela n'est *pas prouvé*. Ajoutons que ce problème paraît d'une difficulté à peu près insurmontable.

M. Dutordoir présente à la section les notes de M. Rose intitulées : 1. *Sur l'hélicoïde gauche à plan directeur*. 2. *Sur certaines congruences de droites de Ribaucour*.

M. Neuberg se charge de faire rapport sur la première de ces notes, M. Mansion, de soumettre à la section un rapport sur la seconde.

M. Janne fait part à la section du travail intitulé : *Quelques remarques sur le principe de la « tendance des rotations au parallélisme » énoncé en 1852 par Léon Foucault.*

La section décide que le travail de M. Janne sera inséré dans les ANNALES.

Le R. P. Bosmans fait une communication *sur la résolution de l'équation du 2^e^ degré, d'après Simon Stévin*. Cette communication sera insérée dans les ANNALES.

M. Dutordoir donne connaissance d'une note de M. Wasteels *sur l'ellipsoïde des dilatations*.

1. Considérons un milieu continu dont le mouvement est rapporté au trièdre $Oxyz$. Un point matériel, placé en $M(x, y, z)$ à l'instant t, arrive en $M'(X, Y, Z)$ à l'instant $t + \Delta t$. Nous désignerons par $\bar{e}$ et E les coordonnées vectorielles $\overline{OM}$ et $\overline{OM'}$ rapportées au trièdre donné.

Occupons-nous du mouvement du système matériel autour de M, c'est-à-dire, de son mouvement par rapport à un trièdre $(Mx'y'z')$ animé de la translation du point M. Dans ce mouvement, un point matériel, placé en $A(x', y', z')$ à l'instant t, vient occuper, à l'instant $t + \Delta t$, la position $A'(X', Y', Z')$; les coordonnées x', y', z', X', Y', Z' se rapportent au trièdre auxiliaire. Supposons enfin que la déformation homogène tangente en M à la proposée amène le même point A en A_1.

On sait que la dilatation linéaire en M, suivant la direction MA, peut s'exprimer par

$$\mathfrak{d} = \frac{MA_1}{MA} - 1. \tag{1}$$

On a d'ailleurs

$$\overline{MA_1} = \frac{\delta \overline{E}}{\delta x} x' + \frac{\delta \overline{E}}{\delta y} y' + \frac{\delta \overline{E}}{\delta z} z', \tag{2}$$

les deux systèmes d'axes étant supposés parallèles. Or, il est à remarquer que les dérivées de E ne sont pas nécessairement différentes de zéro ; il en résulte que, dans certains cas particuliers, $\overline{MA_1}$ peut être nul ; il en est alors de même de MA_1, et la valeur de $\mathfrak{d}$ se réduit à -1.

Montrons, sur un exemple simple, que ce cas peut effectivement se présenter. Supposons

$$X' = x'^3, \qquad Y' = y'^3, \qquad Z' = z'^3 ;$$

on aura, pour la dilatation en M suivant Mx',

$$\mathfrak{d} = \lim_{x'=0} \frac{X' - x'}{x'} = \lim_{x'=0} \frac{x'^3 - x'}{x'} = \lim_{x'=0} (x'^2 - 1) = -1.$$

On trouve d'ailleurs sans peine que, dans cet exemple, la dilatation en M suivant une direction quelconque est égale à -1.

Ainsi, *contrairement à l'assertion de certains auteurs, cette valeur particulière* ($\mathfrak{d} = -1$) *ne doit nullement être exclue.*

2. Exprimons maintenant $\mathfrak{d}$ au moyen des dérivées de $\overline{E}$.

Si l'on pose

$$MA = r, \qquad x' = r\alpha, \qquad y' = r\beta, \qquad z' = r\gamma,$$

(2) devient

$$\overline{MA_1} = r \left(\frac{\delta \overline{E}}{\delta x} \alpha + \frac{\delta \overline{E}}{\delta y} \beta + \frac{\delta \overline{E}}{\delta z} \gamma \right) ;$$

or, (1) peut s'écrire

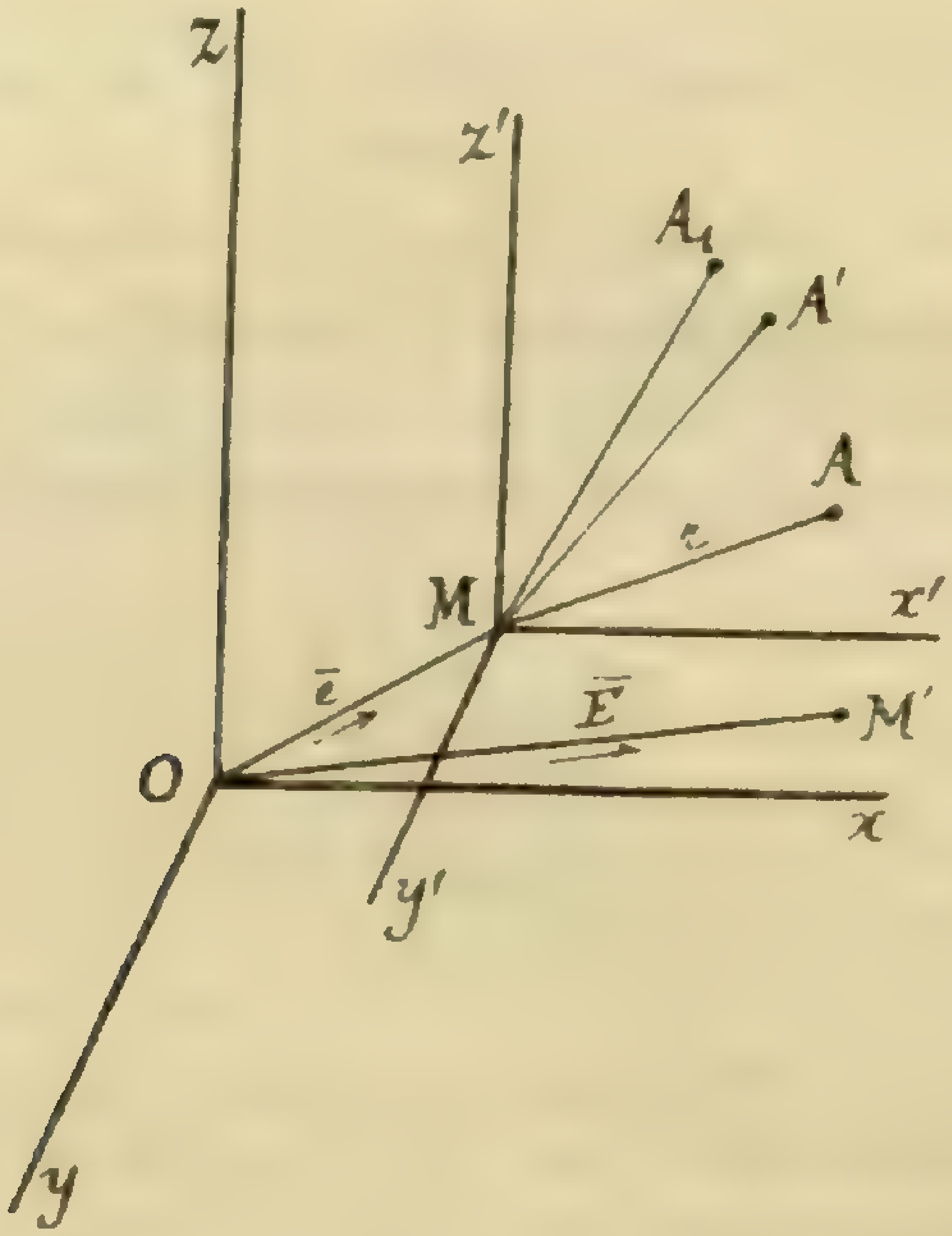
$$\delta = \frac{|\overline{\mathrm{MA}_1}|}{r} - 1\,;$$

par suite,

$$\delta = \left|\frac{\delta\overline{\mathrm{E}}}{\delta x}\alpha + \frac{\delta\overline{\mathrm{E}}}{\delta y}\beta + \frac{\delta\overline{\mathrm{E}}}{\delta z}\gamma\right| - 1. \tag{3}$$

3. Cela étant, considérons la quadrique représentée par l'équation

$$\left(\frac{\delta\overline{\mathrm{E}}}{\delta x}x' + \frac{\delta\overline{\mathrm{E}}}{\delta y}y' + \frac{\delta\overline{\mathrm{E}}}{\delta z}z'\right)^2 = 1. \tag{E}$$



Si A est un point de la surface, on peut écrire

$$r^2\left(\frac{\delta\overline{\mathrm{E}}}{\delta x}\alpha + \frac{\delta\overline{\mathrm{E}}}{\delta y}\beta + \frac{\delta\overline{\mathrm{E}}}{\delta z}\gamma\right)^2 = 1,$$

c'est-à-dire, en vertu de (3),

$$r^2(1+\delta)^2 = 1,$$

δ étant la dilatation en M suivant MA.

On voit que la quadrique en question donne une représentation simple de la variation de δ autour de M ; l'équation (E) montre qu'elle est, en général, un ellipsoïde réel ; c'est *l'ellipsoïde des dilatations ;* toutefois, d'après ce qui précède, *la quadrique peut dégénérer en un cylindre elliptique ou un système de deux plans parallèles, ou même être entièrement rejetée à l'infini.*

La section décide l'insertion dans les Annales, du mémoire présenté à la dernière séance par M. le Comte de Sparre *sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité* sur le rapport favorable des commissaires MM. de Béthune et Pasquier.

M. Mansion fait la remarque suivante *sur une double formule de Laplace.*

Soient p et q les probabilités de deux événements simples contraires A et B, de manière que $p + q = 1$.

La probabilité que l'événement A, en μ épreuves, puisse arriver au moins $m = \mu - n$ fois est donnée par l'une ou l'autre des deux formules :

$$P_1 = p^{\mu} + \mu p^{\mu - 1}\, q + \frac{\mu(\mu - 1)}{1.2}\, p^{\mu - 2}\, q^2 + \cdots + C_{\mu}^{m}\, p^m\, q^n,$$

$$P_2 = p^m \left[1 + mq + \frac{m(m+1)}{1.2}\, q^2 + \cdots + C_{\mu - 1}^{n}\, q^n\right].$$

Laplace a prouvé péniblement l'égalité $P_1 = P_2$, en mettant la probabilité dont il s'agit sous une troisième forme P_3, qui est un quotient de deux intégrales définies *(Théorie analytique des probabilités*, livre II, n^{os} 7 et 8, pp. 205-217 de la 3^e édition ; *Supplément* IV, n^o 4, pp. 23-28).

Poisson a obtenu, d'une manière simple, par les principes élémentaires du calcul des probabilités, l'expression P_2 et a montré que P_3 était égale à P_2 en calculant l'intégrale du numérateur de P_3, au moyen de l'intégration par parties *(Recherches sur la probabilité des jugements*, n^o 73, pp. 189-190 ; édition allemande, pp. 154-156).

Il est beaucoup plus facile de prouver que $P_1 = P_2$ et d'obtenir en même temps P_3, en remarquant que P_1 et P_2 sont nulles pour $p = 0$ et que leurs dérivées par rapport à p sont égales.

On trouve, en effet, presque immédiatement,

$$\frac{dP_1}{dp} = m\, C_\mu^m\, p^{m-1}\, q^n,$$

si l'on se souvient que $q = 1 - p$. Par suite, puisque $P_1 = 0$ pour $p = 0$,

$$P_1 = m\, C_\mu^m \int_0^p x^{m-1}\,(1-x)^n\, dx.$$

Pour $p = 1$, il vient $P_1 = 1$; on a donc

$$1 = m\, C_\mu^m \int_0^p x^{m-1}\,(1-x)^n\, dx\ ;$$

d'où

$$P_1 = \int_0^p x^{m-1}\,(1-x)^n\, dx : \int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^n\, dx.$$

Le second membre est, à la forme près, l'expression P_3 de Laplace.

Par des calculs un peu plus longs, mais simples encore, on trouve pour $\frac{dP_2}{dp}$ la même valeur que pour $\frac{dP_1}{dp}$, et, par suite, $P_2 = P_3 = P_1$.

On conclut immédiatement de l'expression P_3, que la probabilité dont il s'agit ici est une fonction continue de p, dont il est facile de calculer approximativement l'accroissement quand p varie de Δp, Δp étant suffisamment petit.

Seconde section

M. R. De Muynck, Professeur à l'Université de Louvain, présente la communication suivante sur des *Sons produits dans certaines décharges électriques.*

Au cours de mesures sur la décharge électrique entre un fil métallique et une sphère, il se produisit un phénomène de vibrations sonores qui ne paraît pas avoir été signalé jusqu'à présent.

Dans ces expériences, un fil de platine, de 0,025 cm. de diamètre était tendu horizontalement, sur des supports isolants, distants de 55 cm. Il était intercalé dans un circuit comprenant une batterie d'accumulateurs et un rhéostat, et pouvait ainsi être porté à l'incandescence par le passage du courant. Une de ses extrémités était mise au sol.

En face de ce fil se trouvait placée une sphère en laiton de 1,6 cm. de diamètre, reliée à une des armatures d'une batterie de quatre grandes bouteilles de Leyde, l'autre armature étant au sol.

Le condensateur d'autre part était en communication avec les deux conducteurs d'une machine de Holtz, de sorte que ce dispositif permettait de produire des étincelles entre le fil de platine et la sphère, placés à distance convenable.

Or, lorsque cette distance était trop grande pour qu'une étincelle pût éclater, il se produisit un phénomène absolument inattendu : le fil de platine incandescent se mit à rendre un son nettement perceptible, qui, se communiquant bientôt aux supports et à la table sur laquelle les appareils étaient placés, provoquait un ronflement très prononcé. Les oscillations du reste étaient très visibles, surtout à l'obscurité, où le fil présentait l'apparence d'un fuseau lumineux, ayant en son milieu une épaisseur quelquefois supérieure à un centimètre.

Ces vibrations se produisirent quel que fût le signe de la charge électrique du fil, quelle que fût la forme de l'autre électrode : sphère, pointe, fil tendu parallèlement au fil de platine, lame rectangulaire. Dans ce dernier cas l'amplitude des oscillations était plus forte lorsque le grand côté du rectangle était parallèle au fil. Le son produit ne paraissait pas pur ; on constatait que sa hauteur variait quelquefois dans le cours d'une expérience, et toujours lorsqu'on provoquait une variation de température du fil. A froid les vibrations n'ont pas été perceptibles.

Dans d'autres conditions expérimentales, la production de sons dans les décharges électriques a été plusieurs fois notée.

Ainsi Wiedemann (¹) cite diverses observations anciennes, se rapportant à des sons émis par la charge et la décharge d'une bouteille de Leyde ou d'un autre condensateur. Il les explique en faisant remarquer que si les armatures n'adhèrent pas en tous leurs points à la lame diélectrique, les parties non adhérentes doivent être attirées contre l'isolant dans chaque charge, pour

---

(¹) G. Wiedemann. *Die Lehre von der Elektricität* II, p. 139, 1894.

revenir à leurs positions primitives à la décharge. Si ce phénomène se reproduit un certain nombre de fois par seconde, il doit évidemment donner naissance à une vibration sonore.

W. Hittorf (¹) a étudié la décharge d'un condensateur à travers un tube à gaz raréfié. Le gaz s'illumine à chaque décharge et donne, d'après la résistance intercalée, une lueur continue ou discontinue. Dans ce dernier cas le condensateur émet un son qui cesse de se produire lorsque la lumière devient continue. Hittorf croit, avec W. Thomson, que cette expérience fournit un argument très sérieux à la théorie des diélectriques de Faraday.

Dans un autre genre d'expériences, une élévation périodique de température produite par un courant intermittent dans un fil tendu, doit provoquer une alternance de dilatations et de contractions qui peuvent donner naissance à un son. De cette manière s'expliquent les observations de Preece (²) et Chrystal (³), qui obtiennent des sons au moyen du courant de quelques éléments au bichromate.

Plus récemment Hornemann (⁴) a publié une étude sur les sons produits par des courants intermittents ou alternatifs. Mais, comme le titre même de son travail l'indique, il s'agit de sons observés au contact de deux conducteurs. Le phénomène est totalement différent de celui qui nous occupe ; il en est de même, comme on le voit facilement, des observations de Hittorf et de Preece.

Quant à l'explication de la production des sons dans notre dispositif, il semble qu'on peut la baser sur les deux faits d'attractions électrostatiques et de variation d'élasticité par échauffements périodiques, pourvu qu'on y joigne comme troisième cause la déperdition de la charge électrique par le fil incandescent. Cette déperdition se constate aisément à la simple vue, même dans une demi-obscurité. Le fil de platine étant à une distance trop grande de la sphère pour qu'une étincelle jaillisse, et n'étant pas d'autre part parcouru par le courant de la batterie, aucun phénomène particulier ne se manifeste ; mais lorsqu'il est rendu incandescent,

---

(¹) Wied. Ann. 7, p. 568, 1879.

(²) Proc. Roy. Soc. Lond. *30*, p. 408, 1880.

(³) Proc. Roy. Soc. Edinb., p. 682, 1879-80.

(⁴) Ann. d. Phys. u. Chem. 7, p. 862, 1902.

on voit, si la différence de potentiel est suffisante, l'électricité s'échapper de la portion qui est en regard de la sphère de laiton sous la forme d'une effluve bien caractérisée, différente d'aspect d'après le signe de la charge du fil, et dont la largeur augmente avec l'incandescence. Mais par la formation même de l'effluve cette incandescence diminue, ou quelquefois même disparaît complètement, sur toute la partie qui supporte l'effluve : de sorte que le fil subit en même temps une perte de charge et un refroidissement.

Partant de là, on peut se figurer la formation d'ondes sonores de la façon suivante : le platine subit de la part de la sphère une attraction électrostatique qui le rapproche de celle-ci ; mais ce rapprochement même donne naissance à un effluve ; celui-ci produit une décharge partielle et en même temps un refroidissement, donc une contraction du fil qui, sous l'action combinée de ces deux causes, est ramené en arrière, vers sa position primitive. L'effluve ayant disparu, un nouvel échauffement a lieu, suivi d'attraction : le phénomène dès lors se répète périodiquement et peut donner naissance à des vibrations sonores.

Cette interprétation fort simple n'exclut pas l'intervention possible d'autres facteurs, mais on voit qu'en tout état de cause, et en l'absence d'autres influences possibles, les principes énoncés plus haut suffisent à donner l'explication de ce phénomène que nous avons tenu à signaler, ne fût-ce que pour attirer l'attention sur une cause possible d'erreurs dans les mesures.

M. De Muynck présente la communication suivante : *Contribution à l'étude de l'électrosténolyse.*

Grotthus (¹) avait déjà observé que lorsque le courant qui traverse un électrolyte est obligé de passer par une ouverture très étroite, il produit des phénomènes d'une nature spéciale, nettement distincts de ceux de l'électrolyse ordinaire.

Braun (²), qui les a étudiés de plus près, leur a donné le nom d'*électrosténolyse* ou *sténolyse* et a noté qu'ils se manifestent dans certains électrolytes seulement : solutions de nitrate d'argent,

---

(¹) Gilb. Ann. *61*, p. 65, 1819.

(²) Wied. Ann. *42*, p. 450, 1891 ; *44*, p. 473, 1891.

acétate et nitrate de plomb, chlorure d'or, nitrate de cobalt, nitrate de palladium, chlorure de platine, sulfate de fer, sulfate de thallium.

Supposons qu'un récipient contenant un de ces liquides soit partagé en deux compartiments, par exemple par une lame de verre dans laquelle on a pratiqué une fente, ou qui présente une cassure. Appliquons aux deux électrodes qui plongent dans ce récipient une force électromotrice croissante. Pour de faibles valeurs de celle-ci aucun phénomène spécial ne se manifeste, mais à un certain *voltage critique* il se produit sur les parois de la fente un dépôt métallique, accompagné d'un dégagement de bulles de gaz. Le phénomène prend quelquefois un nouvel aspect, surtout sous des forces électromotrices élevées : il présente des pulsations rythmiques, assez fréquentes pour rendre un son nettement perceptible. En outre, la fente commence à émettre de la lumière de façon à rappeler d'une manière frappante l'interrupteur de Wehnelt.

Le présent travail n'envisage pas cette dernière phase, il apporte une contribution expérimentale à l'étude de ce qui se passe aux voltages plus faibles.

Après quelques tâtonnements le dispositif suivant fut adopté : un tube en verre, fermé à l'extrémité inférieure, et présentant sur le côté des fentes obtenues par refroidissement brusque, fut placé verticalement dans un récipient où était versée la solution à sténolyser. Le tube contenait quelques centimètres cubes de la même solution ; on y plaça la cathode, l'anode plongeant dans le vase extérieur. Un voltmètre, un milliampèremètre et un galvanomètre shunté donnaient la différence de potentiel aux électrodes et l'intensité du courant.

Sténolyse de solutions de sulfate de fer entre électrodes de platine.

D'après la dispositif décrit, on soumit à des voltages allant de 0 à 110 volts une solution fraîche de sulfate de fer.

Avec ce sel l'observation du premier dépôt métallique ne se fait pas avec netteté, et le but de cet essai était de reconnaître si, pour obtenir le point précis du voltage critique, la lecture des variations d'intensité du courant ne pourrait pas remplacer avantageusement l'observation directe.

On constate effectivement qu'à un certain voltage la déviation du galvanomètre devient irrégulière, à cause de la sténolyse. Cela se produisit, dans trois tubes différents, aux voltages de 84, 108 et 95.

Cependant on s'aperçoit immédiatement que cette méthode de détermination du voltage critique manque de précision. Le motif en est que le galvanomètre enregistre en réalité deux courants, qui se superposent dans le circuit : celui de l'électrolyse ordinaire, en vertu duquel le métal tend à se déposer sur la cathode, et celui de la sténolyse. Or, le premier n'est pas constant et vient masquer le phénomène.

Nous concluons : la méthode galvanométrique ne peut pas remplacer l'observation directe.

Sténolyse de solutions de nitrate d'argent entre électrodes d'argent.

Le nitrate d'argent présente avec une netteté remarquable l'apparision du premier dépôt, et à ce titre se prête fort bien aux mesures.

Avec les solutions de ce sel un premier fait intéressant fut constaté. Pour obtenir dans un tube une première sténolyse, il fallut monter à 80 volts ; mais une fois ce premier passage effectué, il suffisait, pour la répétition du phénomène, d'une différence de potentiel de 1 volt environ. Cette facilité plus grande peut se maintenir pendant quelque temps : ainsi, pour un autre tube, il fallut mettre la première fois 30 volts, et après 24 heures de repos 10 volts seulement.

Cette particularité suggère aussitôt une comparaison avec les mauvais contacts étudiés par Branly (1) et la question se pose de savoir si, comme les mauvais contacts et les cohéreurs, la cellule sténolytique n'est pas sensible aux vibrations électriques. Des essais faits dans ce sens ont donné un résultat négatif. A plusieurs reprises des étincelles électriques furent tirées et des bouteilles de Leyde furent déchargées dans le voisinage d'un tube sténolytique pendant que des forces électromotrices allant de 1 à 110 volts lui étaient appliquées : le galvanomètre n'a pas manifesté la moindre variation de courant.

---

(1) Journ. de Phys. 3e Série, t. IV, Juin 1895. Voir *notice sur les travaux scientifiques de M. Branly*, p. 29. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Nous pouvons donc dire : la cellule sténolytique présente certains caractères des mauvais contacts, mais elle n'est pas, comme ceux-ci, sensible aux ondes électriques,

De ces expériences cependant une conclusion est à retenir : si on veut obtenir, pour une solution donnée, le voltage critique, il faudra se garder d'expérimenter plusieurs fois de suite avec le même tube.

Cette observation fut mise à profit dans les expériences suivantes, où il s'agissait de vérifier si le voltage critique est indépendant de la fente.

Dans ce but, pour une même solution, une série de déterminations du voltage initial fut faite, en prenant soin d'employer pour chaque mesure un tube frais. En même temps fut notée l'intensité du courant, ce qui permet d'estimer, d'une façon approchée, les dimensions de la fente.

Il fut trouvé que d'un tube à l'autre le voltage critique variait entre des limites assez étendues, qui furent de :

25 à 30 volts (solution 1)
10 à 30 volts (solution 2)
10 à 30 volts (solution 3)
5 à 31 volts (solution 4)
15 à 20 volts (solution 5)

En même temps, à cause des dimensions nécessairement inégales des fentes, l'intensité oscillait d'une expérience à la suivante, entre les limites 0,1 et 8,0 milliampères. Mais ces variations d'intensité ne correspondent en aucune façon avec les variations de force électromotrice.

On peut conclure de là : le voltage critique varie avec la fente, mais il est indépendant de la grandeur de l'ouverture.

Il est à remarquer que certains tubes ont donné des voltages très faibles, de 10 et même de 5 volts. Ces valeurs sont inférieures aux chiffres donnés par Braun. L'écart s'explique peut-être par la nature de la fente.

Une autre question se présente ici à l'esprit : celle de l'influence, sur le voltage critique, de la concentration de la solution.

Les mesures dont on vient de parler furent faites avec cinq solutions dont la concentration allait de 1 °/₀ environ à 0,02 °/₀. Les chiffres obtenus n'indiquent aucune relation avec la concentration, mais il importe de noter que l'influence du tube intervient ici comme cause perturbatrice.

Sténolyse à travers deux tubes.

Quelques essais furent faits au moyen de deux tubes munis d'une fente et plongés dans le même récipient, l'un des tubes contenant l'anode et l'autre, la cathode.

Il en résulte que le voltage critique est sensiblement égal à la somme des voltages de chacun des tubes, dans la limite d'approximation résultant des observations intérieures. Le dépôt métallique ne se fait pas sur la même paroi dans les deux tubes, il est extérieur dans le tube qui renferme la cathode, intérieur dans l'autre. Ces résultats sont entièrement conformes à ce que permettaient de prévoir les expériences faites dans un tube unique.

Sténolyse dans des dissolvants autres que l'eau.

Cette étude présente un intérêt spécial, parce que, dans la théorie de Coehn, intervient, comme il sera dit plus loin, la constante diélectrique du dissolvant. Or, l'alcool et l'acétone ont une constante diélectrique de 3 à 4 fois plus faible que celle de l'eau, et il paraît donc, d'après Coehn, que la sténolyse doit y être beaucoup moins prononcée.

Un solution de nitrate d'argent dans l'alcool éthylique de densité 0,8174 fut maintenue sous 110 volts pendant trois heures sans présenter la sténolyse. L'expérience fut faite successivement dans deux tubes. Diluée par l'addition d'un égal volume d'eau, elle donna, très faiblement, l'électrolyse ordinaire seule ; après addition, à deux volumes de cette solution, d'un volume d'eau, un commencement de sténolyse se produisit : des bulles gazeuses se déposèrent très lentement sur la fente, mais on ne put apercevoir de dépôt métallique, même après plusieurs minutes, alors que dans les solutions aqueuses les deux phénomènes sont simultanés. Après addition d'un volume d'eau, on obtint en quelques minutes, sous 110 volts, des bulles gazeuses et un dépôt net. Enfin avec une dernière solution obtenue en ajoutant à la précédente un volume d'eau encore, on obtient à 110 volts, et instantanément, des bulles et un dépôt. Mais ici encore la fente paraît jouer un rôle : de deux tubes différents, le premier exigea un voltage critique de 25 volts, tandis qu'avec le second il fallut monter à 110 volts.

D'une façon générale, il semble que l'allure du phénomène est plus lente dans les solutions alcooliques.

Enfin un essai fut fait avec une solution de nitrate d'argent dans l'acétone. Il se forma sur la cathode de très belles cristallisations en forme d'arborescences, produites par l'électrolyse ordinaire. Celle-ci présente ici une intensité remarquable, comparable à celle des solutions aqueuses. Mais il ne se produisit sur la fente ni dégagement de bulles, ni dépôt métallique.

Sténolyse des solutions d'acétate de plomb.

Ce sel présente la sténolyse et est également soluble à la fois dans l'eau et dans l'alcool.

Une solution aqueuse donna à 90 volts un dégagement de bulles ; un dépôt métallique net ne put être constaté.

Une solution d'acétate dans l'alcool éthylique de densité 0,8174, sous 107 volts et pendant 20 minutes ne présenta que l'électrolyse ordinaire. Abandonnée pendant un intervalle de 24 heures à l'air dans la cuvette ouverte, elle était parsemée de magnifiques cristallisations et arborescences qui rappellent l'arbre de Saturne. Alors sous 110 volts elle présenta instantanément et avec une grande intensité des phénomènes analogues à la sténolyse, mais certainement le séjour à l'air libre devait avoir altéré la teneur en eau du liquide.

Théorie de la sténolyse.

On peut d'abord remarquer que ce phénomène présente une certaine analogie avec les *actions électro-capillaires* de Becquerel (1). Mais cette analogie est plus apparente que réelle, car chez Becquerel il s'agit de substances poreuses ou de tubes capillaires qui séparent deux liquides de nature différente.

Du reste, en ce qui concerne l'interprétation des phénomènes que nous venons d'étudier, plusieurs théories ont été proposées.

Braun (2) se demande s'il ne s'agit pas ici d'une véritable rupture de la molécule provoquée par le champ électrique.

Il reprend en définitive l'idée qu'on se faisait, avant Clausius, de l'électrolyse. Une molécule est composée de deux fragments chargés l'un positivement, l'autre négativement. Ces deux parties s'attirent de manière à constituer à l'état ordinaire un groupement stable. Mais supposons-les placées dans un champ électrique : celui-ci tend à séparer les deux fragments, et, pour une intensité de champ suffisante, il produira la rupture de la molécule.

---

(1) G. Wiedemann. *Die Lehre von der Elektricität*, II, p. 604.

(2) Wied. Ann. *44*, p. 495, 1891.

On sait que pour l'électrolyse ordinaire l'expérience ne confirme pas ces prévisions, et c'est ce qui détermina Clausius à chercher une meilleure explication. Or, d'après Braun, dans les conditions expérimentales particulières à la sténolyse, la rupture pourrait se produire. A première vue la nécessité d'un voltage critique paraît favorable à cette idée. Mais la difficulté consiste précisément à montrer comment le dispositif expérimental de la sténolyse réalise les conditions de rupture, et l'auteur lui-même ne se dissimule pas le caractère hypothétique du raisonnement qu'il fait pour l'établir.

Drude (1) voit dans l'électrosténolyse la preuve que les substances pondérables présentent pour de très petits volumes des propriétés différentes des propriétés ordinaires.

G. Wiedeman (2) appelle l'attention sur le phénomène lumineux qui accompagne dans certains cas le dégagement gazeux, et propose l'explication suivante : le liquide remplissant le canal capillaire subit par le passage du courant une élévation considérable de température, et se vaporise, de manière à donner naissance à un minuscule arc électrique, faiblement lumineux. La bobine de Ruhmkorff permet d'obtenir un phénomène analogue ; lorsqu'on prend comme anode un fil de platine, qui est mis à la surface d'une solution de chlorure de magnésium fonctionnant comme cathode, il se forme un dépôt de magnésium qui est brûlé aussitôt que produit.

Enfin Coehn (3) interprète le phénomène en se basant sur la différence de potentiel des corps au contact et la notion des couches doubles. Dans un travail antérieur (4) il avait pu conclure qu'au contact de deux diélectriques, celle des deux substances qui possède la constante diélectrique la plus élevée se charge positivement. Soit maintenant une solution aqueuse de nitrate d'argent contenue dans un tube fendu. A l'intérieur de l'espace capillaire formé par la fissure, le liquide forme avec la paroi une couche double, dans laquelle le verre, qui a une constante diélectrique moindre que l'eau, est chargé négativement. Aussi longtemps que les deux couches sont au repos, elles ne peuvent produire d'effet au dehors ; mais appliquons à deux électrodes placées de part et d'autre de la fente, une différence de potentiel suffisante : l'eau, chargée positivement, se dirigera vers l'électrode négative et dès ce moment les ions métalliques, présents dans le liquide, seront attirés vers la paroi négative du canal capillaire. D'une façon générale on ne peut pas affirmer qu'ils s'y déposeront, car ils formeraient un conducteur intermédiaire, qui est rongé à une extrémité tandis qu'il augmente à l'autre. Cependant on peut imaginer des conditions expérimentales telles que le dépôt à la cathode surpassera la diminution de masse à l'anode, et dans ces cas le métal se déposera. Ceci se produira par exemple très simplement lorsque le radical négatif n'attaque pas le métal déposé, de même lorsqu'il y a formation de substances insolubles à l'anode, etc. En discutant les résultats de Braun, Coehn trouve que ces conditions sont réalisées dans tous les cas où la sténolyse a été observée.

---

(1) *Physik des Aethers*, p. 519, 1894.

(2) *Die Lehre von der Elektricität*. 2e éd. II, p. 605.

(3) Zeitschr. f. Physik. Chem., *25*, p. 651, 1898.

(4) Wied. Ann., *64*, p. 217, 1898.

On voit facilement que nos mesures semblent favorables à cette dernière théorie. Les expériences sur les solutions alcooliques sont remarquables sous ce rapport.

D'autre part il y a dans les résultats donnés plus haut certains faits qui ne paraissent pas prévus par la théorie, par exemple le faible voltage nécessaire dans certains cas, et la diminution du potentiel critique par un premier passage de courant.

Peut-être bien la théorie doit-elle être élargie, de manière à tenir compte d'autres phénomènes particuliers à certaines substances, à l'argent par exemple, ou plus généraux, comme ceux qui se manifestent dans l'interrupteur Wehnelt.

Le P. Schaffers S. J. signale un coup de foudre tombé le 1er novembre dernier sur un paratonnerre du Collège qu'il habite à Louvain. Ce qu'il y eut de particulièrement intéressant, c'est une lueur diffuse (tourbillonnante, d'après deux des observateurs) sur le sol au pied du conducteur du paratonnerre. Le fait semble certain : les deux témoins ne pouvaient pas voir l'éclair directement, et comme ils étaient à l'entrée d'une cave, à peu près au ras du sol, il leur était également impossible d'en voir le reflet dans les flaques d'eau.

Ce phénomène cadre assez mal avec l'explication proposée dans la réunion précédente pour une observation semblable, où il s'agissait d'un coup atteignant directement le sol. C'est pour cela qu'il est rapporté ici. Dans l'explication en question, c'était le manque de conductibilité du sol qui était mis en cause. Or, ici le sol semble s'être comporté comme un conducteur relativement bon. En effet, il n'y a pas eu trace d'étincelle entre la tige du paratonnerre et deux fils d'éclairage qui passent à une dizaine de centimètres seulement (ce qui n'est pas précisément à donner en exemple), et par conséquent le potentiel de la tige n'a pas atteint la centaine de mille volts nécessaire pour faire passer une décharge à cette distance. Il faut remarquer cependant qu'une différence de potentiel notablement moindre peut suffire pour produire des décharges sous forme de lueur. L'objection n'est donc pas sans réplique.

Les effets d'induction dans le réseau d'éclairage, dans les téléphones, etc. ont été remarquablement intenses. Sur le tableau de distribution de l'usine d'éclairage un arc s'est allumé entre les cornes du parafoudre. Dans les locaux de la Bibliothèque Choisie, à quelques centaines de mètres, une sorte de foudre en boule s'est montrée au dessous de la ligne téléphonique venant du Collège et s'est déplacée lentement à un mètre environ du sol, à peu près parallèlement à cette ligne. Il est naturel d'admettre que l'induction de l'éclair qui éclatait très près de l'extrémité opposée du fil, y a produit une onde stationnaire, et alors la flamme mobile observée entre le fil et le sol ressemble aux aigrettes qu'on obtient, entre la bobine de Seibt et un fil tendu parallèlement, aux ventres de potentiel des ondes.

Troisième section

Le R. P. Van den Gheyn, qui préside la séance, accomplit un pénible devoir en faisant part du décès de M. le M^{is} de Trazegnies, un des anciens présidents de la section. Il consacre un souvenir ému à cet ouvrier de la première heure. Les voyages avaient aiguisé en lui le sens de l'observation, et il y a bien peu de séances — son assiduité ne lui en a fait manquer qu'un bien petit nombre — où il n'apporta un renseignement ou quelques considérations intéressantes. Son exemple restera.

M. A. Renier présente le rapport suivant sur un mémoire de M. l'abbé J. Claerhout intitulé *Le Chelléen belge*.

J'ai lu avec un vif intérêt le travail que M. l'abbé Claerhout a déposé à la session d'octobre 1910, à la 3^{me} Section de la Société Scientifique. Le Chelléen est en effet le stade le plus ancien de la présence incontestable de l'homme en Europe, et, d'autre part, M. l'abbé Claerhout en arrive à cette conclusion qu'il plane encore une grande incertitude sur le Chelléen de la Belgique, et que si, à côté de documents inacceptables et manifestement faux, on peut signaler des instruments Chelléens découverts en Belgique, il faut attendre des explorations nouvelles pour discerner exactement le niveau stratigraphique du Chelléen.

Le mémoire débute par un sommaire bibliographique et une revue des collections belges. Après avoir donné la définition du Chelléen, l'auteur examine la position stratigraphique du Chelléen belge en passant en revue la série quaternaire belge, et en rappelant les caractères lithologiques de chacun de ses termes ; puis il dit deux mots de la classification internationale et examine les caractères paléontologiques du Chelléen belge. Il passe ensuite aux gisements (belges) du Chelléen, et termine par quelques mots sur l'Ethnographie. A propos des gisements, l'auteur insiste, avec raison, sur le faux gisement de Binche.

Ce travail témoigne d'un effort sérieux. On ne pouvait s'attendre à moins de la part de notre savant Confrère. Aussi en proposerai-je volontiers l'insertion.

Je ne puis cependant clôturer ce rapport sans dire que si l'élaboration de ce mémoire m'a paru des plus consciencieuses, sa mise au point pourrait être améliorée. Sous sa forme actuelle, ce mémoire risque de rester incompris, ou, tout au moins, de ne pas profiter au lecteur autant qu'il le pourrait.

Cet essai aux allures synthétiques n'a pas actuellement la netteté qui fait la force des synthèses. Sa conclusion est presque cachée (p. 21), et le travail se termine sur un détail d'intérêt secondaire. Pourquoi, après avoir donné la définition du Chelléen, en insistant sur le caractère de haute antiquité de ce stade, l'auteur ne nous annonce-t-il pas sa conclusion, et pourquoi ne la reproduit-il pas en terminant son travail ? S'il agissait de la sorte, il serait évidemment conduit à retourner l'ordre d'exposition du paragraphe : « position statigraphique du Chelléen », ou mieux, le Chelléen belge étant mal connu, ils commencerait par nous donner un rappel du Chelléen typique, du Chelléen français, précisant à la fois et la position du Chelléen dans la série quaternaire internationale, définie avant tout par ses caractères paléontologiques (pp. 13, 14 et 15), et les caractères des instruments Chelléens types (p. 18), ou mieux des gisements typiques.

Le terme de comparaison serait ainsi bien établi. L'auteur pourrait alors étudier la série quaternaire belge en détaillant, s'il le juge utile, ses caractères lithologiques si variables, et en énumérant ses caractères paléontologiques. De cette comparaison purement géologique ressortirait une conclusion sur la position probable du Chelléen.

Tout serait ainsi préparé pour l'étude de préhistorique, et l'auteur pourrait préciser la niveau auquel, dans les gisements *in situ*, on trouve les instruments Chelléens, en ajoutant qu'il existe aussi des gisements où ces instruments existent remaniés. Dans la rédaction actuelle (pp. 12-13) ces indications se trouvent mêlées aux renseignements lithologiques.

Au sujet des gisements secondaires ou remaniés, l'auteur (p. 13) pourrait approfondir cette question en tenant compte des phénomènes géologiques dont la Belgique a été le théâtre depuis le pléistocène inférieur. L'explication qu'il propose, nous paraît inacceptable, mais il serait trop long d'insister.

L'étude des gisements suivrait naturellement. Dans la rédaction actuelle, l'auteur ne s'occupe que du principal gisement autochtone l'ancienne exploitation Hélin, à Spiennes, et du faux Chelléen de Binche. On est assez étonné en parcourant la revue des collections de constater l'existence, connue de l'auteur, d'autres gisements dont il ne dit rien dans le paragraphe : gisements du Chelléen.

Imprégné du souci de la vérité historique, l'auteur a tenu à détailler ses sources, d'une part, les collections belges qu'il a visitées, d'autre part, la liste des ouvrages qu'il a consultés.

Cette liste est toutefois mise sous une forme peu pratique. Pourquoi diviser entre traités et articles ? Pourquoi classer ces articles par revues ? Il est bien plus commode pour la consultation de grouper tous les travaux par noms d'auteur et chaque série dans l'ordre historique, en mettant en vedette l'année de publication. De plus, si l'auteur cite ses sources, il n'utilise nullement sa liste bibliographique et fait des citations sans dire où il les puise.

Enfin, la planche annexée au mémoire, pourrait être utilement reproduite. Elle fixe les traits d'un instrument typique. Mais cette reproduction ne peut être utile, que si l'auteur joint une légende à cette planche, légende disant la provenance de l'échantillon, la collection à laquelle il appartient, l'échelle de reproduction et l'orientation de la pièce.

Le R. P. Van den Gheyn, S. J., second commissaire pour l'examen de ce mémoire, se rallie aux conclusions de M. A. Renier.

La section vote l'impression du mémoire de M. l'abbé Claerhout dans les ANNALES de la Société.

M. le B^{on} Charles Gillès de Pélichy présente le rapport suivant sur un mémoire de M. l'abbé Claerhout intitulé *L'Habitation rurale de la Westflandre.*

Mieux que d'autres documents, les survivances attentivement analysées aident à nous rendre le passé plus sensible et même plus tangible ; elles replacent nos aïeux dans le cadre de leur vie de tous les jours, dans leurs travaux, dans leurs usages, dans leurs croyances. C'est ainsi que, conduits dans nos vieilles fermes flamandes par l'aimable et très compétent auteur du Mémoire intitulé : *L'habitation rurale de la Westflandre*, nous aimons à rechercher avec lui et à retrouver dans ces constructions si typiques et d'aspect souvent si vénérable, les caractères propres au génie, aux aspirations, aux besoins particuliers des peuples qui tour à tour se fixèrent sur une portion de notre territoire et contribuèrent à la formation de notre race.

Cette étude d'un caractère ethnologique complète fort heureusement la somme de documents fournie par les patientes et multiples recherches de M. l'abbé Claerhout dans les domaines de l'anthropologie, de l'histoire et de l'archéologie de la Flandre. Il y a lieu de le féliciter vivement de ce nouvel apport à l'étude si attrayante de nos origines, et d'en voter l'impression dans les publications de la Société scientifique.

Le R. P. Van den Gheyn, second commissaire pour l'examen de ce travail, se joint à M. le B^{on} Gillès de Pélichy pour en proposer l'impression.

La section se rallie à ces conclusions.

Sur les conclusions de MM. F. Meunier et H. Lebrun, la section vote l'impression d'un mémoire de M. l'abbé Kieffer intitulé *Nouveaux Bethylides, et Dryinides exotiques du British Museum de Londres* et d'une note du R. P. L. Navas, S. J., intitulée *Chrysopides* (Ins. Névr.) *nouveaux.*

M. l'abbé J. Claerhout présente la note suivante sur *La Palafitte d'Afsné.*

Au mois d'août 1910, les vestiges d'une palafitte ont été amenés au jour par M. Charles de Hemptinne, quand il a fait creuser un étang dans le parc de sa villa Mariasteen à Afsné. Elle s'est manifestée par les pilotis, qui ont soutenu autrefois le plancher sur lequel les habitations lacustres ont été construites et par la présence de divers objets épars dans les couches tourbeuses d'inégale épaisseur, qui s'étaient accumulées sur le fond quaternaire d'un marécage. Ce marais devait s'étendre sur les bords du ruisseau qui coule à côté du parc. L'étang a été creusé dans les alluvions formées par ce ruisseau et dans les assises de la tourbe que ces alluvions recouvrent. Il occupe un espace semi-circulaire, dont le diamètre mesure environ 40 mètres de longueur, mais il est probable que, du côté opposé à la villa, la station lacustre se prolonge au delà des limites de l'étang, dans une direction parallèle au ruisseau.

Dans le niveau tourbeux, qui forme la couche archéologique de la palafitte et qui malheureusement n'a pu être exploré jusqu'au fond, nous avons vu apparaître des ossements en quantité considérable des animaux que les habitants de la station palustre ont élevés ou poursuivis à la chasse, quelques pièces de leur outillage en silex, en os et en corne de cerf et de nombreux tessons de leur céramique rudimentaire.

On distingue les os du cheval, de l'urus, du porc lacustre, du cerf, de la chèvre, du castor et d'autres animaux, et la plupart de ces os ont été fendus, pour permettre d'en extraire la moelle, qui constituait un aliment de prédilection, ou utilisés pour façonner des poinçons, des poignards, des lissoirs et d'autres instruments. Voici un bel os frontal d'urus, couronné de deux superbes cornes : c'est un magnifique trophée de chasse. Nous remarquons de longues côtes et de petites côtes, qui ont fait office de lissoirs et des mâchoires, qui paraissent avoir été apprêtées au même usage. Une immense mâchoire de cheval nous semble avoir servi d'outil pour écanguer le lin. Nous discernons un cubitus, dont la base sert de poignée et dont l'extrémité opposée forme la pointe acérée d'un poignard analogue aux nombreux poignards en os, qui ont été recueillis dans les stations lacustres de la Suisse et que l'on peut voir au Musée de Zurich ; puis des tibias de dimensions diverses, adroitement affilés, qui ont procuré à nos lacustres des poinçons et un de ces minuscules perçoirs, comme on vient d'en découvrir dans la station lacustre d'Alvastra en Suède. Nous observons encore une portion de bois de cerf, quelque peu endommagée ; elle est percée d'une ouverture et elle a fourni un marteau.

L'outillage lithique est peu abondant. Signalons un nucleus, haut de 15 centimètres, en silex gris, provenant probablement de Spiennes, une hache de forme ovale, bombée sur les deux faces, en grès lustré verdâtre, une hachette façonnée d'un éclat de silex triangulaire, finement retouché sur les bords ; il est probable que d'autres instruments soient encore disséminés dans les couches tourbeuses, qui n'ont pu être entamées.

Le plus souvent les tessons de poterie très grossière, ne portent aucun ornement. On peut en voir qui sont décorés de coups d'ongle et de quelque dessin archaïque, irrégulièrement tracé.

Deux objets méritent une mention spéciale et leur découverte donne un certain relief à la petite station lacustre d'Afsné.

Le premier est un andouiller de bois de cerf.

Il se présente sous la forme d'un arc de cercle, dont la corde aurait une longueur de 9 centimètres. Près de la base, il est percé d'un orifice d'une largeur de 11 millimètres et l'on voit une profonde entaille de chaque côté de cette ouverture.

On est souvent frappé de l'étonnante ressemblance qu'offrent certains instruments, recueillis dans des régions fort éloignées l'une de l'autre. Nous ne connaissons qu'un spécimen analogue à l'outil d'Afsné ; il est abrité par le Musée de Zurich et provient de la station de Locras, découverte dans les eaux du lac de Bienne. A quoi cet andouiller peut-il avoir servi ? Fixez dans l'ouverture de cet outil, un manche en bois ; entourez la jointure de ligatures enduites de poix et vous possédez un pic, destiné au labeur aratoire. D'autre part, prenez, plusieurs andouillers de cette nature, percés de bâtons reliés entre eux et vous aurez la herse primitive de nos premiers agriculteurs. Rien d'étonnant conséquemment que M. Munro, qui a étudié toutes les stations lacustres de l'Europe et longuement analysé toutes les récoltes qu'elles ont fournies, ait donné à l'outil de Locras, tantôt le nom de pic, tantôt le nom de dent de herse. Le spécimen d'Afsné peut donc porter le nom de pic ou de dent de herse, selon que les habitants de la station lacustre y ont adapté un manche en bois ou possédaient plusieurs pointes analogues, armant des pièces de bois qui se croisaient entre elles.

On est suivant réduit à des conjectures quand on recherche la destination d'un objet des temps antérieurs. La lecture d'un article, publié par la *Zeitschrift für Ethnologie, Beitrag zur Kenntnis der steinzeitlichen Korbflechterei* (42 Jahrg. 1910 Heft. III u. IV, p. 363-380), nous suggère une troisième hypothèse. L'auteur, M. L. Pfeiffer, conservateur au Musée de Weimar, étudie le ploir du vannier. La forme actuelle de cet outil nous présente un simple développement, une légère transformation des formes primitives de cet instrument. On peut l'observer dans les musées ethnographiques, tel qu'il est encore en usage chez les Esquimaux et d'autres peuples parmi lesquels persiste un stade de civilisation très archaïque. Or, il paraît que les aspects primitifs de cet outil, de ce ploir de vannier offrent une ressemblance frappante avec des bâtons de bois de renne et de cerf, percés d'un orifice, qui sont analogues à notre andouiller d'Afsné, qui présentent de chaque côté de l'ouverture des traces d'usure de forme conique et que l'on regarde tantôt comme des bâtons de commandement, tantôt comme des fibules. M. Pfeiffer les considère tout simplement comme des instruments destinés à plier les jets d'osier avec lesquels nos ancêtres des âges de la pierre tressaient leurs corbeilles.

Le second objet qui attire particulièrement notre attention est une lame en bronze, dont la pointe est enlevée et qui a encore une longueur de 18 centimètres.

La découverte d'un objet en bronze constitue presque un évènement en Belgique. Ce qu'on est convenu d'appeler l'âge du bronze, n'a-t-il point eu sa pleine efflorescence en notre pays, comme en d'autres régions? Nos tribus primitives qui se servaient d'instruments en pierre n'ont-elles utilisé que quelques armes et quelques parures en bronze, introduites par des colporteurs ou des fondeurs ambulants? Ou bien est-ce à notre inaction qu'il faut attribuer cette pénurie d'objets en bronze? Beaucoup de richesses archéologiques ont-elles disparu avec les tumulus qui ont été nivelés ou sommeillent-elles encore avec les vestiges des cités lacustres sous les alluvions de nos prairies ou avec les urnes funéraires de nos ancêtres, sous les frondaisons de nos forêts?

La lame d'Afsné peut être un poignard-couteau ou une petite épée : il est difficile de se prononcer, parce que, comme l'observe M. J. Evans, dans son bel ouvrage sur l'âge du bronze, la distinction entre ces deux armes ne repose sur une aucune règle absolue.

C'est une lame mince et plate, à bords presque parallèles, sans nervure médiane, dépouillée de tout ornement.

Tantôt la base d'une lame pareille est percée de trous de rivets pour l'adapter à la poignée en bronze, en bois ou en corne ; tantôt une lame de cette nature est garnie d'une soie, qui s'introduit dans la poignée et qui est également pourvue d'un ou de deux trous de rivets. La lame d'Afsné a une soie sans trous de rivets, qui se fixait apparemment dans un manche de corne de bœuf et s'y maintenait au moyen de ligatures. La soie a vers le milieu de chaque côté une petite échancrure et les bords légèrement redressés.

M. Munro signale une lame de couteau-poignard presque identique, qui a été recueillie dans la riche station lacustre de Peschiera (R. Munro. *The Lake-Dwellings of Europe.* London 1890. P. 255).

De quelle époque datent les constructions palafittiques de la Flandre ?

Deux hypothèses également plausibles se présentent pour résoudre cette question.

Selon la première hypothèse, les néolithiques brachycéphales et préaryens habitaient la Flandre avant l'invasion des Gaulois, qui ont franchi le Rhin vers l'an 700 avant l'ère chrétienne. C'est à ces néolithiques qu'il faudrait attribuer la construction des bourgades palustres et ce sont ces néolithiques, qui tout en se servant d'un outillage en pierre, en corne et en os, ont connu aussi quelques instruments et quelques ornements en bronze, importés par des colporteurs.

Mais une seconde hypothèse peut également se faire valoir : les villages palustres doivent être attribués aux Celtes, qui à deux reprises sont venus peupler la Belgique. Ne trouvons-nous pas des *tegulæ* romaines parmi les vestiges de la station d'Afsné et n'avons pas découvert beaucoup d'antiquités romaines à Denterghem, prouvant que les Belges de l'empire romain ont continué à habiter les villages lacustres, qu'ils occupaient à l'arrivée de César ? Quand César nous apprend que les Morins se sont réfugiés dans leurs marécages, ce texte ne devient-il pas lumineux, quand on sait que leurs *vici* s'élevaient au-dessus des marais ? On ne peut trouver un refuge dans une contrée marécageuse, à moins qu'il n'y ait des cabanes palafittiques pour abriter les réfugiés. Rien ne défend de supposer que les néolithiques de la Flandre ne sont autres que nos ancêtres Morins, qui ont continué, sous la domination romaine, à occuper les cités palustres, qu'ils avaient érigées au-dessus du niveau de leurs marais.

M. l'abbé J. Claerhout présente un travail sur l'*Aurignacien en Belgique*. La section nomme commissaires, pour l'examen de ce travail, M. A. Renier et le R. P. Van den Gheyn.

M. De Wildeman s'excuse de ne pouvoir exposer la communication qu'il a fait inscrire à l'ordre de jour. Le manuscrit qui devait servir de base à l'exposé des résultats des recherches faites jusqu'à ce jour sur la flore des districts des Bangala et de l'Ubangi, n'étant pas revenu d'Autriche où il a été envoyé pour examen par le botaniste-voyageur M. Fr. Thonner, le principal des collecteurs de plantes dans le centre de la région Congo-Ubangi.

M. De Wildeman propose à la section de lui donner quelques autres indications relativement aux productions congolaises.

Reprenant le titre d'un livre déjà ancien, celui du R. P. Merlon, M. De Wildeman signale ce que peut donner le Congo. Il insiste surtout sur les produits végétaux d'origine congolaise : café, fibres, matières oléagineuses, caoutchouc.

De ces diverses substances le caoutchouc seul peut, dans les conditions présentes, être exporté. Les autres produits ne sont pas suffisamment « riches » pour supporter les frais de transport par terre, par eau et par chemin de fer dont ils doivent être grevés avant d'être exportés.

M. De Wildeman insiste sur la nécessité de rechercher des moyens économiques de transport, sans lesquels l'avenir de l'industrie et du commerce sera menacé dans notre colonie.

M. De Wildeman attire également l'attention sur l'importance des missions de recherches, qui doivent être nombreuses, posséder un riche état-major et être surtout dirigées vers la connaissance des ressources végétales, car c'est sur elles, beaucoup plus que sur le rendement des mines, qu'il faut compter pour assurer un développement normal du Congo.

M. Fernand Meunier fait quelques observations sur *La classification des Blattidae du houiller de Commentry*.

Les Nomoneures doivent être comptés au nombre des plus anciens insectes trouvés dans les formations géologiques. Dès l'aurore de leur apparition ces Orthoptères sont déjà très hautement différenciés, ce qui montre péremptoirement que leur origine remonte bien antérieurement au carbonifère. Malheureusement pour ces êtres, comme pour une série d'autres, la science possède encore des documents si fragmentaires qu'il est actuellement impossible de démêler le point de départ de leurs origines phylogéniques.

M. A. Handlirsch, de Vienne, estime que les Orthoptères de la famille des Blattidae (pour lui l'ordre des Blattidae) doivent être considérés parmi les formes ancestrales des Paléodictyoptères. Beaucoup de paléontologistes ne partagent pas cette manière de voir, séduisante il est vrai, encore que très hypothétique. On sait que dès le houiller la plupart des ordres d'insectes se montrent déjà bien nettement différenciés. Il faudrait donc remonter plus loin dans les temps géologiques pour constater si l'hypothèse du paléontologiste viennois est scientifiquement démontrable. Certes, avec M. A. Handlirsch, on peut constater que certains Paléodictyoptères semblent encore avoir quelques traits de parenté avec les Blattidae à en juger d'après les ailes, les seuls organes ordinairement conservés ; le corps et les membres était presque toujours détruits ou indistincts par la fossilisation. Si intéressante qu'elle soit, cette question doit être tenue en litige jusqu'au moment où des documents plus entiers (animaux avec tête, thorax, abdomen et pattes) auront été observés dans les formations houillères.

Les Blattidae ont déjà fait l'objet de nombreux travaux de S. H. Scudder qui, pendant des années, a étudié avec un zèle digne des plus grands éloges les Nomoneures des terrains primaires américains. Il est le seul auteur qui ait laissé un tableau d'ensemble des Blattidae paléozoïques permettant de s'y retrouver parmi les nombreuses formes décrites.

Schlechtendal, Kùsta, Kliver et quelques autres ont signalé une série de blattes des gisements européens. Cependant aucune formation géologique n'a fourni une aussi abondante richesse de Blattidae que le célèbre gisement de Commentry (Allier). On a trouvé dans ce seul terrain houiller plus de 1200 empreintes dont un grand nombre, remarquables par la conservation des spécimens, permettent de comparer, avec soin, le détail de la topographie des nervures des ailes. Brongniart n'a fait que signaler et donner les photographies de quelques coupes génériques de Blattidés d'après la classification admise par Scudder. Tout reste donc à faire du côté des Nomoneures de Commentry. Handlirsch, dans son manuel paléoentomologique, a bouleversé de fond en comble le groupement proposé par S. H. Scudder. La classification du paléontologiste de Vienne est loin de satisfaire ceux qui s'occupent de la systématique des Nomoneures. Les nouveaux genres y foisonnent et la détermination des Blattidae (sensu Handlirsch) devient inextricable !

Dans ses nouvelles recherches sur les blattes américaines Sellards revient, avec raison, à la classification de S. H. Scudder. A l'appui de ce que j'avance, je ne citerai qu'un exemple relatif au groupement de M. A. Handlirsch. Le genre Etoblattina, en général assez homogène, n'est plus représenté que par quelques rares espèces alors que le genre Sysciophlebia Handlirsch renferme, à lui seul, un grand nombre d'espèces. Je fais exception pour les Protoblattidae qui paraissent être assez naturels. A mon avis, la classification de A. Handlirsch ne rendra guère de services aux étudiants en Paléontologie pour qui ce manuel a surtout sa raison d'être.

Les paléontologistes habitués aux études de S. H. Scudder ne s'y retrouveront guère au milieu de ce dédale de nouvelles coupes génériques. Disons encore que son manuel n'est accompagné ni d'un tableau des familles, ni de ceux des genres et des espèces. Il y aurait beaucoup à redire à son iconographie qui aurait pu être plus précise et est rarement accompagnée de reproductions photographiques.

Dans la monographie que je prépare sur les Blattidés de Commentry, j'ai eu soin de reprendre la classification de Scudder n'y introduisant que de rares changements et admettant les Protoblattidae de A. Handlirsch.

Pour être naturelle, la classification des Blattidae doit avant tout être simple, précise, méthodique pour faciliter les recherches de ceux qui désirent s'initier à ce difficile groupe paléontologique. Dans la nouvelle monographie je ne parlerai donc qu'incidemment des nouveaux genres de M. A. Handlirsch. Comme Sellards, j'admets le genre Etoblattina d'après les caractères indiqués par Scudder.

M. F. Meunier dit encore qu'il y a lieu de tenir compte de la morphologie des Blattes vivantes et fossiles. Cette étude montrera vraisemblablement quelques points de contact entre les formes éteintes et récentes.

Comme on le sait, les Mylacrinés et les Blattinés sont bien représentés à Commentry. Toutefois ces Nomoneures se répartissent dans un nombre de genres relativement restreints mais cependant par un assez grand nombre d'espèces.

M. Fernand Meunier signale aux membres de la section quelques « *Nouveaux insectes du houiller de Commentry* » faisant partie des collections du laboratoire de Paléontologie du Muséum de Paris et soumis à son examen par M. le professeur M. Boule.

Ces insectes ont été observés parmi plusieurs centaines d'articulés de ce célèbre gisement géologique. La plupart sont nouveaux, pour quelques-uns, il était indispensable de compléter leurs diagnoses et de donner un dessin de la topographie des nervures des ailes.

Dans le monde si varié des Paléodictyoptères, il a observé plusieurs espèces inédites (Homaloneura similis) offrant trois nervures partant du secteur du radius comme c'est le cas pour Corydaloïdes Scudderi Brongniart. Un autre Homaloneura *(H. Royeri)* que Brongniart classait parmi ses Protépléméridés et qui par la taille et la morphologie des nervures alaires se distingue des Homaloneura Bonnieri et elegans. Ensuite, un minuscule Stenodictya *(S. pygmaea)*, de 40 millimètres de longueur alaire, ne pouvant être rapproché de Stenodictya minima qui a 50 millimètres de longueur. Ces deux formes ne sont malheureusement représentées que par des fragments d'ailes ce qui empêche de reconnaître le détail de la topographie des nervures. Un autre Stenodictya *(S. grandissima)* s'écarte par la taille et la nervation de l'aile de Stenodictya Oustaleti Brongniart.

M. F. Meunier a aussi examiné une remarquable empreinte du genre Homoioptera *(H. Brongniarti)* s'éloignant notablement de Homoioptera gigantea Agnus et de Homoioptera Woodwardi Brongniart. Ce curieux Platypléride (sensu Brongniart) offre des caractères qui semblent être intermédiaires entre les Homoioptera et les Becquerellia. Cependant par les appendices aliformes ce Paléodictyoptère se classe, avec certitude, parmi les Homoioptera Brongniart. Les ailes sont ornées des bandes transversales colorées comme c'est le cas chez Becquerellia grehanti Brongniart.

Le petit insecte houiller signalé par Brongniart comme un homoptère et nommé par lui « Palaeocixius » est un Paléodictyoptère. Le dessin de Brongniart (phographie) ne permet guère d'apprécier les nervures des ailes.

Fabrecia pygmaea, dédié à l'illustre entomologiste français, M. Fabre, est une minuscule forme houillère.

Fabrecia minuta pourrait parfaitement être classé dans une nouvelle coupe générique, il est maintenu dans ce genre pour ne pas compliquer la nomenclature, déjà beaucoup trop surchargé. On est d'abord enclin de considérer ce petit fossile comme une forme de passage entre les Paléodictyoptères et les Blattidae. Par les caractères et la nervation, il se classe irrécusablement avec les Paléodictyoptères.

Brongniart groupait Stenoneura Fayoli parmi ses Protophasmides. M. A. Handlirsch de Vienne, considère ce fossile comme un Protoblattidae. A mon avis (Brongniart n'a laissé que les photographies de cet intéressant insecte houiller), il est préférable de le grouper parmi les Protorthoptères. Les documents connus actuellement sont trop fragmentaires pour décrire, dans les moindres détails, la morphologie des ailes de Stenoneura Fayoli et S. maximi Brongniart.

M. F. Meunier a entrepris la restauration de la topographie de l'aile de Oedischia Filholi dont Brongniart n'a donné qu'une photographie, peu utilisable pour l'étude des nervures. La science n'a pas dit son dernier mot concernant la nervation des Oedischia Williamsoni et Sthenaropoda (Oedischia) Fischeri Ch. Brongniart. Homalophlebia *Trouessarti* s'écarte des H. Finoti, Courtini et Perrieri par les nervures des ailes. Il n'a pas été formé de nouvelle coupe générique pour ce fossile, les Homalophlebia houillers, connus actuellement, n'étant représentés que par quelques rares spécimens.

Homalophlebia *Couloni*, aussi représenté par un seul spécimen, s'éloigne à première vue, des Homalophlebia Courtini, Finoti, Perrieri et Trouessarti.

Les photographies et les dessins de tous ces curieux insectes houillers paraîtront prochainement dans les *Annales de Paléontologie du Muséum d'histoire naturelle de Paris.*

M. Maes présente un mémoire sur *Les remèdes indigènes des Bovenkamba,* peuplade du Lac Léopold II. Ce travail est soumis à l'examen de M. E. Viaene et du Dr Struelens.

Le R. P. Navas S. J. présente les travaux suivants : A) *Dilaride* (Ins. névr.) *nouveau ;* B) *Insecte névroptère nouveau de l'Amérique* *méridionale ;* c) *Deux éphémérides* (Ins. névr.) *nouveaux du Congo belge.* Ces travaux sont soumis à l'examen de MM. F. Meunier et H. Lebrun.

Quatrième section

La quatrième section s'est réunie à 4 heures, après l'Assemblée générale, sous le présidence de M. le Dr Struelens, son président.

M. le Dr Morelle entretient ses confrères du *traitement de la Syphilis par le nouveau remède d'Ehrlich* (successivement dénommé 606 et *Salvarsan*). Voici le texte de cet intéressant travail :

Le remède d'Ehrlich — le fameux 606, actuellement dénommé *Salvarsan* — vient d'être lancé dans le commerce depuis quelques semaines. Le public avait été, par une réclame habile dans la presse politique, mis au courant (?) des propriétés du produit récemment découvert. Nombreux sont les malades qui ont dû questionner et qui questionneront encore à ce propos le médecin. Pour permettre à celui-ci de répondre, il nous a paru utile de résumer le bilan de nos connaissances au sujet du Salvarsan. L'étude de son action thérapeutique ainsi que des dangers et des inconvénients de son emploi nous permettra de préciser jusqu'à un certain point les indications du fameux remède.

DES PRÉPARATIONS ARSENICALES DANS LE TRAITEMENT DE LA SYPHILIS.

Il est bon de se rappeler que depuis longtemps l'arsenic avait été recommandé dans le traitement de la syphilis. D'anciens auteurs avaient déjà relaté l'avantage que l'on pouvait retirer de l'action reconstituante des préparations inorganiques d'arsenic chez certains syphilitiques débilités. Mais c'est surtout au début de ce siècle, après la découverte des cacodylates par Gauthier, que l'on voit apparaître tout une série de médications anti-syphilitiques ayant l'arsenic comme base. Brocq, après avoir essayé le cacodylate acide de mercure, préconise, dès 1902, les cacodylates de soude soit purs, soit mélangés à du bi-iodure de mercure et à de l'iodure de sodium. Une association analogue est préconisée par Civiatte et Fraisse.

En 1904, l'énésol (salicylarcinate de mercure) fait son apparition, et est bientôt très en faveur.

Remarquons que l'action que l'on attribuait aux préparations arsenicales dans tous ces essais était une action reconstituante de l'organisme : c'était d'une manière indirecte que l'on pensait juguler la maladie. Mais après la découverte du spirochète et les recherches d'Uhlenuth sur l'*atoxyl,* la question change d'aspect. On admet bientôt une action spéciale des produits arsenicaux sur les organismes, causes de la maladie.

L'atoxyl est assez vite abandonné à cause des cas de cécité durable qu'a occasionnés son emploi dans la lutte contre la maladie du sommeil. — On recommande successivement l'*arsacétine,* l'*arrhénal* que notre confrère Poirier injecte à doses massives de 70 à 80 centigrammes, et l'*hectine.* On sait que c'est ce dernier corps ou le mélange qui en est dérivé l'*hectargyre,* qui sert de base à la méthode dite abortive d'Hallopeau.

Avec tous ces produits on a obtenu des améliorations, voire même des guérisons, dans des syphilis rebelles au traitement soit mercuriel, soit iodé. Mais, disons-le de suite, aucun d'eux n'a la puissance d'action du composé trouvé par Ehrlich ; aucun d'eux n'a été l'objet de recherches expérimentales aussi nombreuses ; aucun d'eux n'a été employé dans un nombre aussi considérable de cas. Aussi leur étude ne s'impose pas actuellement à l'attention du corps médical comme celle du salvarsan.

PRINCIPE DE LA NOUVELLE MÉTHODE D'EHRLICH.

Ehrlich, par des recherches expérimentales variées, a pu se convaincre que diverses préparations arsenicales constituaient pour les microbes de forme spirillaire des poisons en quelque sorte électifs. C'est en étudiant des spirilloses de divers animaux (rats, souris, poules), ainsi que la syphilis expérimentale du lapin qu'il a établi le fondement de la nouvelle méthode thérapeutique.

Il s'agissait de trouver un composé capable de tuer les spirilles, causes de la maladie, sans nuire à l'organisme de l'animal ou de l'homme infecté. Pour employer la terminologie du savant de

Francfort, ce composé doit être éminemment *spirillotrope* et le moins possible *organotrope*.

Enfin, l'idéal serait d'obtenir cette stérilisation par une seule dose, une fois donnée du médicament : on ferait alors la *therapia sterilisans magna*. Rien de tel qu'une formule latine pour frapper les esprits.

Mais un médicament capable de faire une désinfection aussi puissante, pouvait être dangereux pour l'organisme. Il était donc nécessaire de voir s'il y avait une marge suffisante entre la dose curative et la dose toxique.

En étudiant les préparations arsenicales organiques au point de vue de leur action sur les spirilloses, Ehrlich put faire une distinction fondamentale entre deux sortes de composés d'une constitution chimique différente ; les uns, préparations arsenicales pentavalentes saturées (atoxyl, hectine, arsacétine) sont moins puissantes et peuvent amener des accidents graves du côté des organes nerveux centraux de la vision ; les autres préparations trivalentes non saturées, sont plus actives et moins dangereuses. Deux d'entre elles furent surtout expérimentés : l'arsénophénylglycine et l'arsénobenzol (606). Le premier de ces deux produits a été abandonné, parce qu'il est plus toxique que le 606.

Ehrlich veut donc, pour obtenir en une fois la disparition des spirochètes, donner à l'organisme le plus rapidement possible la plus grande quantité de médicament que celui-ci peut supporter sans danger. Il est, dès lors, indiqué d'étudier ce que nous savons de l'absorption du salvarsan et de la rapidité de son élimination après les divers modes d'administration.

Absorption et élimination du salvarsan.

Les recherches à ce sujet ne sont pas encore très nombreuses ; mais leurs résultats permettent toutefois de comprendre les effets qu'ont obtenus les cliniciens qui ont expérimenté le nouveau remède.

On administre le salvarsan soit en l'injectant directement dans le sang *(injection intraveineuse)*, soit en le déposant à l'intérieur des tissus *(injection sous-cutanée ou intramusculaire)*.

A. — *Injection intraveineuse.*

Avant d'étudier ce mode d'emploi, il est important de noter une propriété chimique du médicament. Le salvarsan, tel qu'il est livré actuellement, est un sel (chlorhydrate) dont la *solution est très acide.* Si on l'injecte dans les tissus, il va exercer sur les éléments cellulaires une action irritante, amenant une nécrose plus ou moins étendue.

Il est évident que pour l'administration intraveineuse du médicament on ne peut employer la solution acide ; elle doit être neutralisée soigneusement. Nous donnerons ultérieurement les détails de technique qu'il est indispensable de connaître.

Que devient le salvarsan quand on l'injecte de cette manière ? Fischer et Hoppe, qui ont étudié ce point, ont trouvé que *les deux tiers du médicament sont déjà éliminés 48 heures après l'injection,* rien que par les reins. La partie qui s'élimine par les fèces est peu considérable. Mais il ressort également de ces analyses qu'une partie du médicament doit rester fixée dans les organes, d'où elle ne s'échappe qu'à la longue.

C'est ce que des recherches de Bernstein ont démontré : des lapins tués huit jours après une injection intraveineuse de salvarsan présentaient de l'arsenic dans le foie, la rate et les reins. Le même auteur a eu l'occasion d'examiner les organes d'un malade mort d'une affection intercurrente quinze jours après une injection intraveineuse de salvarsan, et trouva chez lui des quantités bien pondérables d'arsenic dans le foie, les reins et la rate.

Retenons donc de ces analyses que dans l'injection intraveineuse le médicament circule rapidement dans l'organisme, puisqu'après deux jours plus des deux tiers de l'arsenic injecté est déjà éliminé. Le salvarsan se trouve donc imprégnant l'organisme à un état de concentration maxima : toutefois, il ne faut pas oublier qu'une quantité non encore déterminée du médicament reste encore fixée pendant un temps relativement long (plus de 15 jours) dans les organes.

B. — *Injections sous-cutanées ou intramusculaires.*

Ce problème de l'élimination du médicament devient beaucoup plus complexe quand, au lieu de l'injecter dans la veine, on le dépose dans le tissu sous-cutané ou dans les muscles.

Il y a diverses méthodes de faire ces injections : suspension neutre de Wechselmann, — solutions alcalines d'après Alt — injection d'une solution acide — injections de solutions neutres actuellement préconisées par Ehrlich — suspensions dans un liquide huileux comme l'a prôné Kromayer.

Le salvarsan déposé dans les tissus y exerce une réaction très différente d'après le procédé employé, et, dès lors, on ne peut préciser la quotité du médicament qui sera absorbée. Dans certains cas on a vu l'enkystement se faire autour du foyer d'injection et une fois on a pu retrouver dans un de ces kystes les deux tiers du médicament injecté.

Toutefois, après les injections faites avec des *solutions neutres ou alcalines* la résorption se fait assez vite. Nous pouvons utiliser à ce sujet les recherches de Fischer et Hoppe : après des injections faites par la méthode d'Alt (solution alcaline) on retrouve de l'arsenic dans l'urine pendant dix à douze jours après l'injection, et la quantité qui en est ainsi décelée ne correspond pas à la moitié de l'arsenic injesté. Admettons qu'en moyenne on retrouve ainsi journellement dans l'urine un vingtième du médicament injecté : mais si l'élimination du médicament est ainsi lente et continue, nous devons admettre que l'absorption du médicament a été également lente et continue.

On voit donc la différence essentielle qui existe entre les deux modes d'administration : dans les injections intraveineuses le médicament imprègne en masse l'organisme ; dans les injections musculaires, de petites doses de médicament lui sont fournies de façon plus persistante.

Il est donc aisé de concevoir que *les résultats cliniques peuvent dépendre autant du mode d'administration du médicament que des doses employées.*

ACTION DU SALVARSAN DANS LA SYPHILIS.

On peut diviser l'étude de cette action en deux parties : dans la première, nous considérerons l'influence du remède sur les manifestations présentées par le malade, ce sera l'action *symptomatique*. Dans la seconde, nous tâcherons de voir ce que l'on peut espérer au sujet de la marche de l'infection elle-même.

I. — *Action sur les manifestations de la syphilis.*

Tout le monde est d'accord pour admettre la puissance d'action de nouveau remède sur les manifestations spécifiques. Finger, qui est cependant opposé à l'introduction du 606 dans la pratique courante, déclare que le salvarsan fait disparaître les symptômes de la syphilis *plus rapidement que le mercure*. C'est là une règle générale qui offre peu d'exceptions. Mais il faut étudier cette action plus en détail.

A. — *Action sur les accidents primaires.*

L'opinion suivante, exprimée par Scholtz, Salzberger et Beck, correspond à ce que l'on constate généralement.

« Les accidents primaires montrent d'ordinaire déjà dans les jours qui suivent l'injection une tendance marquée à guérir : l'infiltration diminue un peu, le chancre devient plus mou, les ulcérations se nettoient assez vite et commencent de même que les érosions à se cicatriser déjà de trois à cinq jours après l'injection. Des accidents primaires petits, pas trop durs, disparaissent aussi souvent complètement après deux semaines en laissant une cicatrice molle.

» Par contre dans les scléroses plus fermes et plus considérables, il subsiste généralement après le traitement avec le 606 une infiltration plus ou moins prononcée, tout à fait comme nous sommes habitués à le voir après la cure mercurielle. De même les glandes lymphatiques sclérosés ne régressent en général, après l'arsenobenzol, que lentement et assez souvent seulement incomplètement.

» L'avantage du nouveau traitement, au point de vue de l'action symptomatique au stade initial, ne se montre surtout que dans les chancres ulcérés ; ceux-ci guérissent en effet beaucoup plus vite que sous l'influence du mercure. »

B. — *Action sur les accidents secondaires.*

Les affections syphilitiques des muqueuses de la période secondaire disparaissent plus rapidement après l'administration du salvarsan qu'après le traitement mercuriel. C'est là un point très important, puisque ces lésions constituent la grande cause de propagation de la maladie. De même certaines manifestations papuleuses, comme le lichen syphilitique, qui sont souvent rebelles à la cure hydrargyrique, sont influencées plus favorablement par l'arsénobenzol. Par contre, les taches purement érythémateuses de la roséole ne disparaissent parfois que très lentement.

Un mot d'un phénomène que l'on peut observer après l'emploi du salvarsan, comme aussi après le traitement mercuriel : c'est *la réaction dite d'Jarisch-Herxheimer* qui consiste en ce que les papules syphilitiques s'entourent d'une zone rouge, deviennent plus turgescentes. C'est une réaction d'un type analogue à ce que l'on peut observer autour d'un foyer lupique après une injection de tuberculine. Ehrlich et d'autres auteurs croient que cette rougeur est à attribuer à une dose trop faible du médicament, qui ne produirait que l'excitation des spirochètes et non leur anéantissement. Jadassohn, par contre, a vu cette réaction se produire dans des cas où la dose avait été normale et où l'effet thérapeutique ne laissa rien à désirer. On n'est donc pas en droit d'admettre qu'il s'agisse d'une action insuffisante du remède.

C. — *Accidents tertiaires.*

C'est dans les accidents tertiaires de la syphilis que l'action symptomatique de l'arsénobenzol est la plus nette. Particulièrement les formes ulcéreuses se cicatrisent plus vite qu'avec le traitement mercuriel et ioduré. Cette action favorable s'étend aussi aux manifestations viscérales gommeuses.

D. — *Syphilis maligne.*

Buschke donne comme caractéristiques de la syphilis maligne soit le manque complet du stade secondaire maculopapuleux, soit la production précoce, arrivant d'ordinaire dès la première année, d'ulcérations étendues de la peau et des muqueuses. On remarque, en outre, des troubles de l'état général, une fièvre élevée, et des accidents précoces et graves des organes internes et des os. D'après Buschke on ne découvre pas de spirochètes dans les foyers, bien que l'inoculation aux singes réussisse. Cette forme de la syphilis est plus favorablement influencée par l'arsenic que par le mercure. Dans ces cas aussi le salvarsan fait merveille.

E. — *Syphilis congénitale.*

On a noté des résultats thérapeutiques intéressants obtenus chez des syphilitiques héréditaires qui furent guéris uniquement par l'allaitement de leur mère, qui avait reçu une injection de salvarsan. Ces résultats furent même donnés comme une preuve qu'il se formait par le traitement des anticorps syphilitiques, qui, transmis par le lait de la mère, guérissaient le nourrisson syphilitique. Cette question théorique est loin d'être élucidée. Mais ce traitement indirect est généralement insuffisant. Ritter, notamment, l'a essayé dans deux cas, et les deux enfants moururent sans avoir été, ne fût-ce qu'extemporairement, améliorés par le traitement ; aussi regretta-t-il de n'avoir pas employé les anciennes méthodes de traitement de la syphilis héréditaire.

Par contre, les auteurs sont très partisans de l'administration du salvarsan directement aux enfants syphilitiques : Lesser croit que l'on peut ainsi sauver plus d'existences que par le traitement mercuriel. Mickley, qui a fait des injections chez cinq hérédosyphilitiques de 3 à 5 centigrammes de salvarsan, en est aussi très partisan. Deux de ces enfants étaient atteints d'ostéochondrite syphilitique ; chez tous deux la possibilité de mouvoir les membres revint très rapidement.

F. — *Accidents parasyphilitiques*

Ici les avis des médecins sont très partagés. Je donne ici deux opinions assez différentes.

« Sicard et Bloch trouvent que l'arsénobenzol est efficace non seulement dans les syphilis nerveuses jeunes où il ne s'agit pas d'accidents parasyphilitiques, mais même dans les tabès au début. Son action est supérieure au mercure, non pas seulement au point de vue spécifique, mais encore parce que la cure arsenicale à haute dose n'a pas sur le système nerveux l'effet général déprimant de la mercurialisation intensive. Par contre, dans la paralysie générale, traitée même dès l'apparition des premiers symptômes, le résultat thérapeutique est nul. Les auteurs n'ont noté également aucune amélioration chez les hémiplégiques ou les paraplégiques de vieille date ».

Voici, d'autre part, les conclusions d'un article d'Oppenheim :

« Dans le tabès dorsal, le 606 peut, en relevant l'état général et en supprimant quelques symptômes, même ceux qui passent pour être les plus fixes, avoir une influence importante et amener une amélioration sensible. Mais cela n'a lieu que pour un petit pourcentage des cas. Vis-à-vis de ces réussites se placent des échecs complets et même des aggravations évidentes. Il y a donc une certaine responsabilité à encourir, quand on conseille le remède à un tabétique. Tout compte fait, je crois que l'on a plus souvent une action heureuse qu'une aggravation. Mais on ne doit pas attendre de résultats curatifs décisifs, et il est à conseiller de laisser la décision au malade en lui exposant les aléas du traitement. Si j'ai vu, ajoute Oppenheim, un résultat surprenant dans un cas qui paraissait être une paralysie générale, je crois cependant, d'après mes autres expériences, qu'on ne doit rien attendre d'important dans les cas avérés. Toutefois, je trouve qu'on est autorisé à essayer ce remède, étant donné le pronostic fatal de l'affection. »

II. — *Action sur la marche de la maladie.*

Il est facile de juger l'action du salvarsan sur les symptômes actuels de la syphilis : mais il est impossible de prévoir quelle sera son action sur la marche générale de l'affection. Ce ne sera qu'après plusieurs années d'observation attentive que l'on pourra répondre à cette question.

Toutefois, il semble qu'on puisse affirmer dès maintenant, que si la destruction complète et en une fois des spirochètes peut être réalisée, et c'est là le but de la fameuse « therapia sterilisans magna », cela ne doit avoir lieu que dans un nombre assez limité de cas.

Je n'en veux d'autres preuves que les lignes suivantes que je transcris d'un article paru dans le *Deutsche med. Wochenschrift* (1910, n° 52) qui rapporte les idées d'Ehrlich et a été revu par lui : « Ehrlich a, en collaboration avec Herxheimer, soigné en 1907, un nombre de cas, 67, avec l'arsenophénylglyzin (1). On put en réexaminer 12 ; parmi ceux-ci 9 avaient eu des récidives ; par contre, 3 étaient restés sans récidives depuis deux à trois ans ; de ces 3 cas, 2 étaient des syphilis malignes et le troisième une hérédosyphilis. Un de ces trois malades avait fait 3 cures pendant la période de latence de la maladie ; les deux autres pas. Bien qu'un espace de deux ans ne suffise pas à garantir d'une manière absolue une guérison durable, ce fait montre toutefois avec vraisemblance la possibilité d'une telle guérison. »

Trois cas sur douze sans récidives, avec un remède d'action analogue, mais plus faible toutefois que celle du 606 ! N'avons-nous pas une proportion au moins égale dans les syphilis traitées par le mercure ?

« Il est évidemment impossible de donner une statistique valable au sujet des récidives. Ce travail, qui n'a jamais pu être fait pour les cures mercurielles, ne saurait l'être, à plus forte raison, pour une médication de date aussi récente.

» Il est certain, dit Wechselmann, que des récidives surviennent ; mais, d'après mon expérience de plusieurs centaines de cas de syphilis, qui ont été observés plus de six mois, les récidives précoces paraissent survenir plus rarement qu'avec le traitement mercuriel. Mais surtout elles n'arrivent pas d'ordinaire sous forme de récidives cutanées généralisées, mais bien la plupart du temps comme récidives en foyers isolés, spécialement comme plaques de la gorge, iritis, choroïdite, périostite locale, j'ai vu une fois une parésie du N. trochléaire, et une fois de l'abducteur. Deux fois survinrent dans le second et le troisième mois après l'injection, alors que la réaction de Wassermann était négative, des douleurs de tête qui résistaient à l'emploi des anti-névralgiques. Tous ces symptômes disparurent après une seconde injection, tandis que dans quelques-uns de ces cas la cure mercurielle essayée préalablement avait échoué. »

---

(1) L'arsénophénylglycine a essentiellement la même action que le 606 exactement, avec cette seule différence qu'il occasionne plus souvent des effets secondaires qui empêchent la généralisation de son emploi. (Ehrlich, *Deutsche med. Woch.*, 1910, n° 41).

Voici, d'autre part, l'explication que le même auteur donne de la pathogénèse des récidives :

« Si l'on considère d'une part l'action curative énorme générale du médicament et son échec à quelques endroits seulement, on est bien près d'admettre qu'aux endroits de récidive la pénétration du médicament a été empêchée par les dispositions anatomiques. Il est vraisemblable que de tels foyers seront plus vite atteints par la réinjection de la dose de 50 à 60 centigrammes de médicament, dose suffisamment efficace, que par l'injection d'une dose unique renforcée. Une partie aussi des récidives est occasionnée par des foyers encapsulés, inaccessibles au médicament. »

RÉACTION DE WASSERMANN.

Un autre moyen d'apprécier la valeur curative du médicament est l'étude de la réaction de Wassermann.

Voici ce que dit à ce sujet Ehrlich dans sa communication au Congrès de Königsberg :

« La façon de se comporter de la réaction de Wassermann est de la plus grande importance pour apprécier le traitement au 606. Tout d'abord, on doit dire qu'un cas, qui conserve la réaction après le traitement, est à considérer comme non guéri.

« Mais si la réaction positive disparaît, nous avons à distinguer deux possibilités. Ou bien il peut s'agir d'une véritable guérison, qui se manifeste par la disparition durable de la réaction. Mais il peut aussi n'être question que d'une phase passagèrement négative ; par l'injection, le nombre des spirochètes est très diminué et ceux qui restent ne sont pas en nombre suffisant pour produire la réaction. Ce n'est que quand les spirochètes auront à nouveau pullulé que la réaction pourra se reproduire : le temps qui sera nécessaire pour cela variera d'après le nombre des spirochètes restants, d'après la quantité et la nature des anticorps formés, d'après l'intensité du préjudice qu'ont subi les spirochètes survivants. Et ainsi une réaction redevenant positive doit être considérée comme une récidive sans manifestations extérieures et est ainsi une indication de faire une nouvelle injection.

Deux faits sont à retenir à ce sujet : le premier c'est que la modification de la réaction de Wassermann peut tarder à se produire, et ne se présenter que de quatre à huit semaines après l'injection.

En second lieu, lorsqu'après une première injection, la réaction est restée positive, une seconde injection la modifie, environ neuf fois sur dix. Les cas restants sont dus à des spirochètes arsenorésistants et doivent donc être traités d'après les méthodes anciennes.

ACCIDENTS.

Nous devons distinguer deux espèces d'accidents : les uns, accidents locaux, résultent de l'action du salvarsan à l'endroit même où il a été injecté ; les autres, accidents généraux, dépendent de l'influence du médicament sur notre organisme après son absorption.

1. — *Accidents locaux.*

Dans les *injections intraveineuses*, on peut avoir une thrombose de la veine ; de plus, quand une partie du médicament a fusé dans le tissu cellulaire périphérique, on peut voir survenir une infiltration considérable du membre, et même des plaques de gangrène cutanée.

Mais, somme toute, ces accidents sont rares, et peuvent être évités en suivant exactement la technique voulue : Schreiber, de Magdebourg, avait fait sans accident, en novembre, 635 injections intraveineuses.

« Un des cas mortels relatés par Ehrlich concerne une femme de 26 ans qui avait reçu 40 centigrammes de salvarsan en injection intraveineuse, et qui se mit aussitôt après, et cela contre l'avis de son médecin, à faire de forts travaux de jardinage. La malade, trois jours après, présenta des symptômes d'une dyspnée intense, à laquelle elle succomba. L'autopsie démontra qu'à l'endroit d'injection de la veine cubitale, il s'était formé un thrombus adhérant à la paroi du vaisseau ; il y avait embolie de l'artère pulmonaire. Cette malade présentait, en outre, une aortite spécifique, de la sclérose des artères coronaires et de la myocardite.

» Ehrlich ajoute que les thrombus constatés n'ont jamais amené de complications sérieuses, et qu'ils disparaissent toujours. « Il est donc vraisemblable que si la malade avait bien voulu suivre le conseil de son médecin, l'issue n'eût pas été fatale. »

Accidents locaux des injections intramusculaires. — On a fait des injections de salvarsan, soit sous la peau, soit dans les muscles. Les premières sont quasi complètement abandonnées, à cause des gangrènes qui en ont été souvent la conséquence. On ne pratique plus guère que les injections intramusculaires à des endroits bien délimités, que nous aurons l'occasion de déterminer ultérieurement en parlant du mode d'administration.

L'infiltration et la nécrose amenée par les diverses méthodes d'injection dépendent parfois de la technique ; le plus souvent elles sont en relation avec le mode de préparation du médicament. La quantité du véhicule a également son influence.

« Des expériences entreprises par divers auteurs, entre autres par Scholtz, ont montré l'action des divers procédés. Dans la méthode de Wechselmann, l'injection provoque une nécrose circonscrite et le foyer nécrotique est vite limité par une capsule résistante. Après cinq à six jours, on trouve entre les fibres musculaires nécrotiques des restes encore très visibles de la poudre injectée.

» Dans la méthode des injections alcalines d'Alt, il y a également des nécroses étendues. Les injections neutres et les suspensions huileuses sont mieux supportées. »

Les infiltrations, abcès, gangrènes qui constituent la série des accidents locaux sont certes très ennuyeux pour le malade, surtout à cause des douleurs qu'ils occasionnent ; mais ils sont en grande partie évitables et n'ont, du reste, pas une telle importance qu'ils constituent une contre-indication.

II. — *Accidents généraux. Morts dues au salvarsan.*

Dans la cure au salvarsan, nous injectons dans un organisme des quantités considérables d'un médicament, dont il est impossible de fixer actuellement la dose toxique mortelle. Au sujet de cette dose, voici le résumé de l'opinion d'Ehrlich, telle qu'elle se trouve dans une communication faite à Francfort en décembre : Un remède qui a pour but de stériliser complètement un organisme de ses spirochètes ne saurait pas ne pas être toxique. La phénacétine a déjà occasionné une mort à la dose de 50 centigrammes, et cependant personne ne considérera 50 centigrammes de phénacétine comme un poison mortel. Le salvarsan n'est pas plus toxique que le chloroforme ; il est plutôt moins toxique. »

Il est certain que, pour le salvarsan, si l'on excepte les malades présentant une hypersensibilité spéciale au remède par une idiosyncrasie, un décès se présentera beaucoup plus vite s'il s'agit d'organismes fortement tarés, que si on a affaire à un individu résistant. Quand on analyse les cas de mort publiés, on voit que ce sont presque toujours des malades atteints d'affections graves, soit du système nerveux, soit de l'appareil circulatoire, qui succombent. Donnons les exceptions recueillies.

« Nous avons déjà cité le cas de décès dû à une injection intraveineuse. Dans deux autres cas, la mort paraît due non pas tant à l'état pathologique du malade qu'au médicament lui-même, ou à la façon de l'administrer.

» Dans le cas de la clinique d'Iéna, il s'agissait d'une femme chétive, souffrant d'une syphilis du larynx. On lui fit une injection d'une solution acide qui a une action irritante très forte. Ehrlich attribue la mort à une espèce de shock qui aurait pu être évité par un mode d'administration plus approprié.

» Dans un autre cas, un ictère survint deux mois après l'injection ; Ehrlich attribue le décès au salvarsan. »

En résumé, si l'on considère le nombre déjà considérable de malades injectés, on peut dire que les risques de mort sont quasi nuls.

Parmi les *accidents relatés, non suivis de décès*, les uns tels que la fièvre, divers exanthèmes, n'ont guère d'importance. Notons qu'Ehrlich attribue la fièvre tardive que l'on voit parfois survenir huit à dix jours après l'injection à une décomposition du médicament dans un dépôt trop considérable.

Plus importants sont *les accidents nerveux, qui concernent divers nerfs craniens* et qui ont occasionné soit des paralysies des muscles oculaires, soit des troubles de l'ouïe et dans un cas la cécité.

« Ce cas impressionne à cause de l'expérience malheureuse faite avec l'atoxyl ou l'arsacétine : Igersheimer a en effet pu recueillir 37 cas de cécité définitive après usage de ces médicaments. Ehrlich, qui, comme nous l'avons vu, considère l'atoxyl et le salvarsan comme appartenant à des groupements chimiques différents, n'ayant pas les mêmes actions toxiques, a expliqué comme suit ce cas unique parmi 30,000 injections.

» Il s'agit d'une malade de la clinique de Finger, chez qui une injection de quarante centigrammes fut faite le 6 juillet 1910 ; au 5 octobre survient une maladie du nerf optique. Il est très important de noter que la malade avait pris auparavant beaucoup d'arsenic. Pendant une année elle avait fait une cure à l'arsacétine et quatre cures importantes à l'énésol ; par là on avait procuré aux arsenocepteurs — en ce cas spécialement les yeux — une avidité particulière. Il est connu et prouvé, que quand on a employé l'atoxyl contre la maladie du sommeil et que l'on donne ensuite de l'arsacétine, on a également comme conséquence une hypersensibilité spéciale de l'organisme pour l'arsenic. Par suite de cette grande déviation de l'arsenic dans l'organisme, la partie du médicament qui reste pour agir sur les trypanosomes est trop petite que pour qu'une action thérapeutique suffisante soit obtenue. Dans de tels cas l'arsacétine a une action mauvaise pour l'organisme, qui est devenu sensible à l'arsenic, et non sur les trypanosomes qui se sont accoutumés à l'arsenic par l'emploi de l'atoxyl.

» L'explication du cas de Finger est la même. »

Somme toute, le médecin doit conserver après cette relation une certaine crainte d'injecter le salvarsan lorsque les malades ont été soumis peu auparavant à de fortes cures arsenicales.

L'interprétation que l'on donne aux *lésions des autres nerfs craniens* est très diverse suivant les auteurs. Les uns (Stern, Buschke) les attribuent à l'action soit directe, soit indirecte du médicament ; les autres les considèrent comme des accidents syphilitiques. Ehrlich qui ne reconnaît pas au salvarsan une action nocive sur les nerfs, fait à ce sujet les remarques suivantes ; ces névrites peuvent se rencontrer surtout dans la période secondaire chez des syphilitiques soit non traités, soit traités au mercure ; or, les malades qui ont présenté ces lésions se trouvaient tous au début de la période secondaire. Jansen a pu observer des lésions du nerf acoustique dans des syphilis récentes, même quand elles n'étaient traitées qu'au mercure. Dans les cas traités par le salvarsan une nouvelle injection a amélioré l'ouïe, ce qui ne se comprendrait pas si l'origine du mal avait été le médicament.

INDICATIONS ET CONTRE-INDICATIONS DU SALVARSAN.

Après ce long exposé, il faut conclure ; quand le médecin-praticien sera-t-il tenu de recourir à cette nouvelle médication ? Il ne s'agit pas en effet pour lui de faire des expériences, comme on peut le faire dans des cliniques. Or, il n'y a guère qu'une catégorie de cas où l'indication du traitement au salvarsan semble bien précise : *c'est lorsque le mercure est soit impuissant soit non toléré.* Ce sont des cas rares, mais qui sont loin d'être exceptionnels : nous rencontrons cette inefficacité de mercure dans les syphilis malignes précoces, dans certaines syphilides de la paume de la main ou de la plante des pieds dans certains cas de syphilis constamment récidivantes.

D'autre part, le mercure peut n'être pas toléré à cause de stomatite, de néphrite, ou d'idiosyncrasie spéciale.

Reste toute une série de cas où l'*indication du traitement n'est que relative.* C'est avant tout quand le syphilitique se présente avec son chancre avant la période secondaire ; mais, dans ce cas il faut associer au salvarsan une médication mercurielle intensive.

Une autre série d'indications nous est donnée par la nécessité d'une action rapide, comme dans les cas de syphilis cérébrale ou viscérale, dans des syphilides tertiaires mutilantes.

Enfin, il est une action nette du salvarsan qui peut parfois en indiquer l'emploi : c'est son action reconstituante sur l'organisme.

Les *contre-indications* sont ainsi formulées par Ehrlich : les affections étendues du système nerveux, les maladies du cœur non compensées et les affections des vaisseaux.

Anticipant sur un travail qu'il se propose de publier bientôt, M. le Dr Morelle entre, ensuite, dans quelques détails pratiques sur la technique des injections et la posologie du médicament. Il expose, aussi, ses vues personnelles sur la direction qu'il convient de donner au traitement des syphilitiques, en se basant sur l'expérience des cas qu'il a suivis; il nous relate quelques-uns de ceux-ci.

D'après notre confrère, il faut surtout lutter énergiquement, avec toutes les armes de la thérapeutique actuelle, contre l'*accident primaire,* moyennant — bien entendu — une surveillance attentive. On pourra ainsi espérer conjurer l'éclosion des accidents secondaires. M. Morelle a obtenu ce résultat en appliquant localement le mercure, sur le chancre, sous forme de solution de sublimé et de pommade au précipité blanc, et en faisant alterner, comme traitement interne des injections d'huile grise et des injections d'*hectine* (préparation à base d'arsenic, comme la *salvarsan*, préconisée par Halcopeau).

Dans le cours de la maladie, on se guidera d'ailleurs, d'après le résultat du traitement primitif. La méthode intra-veineuse est le meilleur procédé ; vient, ensuite, l'injection intra-musculaire.

M. le Dr Swolfs met en doute la possibilité de conjurer d'une manière sûre et définitive la récidive d'accidents syphilitiques, même après l'emploi d'un traitement intensif, constitué dès le début, tel que celui préconisé par M. Morelle. Il cite des cas d'accidents tertiaires graves, mortels, apparaissant très tardivement, après une longue période de fausse sécurité ayant suivi l'apparition des premiers accidents d'une syphilis reconnue et traitée.

M. le Dr Javaux fait remarquer que ces cas n'ont, peut-être, pas été soumis dès le début à un traitement assez énergique et assez prolongé ; la thérapeutique anti-syphilitique ne présentait pas, non plus, il y a peu d'années encore, les ressources qu'elle offre aujourd'hui. M. Javaux se rallie donc aux vues de M. Morelle.

De l'évolution lente de certaines tumeurs malignes du pharynx. Tel est le titre d'un travail que M. le Dr Goris présente à la section.

Il appelle notre attention sur l'évolution particulièrement lente qu'affectent parfois certaines tumeurs du pharynx et qui pourraient en imposer, au point de vue du pronostic, si l'on n'était prévenu.

Dans le premier cas, il s'agit d'un homme de trente-six ans qui vint consulter M. Goris en janvier 1907 parce qu'il avait un petit paquet ganglionnaire au niveau de la région sous-maxillaire gauche, et qu'il crachait du sang, en minime quantité toutefois : c'était le dernier symptôme qui l'avait surtout effrayé.

La première idée qu'éveillent ces manifestations est naturellement celle que l'on pouvait avoir affaire à une tumeur maligne. L'examen approfondi par tous les moyens que nous avons à notre disposition : examens au miroir des cavités épi- et mésopharyngienne, du larynx, examen digital, éclairage diaphanoscopique des sinus, furent absolument négatifs.

Il ne se trouvait, comme cause expliquant l'adénopathie, que de nombreux follicules amygdaliens bilatéraux engorgés de matières purulentes : l'expression de ces cavités et leur cautérisation au galvanocautère furent le traitement institué pendant quelques mois, à des intervalles assez espacés.

M. Goris perdit le malade de vue, jusqu'au mois de septembre 1909 ; il le revit alors, porteur de deux tumeurs ganglionnaires énormes occupant respectivement les deux régions cervicales, et empiétant, à droite, sur la région sus-claviculaire.

Le patient avait consulté d'éminentes personnalités chirurgicales étrangères qui avaient émis des diagnostics fort différents : adénite simple, adénite tuberculeuse, mais pas une seule n'avait songé qu'il pût y avoir là une métastase cancéreuse.

M. Goris opéra les deux tumeurs, en deux séances, et grand fut son étonnement quand il reçut le diagnostic microscopique, fait par le Prof. Jorez de l'Académie de Cologne : carcinome pur, avec signe de métastase certaine du côté gauche : il était évident qu'il s'agissait d'une infiltration cancéreuse des ganglions lymphatiques.

M. Goris refit un examen complet de l'opéré au point de vue de l'origine naso-pharyngo-laryngienne possible des tumeurs du cou : il ne lui fut pas possible de déceler la moindre ulcération ou tuméfaction dans le territoire d'origine suspect.

Il ne revit plus son patient jusqu'en octobre 1910 — notez bien les dates — quand il lui revint, avec de la surdité de l'oreille gauche, et une tuméfaction dans le naso-pharynx, refoulant le voile du palais en avant : cette fois le doute n'était plus possible : il s'agissait d'un carcinome développé dans le haut pharynx, près de la trompe d'Eustache. On se trouvait donc en présence d'une tumeur maligne, restée silencieuse pendant environ trois ans au point de vue de ses manifestations propres, et qui s'était révélée par des métastases précoces dont l'origine n'avait pu être établie après deux ans d'évolution.

Dans le second cas l'évolution fut plus lente encore. Il s'agissait ici d'un homme d'une cinquantaine d'années, très robuste, ne souffrant absolument pas, mais ayant des hémorragies énormes de l'arrière nez.

Il fut adressé à M. le Dr Goris pour examen, sans aucune indication, par un collègue de province qui désirait avoir son avis sur l'origine de ces hémorragies. Le toucher digital lui démontra l'existance d'une petite tumeur molle siègant sur le côté de l'épipharynx, au-dessus de la trompe d'Eustache gauche, tumeur saignant au moindre attouchement.

Il s'agissait cliniquement d'un sarcome que M. Goris proposa d'enlever en faisant une résection temporaire du maxillaire supérieur : l'opération ne fut pas acceptée.

L'envahissement du maxillaire et des ganglions du cou est venu confirmer le diagnostic posé, il y a cinq ans.

Ces observations nous démontrent que nous devons être toujours très circonspects quand nous nous trouvons en présence de certaines hémorragies persistantes de l'arrière nez, même quand ces hémorragies ne s'expliquent pas par la présence d'une tumeur appréciable à nos moyens d'investigations les plus perfectionnés.

M. le Dr Etienne Henrard présente un travail ayant pour objet : *De la conduite à tenir lorsqu'on se trouve en présence d'une personne qui a dégluti un corps étranger.*

Il ne traitera pas des cas où un corps étranger dégluti provoque la suffocation et où on est obligé de pratiquer d'urgence la trachéotomie. Son but est d'exposer la conduite à tenir lorsqu'on se trouve en présence d'une personne qui a dégluti un corps étranger depuis quelques heures et qui en est à peine gênée.

En premier lieu il faut faire le diagnostic du siège du corps étranger et pour faire ce diagnostic, il faut recourir à la radioscopie, à l'exclusion de toutes les autres méthodes. Le cathétérisme de l'œsophage au moyen du cathéter à boule, outre qu'il peut être dangereux, est un moyen infidèle ; M. Henrard en connaît un exemple qu'il a rapporté déjà (¹) : une pièce de cinq francs arrêtée au rétrécissement aortique de l'œsophage ne fut pas diagnostiquée même après plusieurs cathésérismes et ce n'est que trois jours après, que sa présence fut reconnue à la radioscopie. La bronchoscopie et l'œsophagoscopie qui exigent l'anesthésie générale au moins chez l'enfant, sont des moyens difficiles, à la portée des spécialistes seuls ; la bronchoscopie renseigne d'ailleurs d'une manière très imparfaite, le tube de Kilian se remplissant rapidement de mucus bronchique qui en obstrue la lumière.

La radioscopie est un moyen anodin, ne provoque aucune douleur, n'exige aucune manœuvre difficile, et permet de poser certainement le diagnostic.

On doit recourir à la radioscopie le plus vite possible, car le corps étranger dégluti peut, par un séjour prolongé, provoquer des perforations de l'œsophage, par exemple.

Le corps étranger est reconnu, il siège dans l'œsophage. La conduite à tenir pour son extraction dépendra de sa nature et de son siège. Si c'est un corps étranger, plat, comme les pièces de monnaie, qui s'arrêtent chez l'enfant au rétrécissement cricoïdien de l'œsophage, l'extraction doit se faire, *à l'exclusion de tout autre méthode*, au moyen d'une pince à branche glissante, sous l'écran radioscopique, dans l'examen latéral. M. Henrard a réussi cette extraction 27 fois sur 27 (¹). Cette méthode est évidemment supérieure à l'extraction sous l'œsophagoscope qui, entre autres inconvénients, présente déjà celui de l'anesthésie générale chez l'enfant.

Si le corps étranger plat s'arrête plus bas dans l'œsophage, l'extraction peut être tentée, sous l'écran, avec la pince de Thiemann, par exemple. Le Dr Emile Dubois réussit de cette manière l'extraction d'une pièce de cinq francs qui s'était arrêtée au niveau du rétrécissement aortique chez un adulte. Le Dr Louis

---

(¹) *La recherche et l'extraction des corps étrangers opaques aux Rayons X.* Éditeur Ernest Goossens, Bruxelles 1910.

Leclerq réussit également l'extraction d'un anneau de parapluie qui s'était arrêté au cardia chez un enfant de 6 ans.

Si le corps étranger peut agripper la paroi œsophagienne, comme les dentiers, par exemple, la conduite à tenir dépendra de son siège. S'il est arrêté au rétrécissement cricoïdien, l'extraction peut être tentée, sous l'écran, mais si l'on sent la moindre résistance, il faut pratiquer l'extraction sous l'œsophagoscope. Si le corps étranger siège dans la partie moyenne de l'œsophage, il faut encore pratiquer l'extraction sous l'œsophagoscope et surtout ne pas pratiquer l'œsophagotomie postérieure. Si le corps étranger siège au cardia, il faut pratiquer la gastrotomie, à l'exclusion de toute autre méthode et ne pas faire de tentatives d'extraction par la bouche, qui pourraient amener le corps étranger dans la partie moyenne de l'œsophage dont on ne saurait plus le déloger.

Le corps étranger a pénétré dans les voies aériennes : L'extraction doit se faire sous le bronchoscope. Voici deux cas que l'auteur a eu l'occasion de rencontrer.

1r cas. Un individu de 50 ans, dans une attaque d'épilepsie, avait avalé deux dentiers qu'il retrouva dans la trachée quinze jours après l'accident; le Dr Goris voulut bien se charger de l'extraction qu'il pratiqua sous le trachéoscope après trachéotomie.

2e cas. Une jeune fille avait avalé une épingle à perle noire, d'environ 5 centimètres. Le jour même elle n'accusait aucune douleur. On crut que l'épingle avait passé dans l'œsophage et qu'elle sortirait par les voies naturelles. Il n'en fut rien et deux mois après, M. Henrard trouvait, à l'écran, l'épingle située dans la trachée au niveau de la bifurcation des bronches. Le Dr Goris se chargea également de cette extraction qu'il pratiqua à travers le bronchoscope.

Il paraît donc bien démontré que, pour le diagnostic et l'extraction des corps étrangers opaques aux rayons X, la bronchoscopie, l'œsophagoscopie, la radioscopie et la gastrotomie, doivent se prêter un mutuel appui et que, dans chaque cas déterminé, chacune de ces méthodes trouve son indication exclusive.

M. le Dr Warlomont relate un cas de traumatisme de l'orbite ayant amené des lésions graves, confirmées par la radiographie. Il s'agit d'un soldat, en garnison à Liége, qui, le 29 novembre dernier, fut atteint, au niveau de la région inféro-interne de l'orbite, par un coup de fleuret moucheté, à la salle d'armes, porté, par mégarde, par un camarade.

M. Warlomont n'eut l'occasion de voir le blessé que quelques semaines plus tard, après sa sortie d'un hôpital militaire où il avait reçu les soins nécessités par son état. Il put encore, cependant, observer les lésions et les troubles produits par l'accident, à savoir : une déviation du globe en dehors (strabisme divergent), du ptosis (chute de la paupière supérieure) et une perte absolue de la vision, consécutive à une atrophie complète du nerf optique, décelée par l'examen ophtalmoscopique. A la partie inféro-interne du rebord orbitaire, cachée par un pli de la paupière inférieure, on remarque une cicatrice linéaire, longue de quelques millimètres, trace de la plaie contuse amenée par le bouton du fleuret. Détail important : le blessé déclarait que la perte de la vision de cet œil fut absolue et instantanée ; le premier jour, le ptosis était complet et la déviation du globe beaucoup plus marquée.

Ces données étaient suffisantes pour conjecturer, d'une manière plausible, de la nature des désordres amenés par le traumatisme. Le ptosis et le strabisme divergent faisaient penser aussitôt à une paralysie du nerf moteur oculaire commun, correspondant à une lésion de la fente sphénoïdale, l'atrophie de la papille optique devait faire supposer que le nerf optique était intéressé par une atteinte des parois du canal optique.

On se trouvait, sans doute, en présence d'un de ces cas, décrits dans la littérature ophtalmologique, de contusion violente du crâne, amenant une fracture d'une paroi orbitaire avec prolongement de la fissure jusqu'à la fente sphénoïdale et au canal optique, une esquille pouvant même avoir entamé le nerf optique.

Ces suppositions devinrent une certitude, après l'examen radiographique du soigné, à l'Institut de Radiographie de l'hôpital militaire de Bruxelles, par notre collègue, M. le médecin de bataillon de 1re classe Dupont. Sur le cliché et la photographie, en tous points remarquables, présentés aux membres de la section, ceux-ci purent constater l'existence d'une solution de continuité du tissu osseux, à la région inféro-interne de l'orbite, correspondant au point où avait porté le coup de fleuret.

M. le Dr De Lantsheere fait remarquer que ce cas est surtout intéressant pour la représentation du processus fournie par l'examen radiographique, c'est cette confirmation qui manque à la plupart des exemples cités jusqu'ici.

Sixième Section

M. G. de Béthune fait une Communication sur *La Technique de l'Orientation en Aéroplane.* La section vote l'impression de ce travail. Il a paru dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison du 20 avril 1911.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

La séance est ouverte à 2 heures et demie sous la présidence de M. L. Cousin, professeur honoraire de l'Université de Louvain.

M. Mansion, secrétaire général, annonce, aux applaudissements de l'assemblée, que l'Académie royale de Belgique a élu associés, MM. Ém. Picard et Éd. Branly, membres honoraires de la Société scientifique, et que l'Académie des sciences de Paris, à la date du 23 janvier 1911, a élu M. Éd. Branly membre de la Section de Physique.

La parole est donnée au R. P. G. Schmitz, S. J., directeur du Musée des Bassins houillers belges, pour une Conférence avec projections sur *La Houille et la Tourbe.* Cette Conférence sera publiée ultérieurement.

M. Cousin félicite et remercie le Conférencier et déclare close la session de Janvier.

Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité

PAR

le Comte DE SPARRE
Doyen de la Faculté catholique des Sciences de Lyon

INTRODUCTION

J'ai déjà eu plusieurs fois occasion d'examiner la question du mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité, la première fois dans un mémoire publié en 1875 dans le BULLETIN de la Société de Statistique de l'Isère et en dernier lieu dans celui publié en 1904 par l'Académie de Stockholm (¹).

Toutefois dans ce dernier mémoire, comme dans les précédents, j'ai supposé le projectile parfait, la vitesse initiale dirigée suivant l'axe de figure et la rotation initiale se faisant autour de cet axe. Or les conditions initiales ne sont jamais absolument régulières et le projectile lui-même n'est jamais rigoureusement parfait. Il y avait par suite intérêt à se rendre compte de l'influence que peuvent avoir sur le mouvement, soit de faibles imperfections du projectile, soit des conditions initiales qui ne sont pas absolument normales ; c'est ce que je fais dans le présent mémoire.

Je suppose que la surface extérieure du projectile est exactement une surface de révolution (²), et j'appelle axe de figure l'axe de cette surface, mais j'admets que le centre de gravité n'est pas

---

(¹) ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRON. OCH FYSIK, Band 1, 1904 : Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité, par le comte de Sparre.

(²) Ce que l'on peut admettre, cette surface étant régularisée sur le tour.

rigoureusement sur cet axe de figure, que l'ellipsoïde d'inertie pour le centre de gravité n'est pas rigoureusement de révolution, et que la rotation initiale et la vitesse initiale font un petit angle avec l'axe de figure. Je montre alors, que parmi les irrégularités que le projectile peut présenter au départ, ce sont celles provenant de l'angle de l'axe de figure avec la rotation initiale ou de l'angle de l'axe de figure avec l'axe principal d'inertie voisin, qui ont une influence prédominante ; au lieu de cela les irrégularités provenant soit d'un angle de la vitesse initiale avec l'axe de figure soit d'une légère excentricité du projectile ont une influence beaucoup moindre.

La question du mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité a été récemment traitée de nouveau par le général Zaboudski (¹) dans un mémoire en langue russe publié en 1908 et dont une traduction allemande a paru en 1909 (²). Ce mémoire appelle l'attention sur certains points et me semble sujet à certaines réserves que je vais brièvement indiquer. Le général Zaboudski dit que l'étude des résultats du tir courbe sous de grands angles de projection l'a conduit à admettre que, dans ce cas, le projectile est soumis à une nouvelle composante de la résistance de l'air dirigée dans le sens de la vitesse de translation du centre de gravité du projectile (³). De plus, en comparant les portées pour deux projectiles semblables, animés d'une même vitesse initiale, mais pour lesquels le pas des rayures était différent, il a remarqué que la portée était d'autant plus grande que la longueur du pas des rayures est plus courte.

Pour expliquer l'accroissement des portées avec la vitesse angulaire du projectile autour de son axe, le général Zaboudski est conduit à supposer qu'il se produit une nouvelle composante de

---

(¹) La question a été aussi abordée par M. Cranz, professeur à l'École technique de Stuttgart, d'abord dans un mémoire publié en 1896, puis dans le premier volume de son grand *Traité de Balistique* paru en 1910. Toutefois certains résultats qu'il donne sont inexacts, ainsi que je le montre dans une note à la fin du présent mémoire.

(²) *Untersuchungen über die Bewegung der Langgeschosse,* von N. Sabudski. Uebersetzt von Ritter von Eberhart, oberleutnant a. D. Stuttgart und Berlin, Fr. Grub Verlag, 1909.

(³) Ou plus exactement en sens contraire de la pesanteur.

la résistance de l'air, laquelle relève le projectile en augmentant la portée et que cette composante croît avec la vitesse de rotation du projectile. Il ajoute que l'on peut expliquer la naissance de cette composante par le principe du professeur Magnus.

Le général Zaboudski suppose, ainsi qu'on vient de le voir, que le projectile est soumis à une force, due au principe de Magnus, force qui est perpendiculaire au plan (1) passant par la tangente et l'axe de figure et comme cette force ne passera très généralement pas par le centre de gravité, elle donnera naissance, dans le mouvement du projectile autour de son centre de gravité, à un couple dont le plan sera perpendiculaire à celui passant par la tangente et l'axe de figure. Or, pour l'étude du mouvement du projectile autour de son centre de gravité, le général Zaboudski se borne à tenir compte du couple situé dans le plan de la tangente et de l'axe de figure et il néglige le second couple dont nous venons de parler, qui est du principe de Magnus ; il est cependant bien certain que si la force dont il s'agit a une influence notable sur le mouvement de translation du projectile elle ne saurait, du moment qu'elle ne passe pas par le centre de gravité, être sans influence sur le mouvement autour de ce point. On ne peut donc se borner (2), pour l'étude du mouvement autour du centre de gravité, à tenir compte du couple situé dans le plan de la tangente et de l'axe de figure. Dans le mémoire publié en 1904 par l'Académie de Stockholm, j'ai déjà étudié l'influence du second couple dont il vient d'être question et j'ai montré que même en le supposant assez faible par rapport à celui situé dans le plan de la tangente et de l'axe de figure, il peut modifier considérablement le mouvement du projectile autour de son centre de gravité. Je crois toutefois utile de revenir sur cette question, et je montre que, s'il y a lieu de tenir compte, ainsi que l'admet le général Zaboudski, de la force due au principe de Magnus, l'effet du couple auquel elle donnera naissance, sur le mouvement du projectile autour de son centre de gravité, variera beaucoup suivant la position de centre de gravité.

---

(1) Il s'agit ici d'un projectile parfait et dont les conditions initiales sont régulières.

(2) Du moins à priori.

Il y a aussi quelques autres points pour lesquels le mémoire du général Zaboudski me paraît appeler certaines réserves. D'abord il admet que la résistance opposée par l'air au mouvement du projectile est uniquement due à la pression dynamique sur sa partie antérieure et il ne tient pas compte de l'effet du vide partiel qui se produit à l'arrière; or cette seconde cause donne naissance à une force dont la direction ne coïncide pas avec celle de la résistance provenant de la première cause. Il est donc indispensable, pour le mouvement du projectile autour de son centre de gravité, d'étudier séparément l'effet de ces deux causes. Ensuite, dans un exemple qu'il traite, il suppose, du moment que la vitesse initiale est supérieure à 240 mètres, la résistance totale proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse sur toute la trajectoire, en adoptant un coefficient de proportionnalité convenable (¹). On obtient, en effet, ainsi une approximation en général suffisante, pour le mouvement de trânslation du centre de gravité du projectile, bien que dans l'exemple considéré par le général Zaboudski la vitesse descende à 134 mètres environ, valeur pour laquelle la loi de la résistance est très sensiblement proportionnelle à la seconde puissance. Mais si on obtient ainsi une approximation suffisante pour le mouvement de translation, cela tient en réalité à ce qu'il s'agit de projectiles de gros calibre pour lesquels la résistance est assez réduite pour les vitesses inférieures à 200 mètres. La même hypothèse ne saurait au lieu de cela être admise pour le mouvement du projectile autour de son centre de gravité; en effet, si on admet la loi de résistance proportionnelle à la quatrième puissance sur toute la trajectoire, en prenant un coefficient de proportionnalité tel que les résultats pour le point de chute soient sensiblement exacts, on admet en réalité pour les faibles vitesses une résistance notablement trop faible; or il se trouve que l'angle de l'axe de figure avec la tangente à la trajectoire prend une valeur relativement importante précisement lorsque la résistance de l'air a une valeur réduite et d'autant plus grande que cette résistance est plus réduite; donc en adoptant pour les faibles vitesses une valeur trop faible pour la résistance de l'air, on est certainement conduit à une valeur

---

(¹) Déterminé en fonction de la vitesse initiale et de la vitesse minima.

trop forte pour l'angle de la tangente avec l'axe de figure (¹). J'ajouterai d'ailleurs que pour le cas des vitesses réduites, cas dans lequel l'angle de l'axe de figure avec la tangente peut prendre une valeur importante, il ne semble pas que l'on puisse avec quelque certitude appliquer les formules à un exemple numérique tant que l'on ne sera pas fixé et sur l'importance de la force due au principe de Magnus et sur la part due dans la résistance de l'air soit à la pression dynamique à l'avant soit au vide partiel à l'arrière.

Il semble que, dans l'état actuel de nos connaissances, le mieux serait de calculer la pression dynamique à l'avant en partant, ainsi que je l'ai fait dans mon mémoire paru en 1893 dans le MÉMORIAL DE L'ARTILLERIE DE LA MARINE, des considérations indiquées par le colonel Vallier, et d'admettre que le surplus de la résistance est dû au vide partiel à l'arrière.

La méthode que je suis dans le présent mémoire est d'ailleurs complètement indépendante de toute hypothèse à ce sujet, en laissant à l'expérience le soin de fixer les coefficients qui figurent dans les formules.

Les équations du mouvement du projectile autour de son centre de gravité se simplifient beaucoup lorsqu'on néglige l'angle de l'axe de figure avec celui du couple résultant des quantités de mouvement ; je fais voir que si cette simplification ne permet de se rendre compte ni des conditions de stabilité du projectile ni de l'influence des irrégularités du projectile ou des conditions initiales, elle permettra en revanche de déterminer avec une approximation suffisante le mouvement lui-même, et j'en fais en terminant l'application au cas où la vitesse est assez réduite pour que l'angle de l'axe du projectile avec la tangente prenne une valeur notable et j'examine ensuite un des exemples numériques traités par le général Zaboudski.

(¹) Je n'entends toutefois nullement contester par ces remarques la valeur du mémoire du général Zaboudski ainsi que l'intérêt du fait qu'il signale au sujet de l'influence de la force due au principe de Magnus.

I

Je suppose, ainsi que je l'ai dit plus haut, que la surface extérieure du projectile est rigoureusement une surface de révolution, mais que le centre de gravité du projectile, au lieu d'être sur l'axe de révolution de la surface extérieure, que je considère comme étant l'axe de figure, en est situé à une distance très petite a, et que de plus l'ellipsoïde d'inertie pour le centre de gravité n'est pas rigoureusement de révolution. J'appellerai centre de figure la projection du centre de gravité sur l'axe de figure; enfin, au début du moins et sauf avis contraire, je suppose que l'angle δ de la tangente à la trajectoire avec l'axe de figure reste assez petit pour que l'on puisse négliger devant l'unité les termes de l'ordre de son carré.

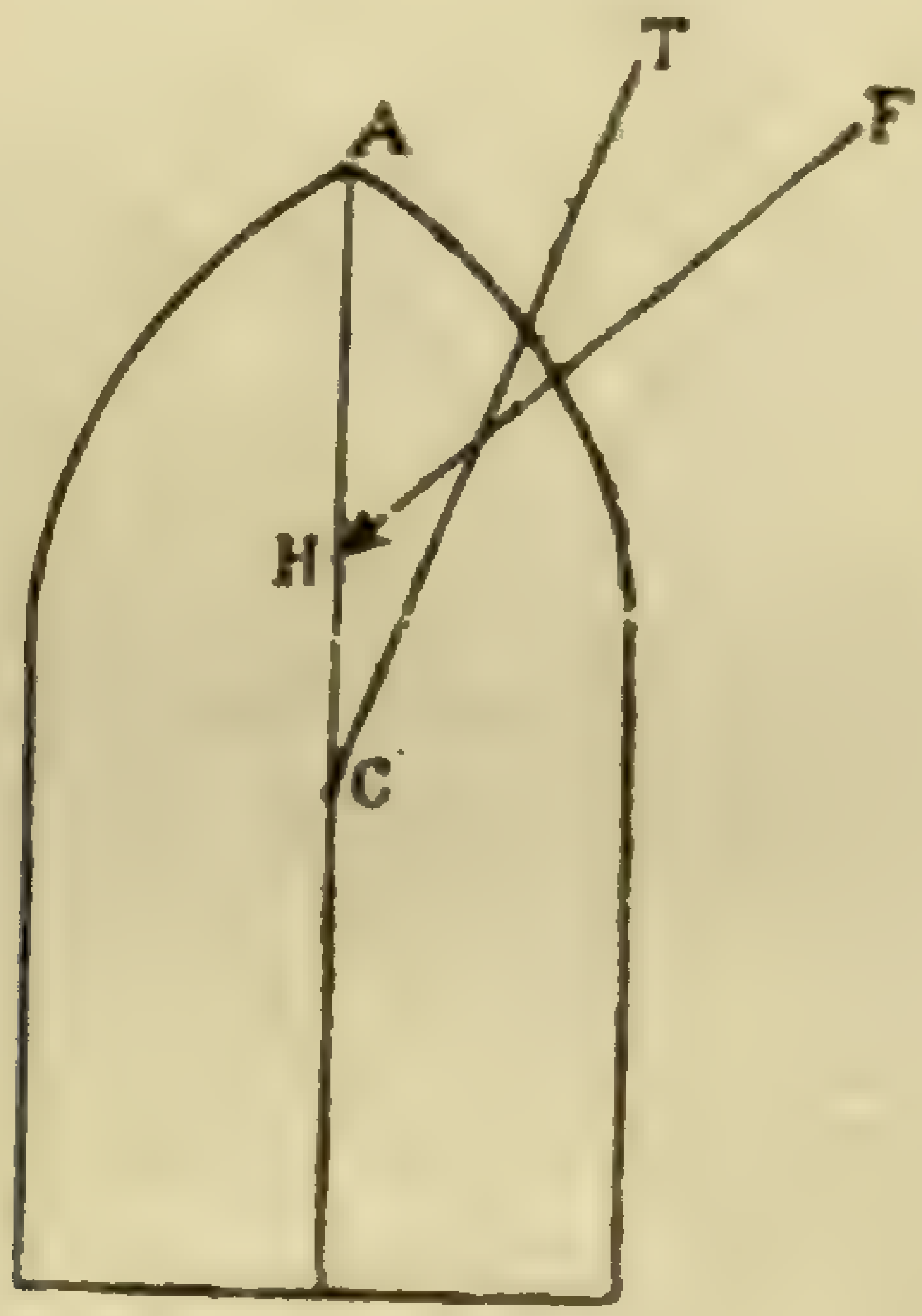


Fig. 1

Si à un instant donné le centre de figure C (Fig. 1) est animé d'une vitesse w dirigée suivant CT, et si nous négligeons d'abord l'effet de la rotation du projectile, le projectile sera soumis de la part de l'air :

1° A la pression dynamique sur la partie antérieure du projectile, qui est une force F située dans le plan de la tangente et de l'axe de figure et faisant un certain angle avec l'axe de figure.

2° A l'effet du vide partiel qui se produit à l'arrière du projectile. Cette seconde cause donne naissance à une résistance dirigée (¹) suivant l'axe de figure et qui s'ajoute à la composante X de la pression dynamique suivant l'axe de figure pour donner la composante totale X′ de la résistance de l'air, suivant l'axe du projectile.

La pression dynamique F aura deux composantes : l'une X suivant l'axe de figure, dont nous venons de parler, et l'autre Y dirigée suivant la perpendiculaire à l'axe de figure, dans le plan passant par cet axe et la vitesse du point C. Désignons par δ' l'angle TCA de la tangente à la trajectoire du point C avec l'axe de figure, l'angle FHA de la pression dynamique avec l'axe de figure est de l'ordre de δ', par suite la composante X de la pression dynamique suivant l'axe de figure sera, aux termes δ'^2 près, indépendante de δ' et on pourra, X_0 désignant la valeur de X à l'instant initial, w la vitesse de C et φ une fonction convenablement choisie, écrire

$$X = X_0\varphi(w).$$

On aura de plus, avec la même approximation, m et l désignant des facteurs constants, que l'on peut, au moins dans certaines limites, considérer comme indépendants de la vitesse

$$Y = mX\delta'$$

et

$$CH = lR$$

où H désigne le point de rencontre de la pression dynamique F avec l'axe de figure, et R le rayon du projectile.

D'autre part, on sait, par les expériences de Magnus, que lorsqu'un courant d'air frappe un corps de révolution qui tourne autour de son axe supposé perpendiculaire à la direction du courant d'air, il en résulte un excès de pression du côté où la vitesse d'un point de la surface du corps, due à la rotation, est dirigée en sens contraire de celle du courant d'air. Cet excès de pression n'est toutefois, en général, qu'une faible fraction de la pression dynamique (²) de l'air en mouvement sur le corps.

(¹) Si δ est suffisamment petit.

(²) Nous entendons par pression dynamique l'excès de la pression de l'air en mouvement sur la pression atmosphérique.

Si le courant d'air fait un angle avec l'axe de révolution, le même phénomène se produira à un degré moindre et si l'angle δ' de l'axe du corps avec la direction du courant d'air est faible, on pourra supposer la force résultant de ce phénomène proportionnelle à δ', puisqu'elle est nulle pour $\delta' = 0$.

Nous supposerons cette force égale à

$$m' X \delta'$$

m' étant un coefficient que nous considérons comme constant pour un projectile donné, tout au moins entre certaines limites de la vitesse.

Cette force ne passera généralement pas par le centre de figure, elle rencontrera l'axe de figure à une distance $l' R$ du centre de figure C, l' étant considéré comme positif si ce point de rencontre est situé entre le point C et la pointe du projectile et comme négatif s'il est situé entre le point C et le culot.

Ceci posé, soit Gz la parallèle à l'axe de figure menée par le centre de gravité G, GT la tangente à la trajectoire du point G, Gx la perpendiculaire à Gz dans le plan zGT, Gy la perpendiculaire au plan zGx, Gz_1 l'axe de figure et φ l'angle CGx. Désignons de plus par δ l'angle TGz de la parallèle Gz à l'axe de figure passant par G avec la vitesse GT du centre de gravité et enfin par p, q, r les composantes de la rotation instantanée, suivant Gx, Gy, Gz.

Les composantes de la vitesse du point C suivant Gx, Gy, Gz seront alors, si v désigne la vitesse du centre de gravité (¹),

$$v \sin \delta - ra \sin \varphi, \quad ra \cos \varphi, \quad v \cos \delta + pa \sin \varphi - qa \cos \varphi,$$

p et q sont, ainsi que nous le verrons, de l'ordre de $r\delta$, et comme a est supposé très petit, nous admettons que nous pouvons négliger les termes en ap et aq et prendre par suite pour les composantes de la vitesse

$$v \sin \delta - ra \sin \varphi, \quad ra \cos \varphi, \quad v \cos \delta.$$

(¹) Les coordonnées de C sont $a \cos \varphi$, $a \sin \varphi$, 0, puisque $GC = a$ par hypothèse.

Nous aurons alors pour la vitesse w de C

$$w^2 = v^2 - 2vra \sin \varphi \sin \delta + r^2a^2$$

d'où

$$w = v\left(1 - 2\frac{ra}{v} \sin \varphi \sin \delta + \frac{r^2a^2}{v^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais si γ est l'inclinaison finale des rayures et R le rayon du projectile, on a sensiblement, ainsi que nous le verrons,

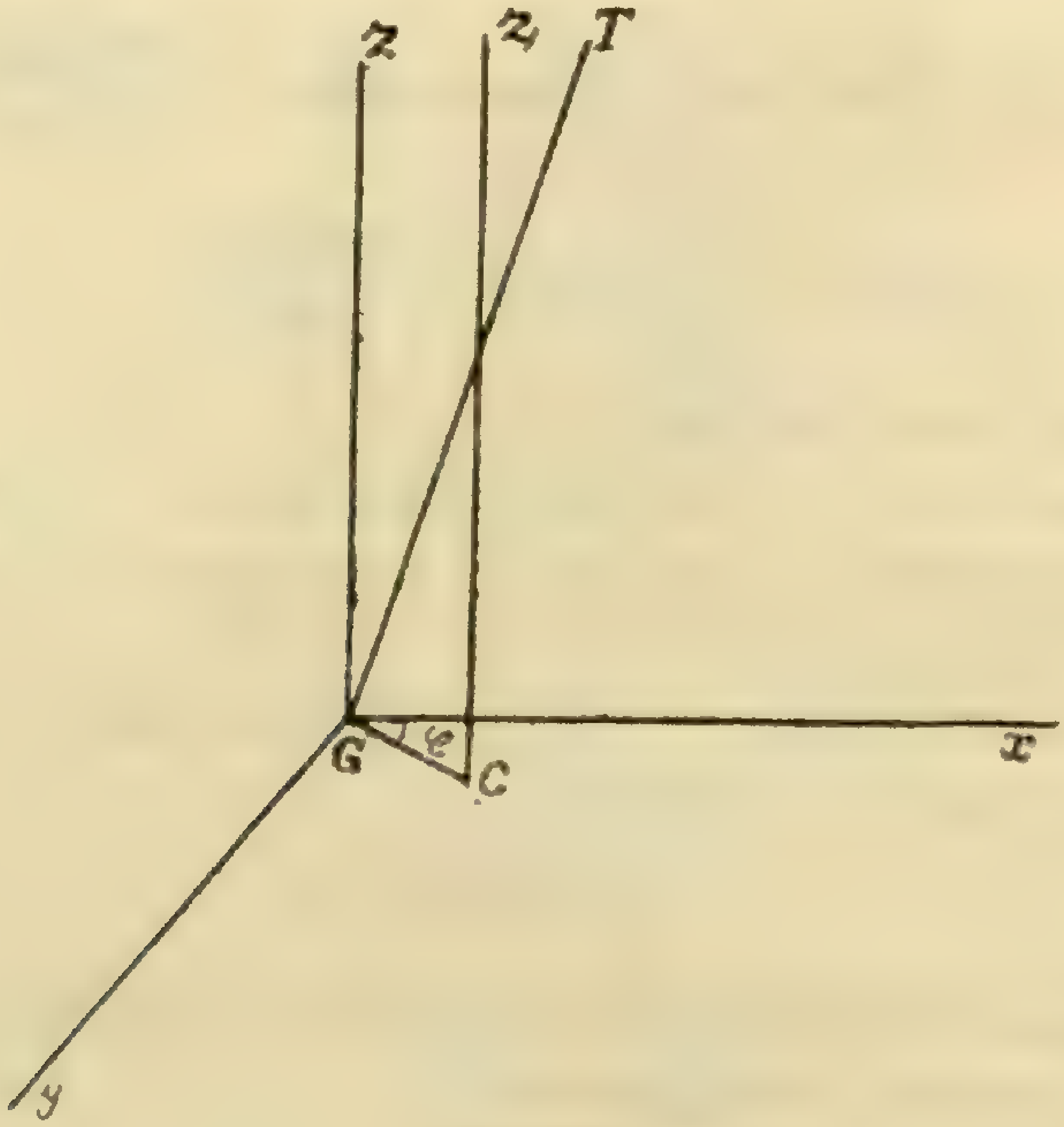


Fig. 2

$$r = \omega = \frac{v_0 \operatorname{tg} \gamma}{R}$$

de sorte que

$$\frac{ra \sin \delta}{v} = \frac{a}{R} \frac{v_0 \operatorname{tg} \gamma \sin \delta}{v}, \qquad \frac{r^2a^2}{v^2} = \frac{a^2}{R^2} \frac{v_0{}^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{v^2}$$

or $v_0 \operatorname{tg} \gamma$ reste en général toujours inférieur à v et $\frac{a}{R}$ est assez petit pour que l'on puisse négliger $\frac{a^2}{R^2}$ et $\frac{a\delta}{R}$ devant l'unité. On est donc conduit à prendre simplement

$$w = v.$$

On aura alors en égalant les deux expressions des composantes de la vitesse de C suivant Gx et Gy et désignant par ϵ l'angle du plan passant par Cz_1, et la vitesse de C avec le plan zGx, et comme plus haut par δ' l'angle de la vitesse de C avec Cz_1

$$v \sin \delta' \cos \epsilon = v \sin \delta - ra \sin \varphi$$

$$v \sin \delta' \sin \epsilon = ra \cos \varphi$$

d'où

$$\sin \delta' \cos \epsilon = \sin \delta - \frac{ra}{v} \sin \varphi = \sin \delta - \frac{av_0 \operatorname{tg} \gamma}{\mathrm{R}v} \sin \varphi$$

$$\sin \delta' \sin \epsilon = \frac{ra}{v} \cos \varphi = \frac{av_0 \operatorname{tg} \gamma}{\mathrm{R}v} \cos \varphi.$$

Le projectile sera donc soumis :

1° Suivant son axe de figure Cz_1 à une force $-\mathrm{X}'$ résultante de la pression dynamique à l'avant du projectile et du vide partiel à l'arrière ;

2° Perpendiculairement à Cz_1 dans un plan faisant l'angle ϵ avec zGx et passant par Cz_1 à la force

$$\mathrm{Y} = m\mathrm{X}\delta'$$

force appliquée à la distance lR au-dessus (¹) du plan xGy.

Cette force aura une composante (²)

$$-m\mathrm{X}\delta' \cos \epsilon = -m\mathrm{X}\left(\delta - \frac{av_0 \operatorname{tg} \gamma \sin \varphi}{v\mathrm{R}}\right)$$

parallèle à Gx, et une composante

$$-m\mathrm{X}\delta' \sin \epsilon = -m\mathrm{X}\,\frac{av_0 \operatorname{tg} \gamma \cos \varphi}{v\mathrm{R}}$$

parallèle à Gy ;

3° Perpendiculairement à Cz_1, mais dans un plan faisant un angle $\frac{\pi}{2} + \epsilon$ avec zGx (si la rotation du projectile a lieu de gauche à droite) on aura la force due à l'effet de Magnus

$$m'\mathrm{X}\delta'.$$

(¹) Entre le point C et la pointe du projectile.

(²) En remplaçant sin δ par δ.

Cette force aura une composante

$$m'X\delta' \cos \epsilon = m'X\left(\delta - \frac{av_0}{Rv} \operatorname{tg} \gamma \sin \varphi\right)$$

parallèle à Gy, et une composante

$$-m'X\delta' \sin \epsilon = -m'X \frac{av_0}{vR} \operatorname{tg} \gamma \cos \varphi$$

parallèle à Gx.

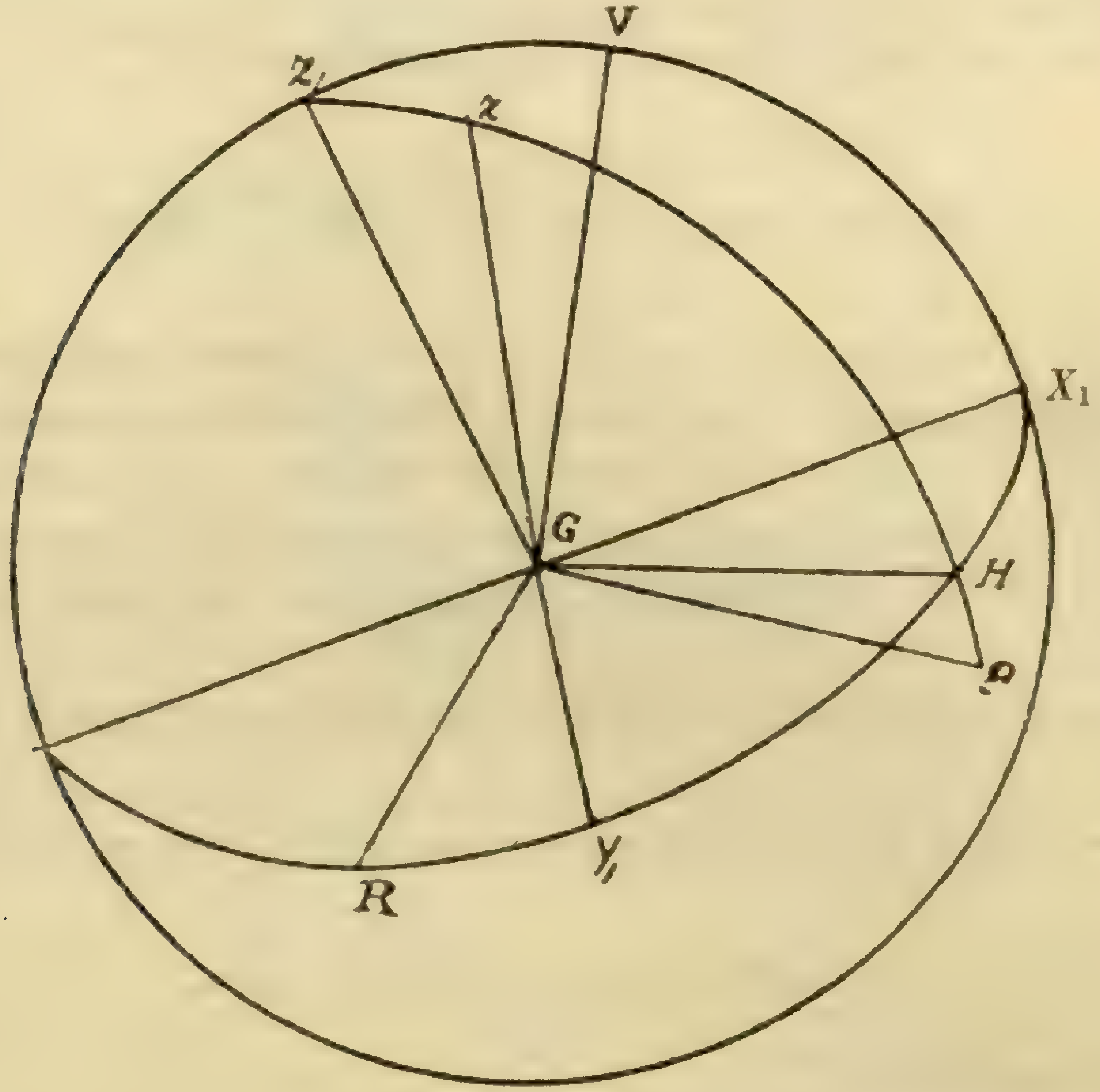


Fig. 3

Soit maintenant GV la verticale ascendante passant par le centre de gravité G, Gz_1 la tangente à la trajectoire de G, GX_1 la perpendiculaire à cette droite dans le plan VGz_1, GY_1 la perpendiculaire au plan VGz_1, Gz la parallèle à l'axe de figure, GH la projection de Gz sur le plan X_1GY_1, GR la trace du plan perpendiculaire à Gz sur le plan X_1GY_1, GQ la perpendiculaire à GR dans le plan perpendiculaire à Gz mené par G (¹). L'angle z_1Gz sera alors l'angle δ

(¹) C'est aussi l'intersection avec le plan z_1Gz du plan perpendiculaire à Gz mené par G.

et nous désignerons par v l'angle du plan z_1Gz avec le plan VGz_1, angle qui est aussi égal aux angles X_1GH et Y_1GR.

Nous aurons, d'après ce que nous avons vu pour la somme des moments des forces extérieures par rapport aux droites GQ, GR et Gz (qui par rapport aux axes que nous avions considérées dans la figure 2 sont les directions de $-$ Gx, $-$ Gy et Gz),

$$X'a \sin\varphi - mXl\frac{av_0}{v}\operatorname{tg}\gamma\cos\varphi + m'Xl'\left(\delta R - \frac{av_0}{v}\operatorname{tg}\gamma\sin\varphi\right)$$

$$-X'a\cos\varphi + mXl\left(\delta R - \frac{av_0}{v}\operatorname{tg}\gamma\sin\varphi\right) + m'Xl'\frac{av_0}{v}\operatorname{tg}\gamma\cos\varphi$$

$$aX\delta(m\sin\varphi + m'\cos\varphi) - mX\frac{a^2v_0}{vR}\operatorname{tg}\gamma.$$

Toutefois, vu la petitesse de a et de δ, nous négligerons les termes en a^2 et en $a\delta$, nous serons donc conduit à considérer la somme des moments de forces par rapport à Gz comme nuls. Calculons maintenant la somme des moments de forces par rapport à GX_1 et GY_1 en négligeant comme plus haut les termes en a^2, $a\delta$ et δ^2.

Nous aurons pour la somme des moments par rapport à GX_1 (¹)

$$\left(aX' - m'Xl'\frac{av_0}{v}\operatorname{tg}\gamma\right)\sin(\varphi+\nu) - mXl\frac{av_0}{v}\operatorname{tg}\gamma\cos(\nu+\varphi)$$

$$-\,mXRl\delta\sin\nu + m'XRl'\delta\cos\nu,$$

puis par rapport à GY_1

$$-\left(aX' - m'Xl'\frac{av_0}{v}\operatorname{tg}\gamma\right)\cos(\varphi+\nu) - mXl\frac{av_0}{v}\operatorname{tg}\gamma\sin(\varphi+\nu)$$

$$+\,mXRl\delta\cos\nu + m'XRl'\delta\sin\nu,$$

de plus, comme nous venons de le faire remarquer, la somme des moments de forces par rapport à Gz est nulle si nous négligeons les termes en $a\delta$ et en a^2.

(¹) En remarquant que $QGH = \delta$ et $HGX_1 = RGY_1 = v$.

Soit maintenant A, B, C les moments d'inertie principaux pour le centre de gravité G. Du moment que nous supposons les imperfections du projectile très faibles, il y a un axe principal très voisin de la parallèle à l'axe de figure mené par G. Nous désignerons par C le moment d'inertie principal correspondant et par ϵ l'angle que cet axe principal fait avec la parallèle à l'axe de figure mené par G. Soit A et B les deux autres moments d'inertie principaux pour le point G, on aura

$$B = A + \alpha$$

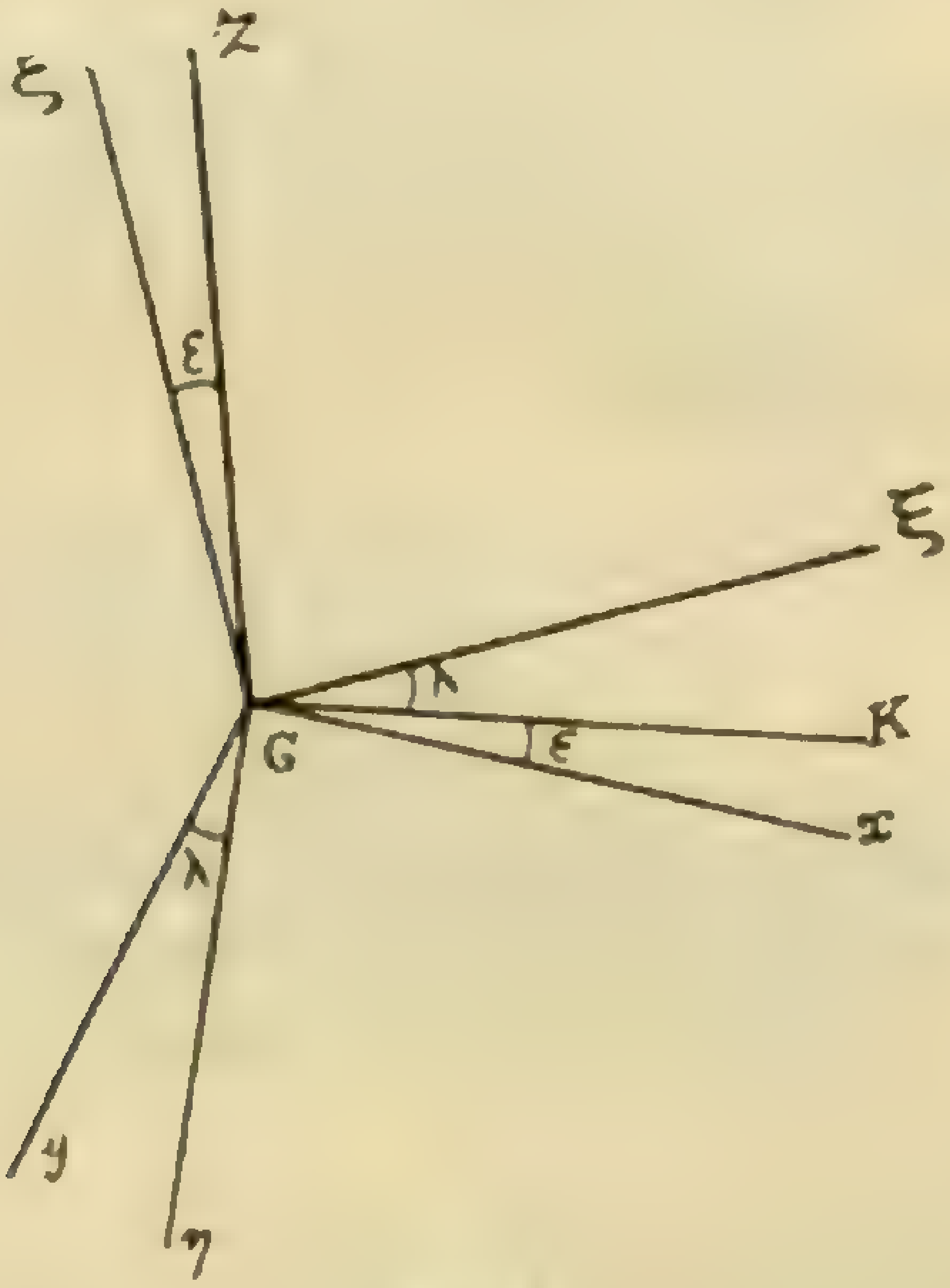


Fig 4.

α étant très petit puisque le projectile diffère très peu d'un solide de révolution.

Désignons donc (fig. 4) par $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ les axes principaux d'inertie pour le point G, $G\zeta$ étant l'axe très voisin de la parallèle Gz à l'axe de figure et qui fait l'angle ϵ avec cette droite, Gy la trace du plan perpendiculaire à Gz sur le plan $\xi G\eta$, λ l'angle de cette trace avec $G\eta$, Gx (1) la perpendiculaire au plan zGy et GK sa projection sur le plan $\xi G\eta$. On a par suite

---

(1) La direction Gx considérée ici ne doit point être confondue avec celle dont il a été question dans la figure 2.

$$KG\xi = \lambda \quad \text{et} \quad KGx = \epsilon.$$

L'équation de l'ellipsoïde d'inertie par rapport aux axes $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ est

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1.$$

On a d'ailleurs

$$\xi = x \cos\epsilon \cos\lambda - y \sin\lambda + z \sin\epsilon \cos\lambda$$
$$\eta = x \cos\epsilon \sin\lambda + y \cos\lambda + z \sin\epsilon \sin\lambda$$
$$\zeta = z \cos\epsilon - x \sin\epsilon.$$

Nous supposons de plus α et ϵ assez petits pour que nous puissions négliger les termes en α^2, ϵ^2 et $\alpha\epsilon$; nous aurons alors, avec cette approximation pour l'équation de l'ellipsoïde d'inertie par rapport aux axes Gx, Gy, Gz

$$(A + \alpha \sin^2\lambda)x^2 + (A + \alpha \cos^2\lambda)y^2 + Cz^2 + 2(A - C)\epsilon xz$$
$$+ 2\alpha \sin\lambda \cos\lambda xy = 1.$$

Si alors p, q, r sont les composantes de la rotation instantanée suivant Gx, Gy, Gz la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à ces trois axes sera, en vertu d'une formule connue,

$$(A + \alpha \sin^2\lambda)p + (A - C)r\epsilon + \alpha \sin\lambda \cos\lambda q$$
$$(A + \alpha \cos^2\lambda)q + \alpha \sin\lambda \cos\lambda p$$
$$Cr + (A - C)\epsilon p.$$

De plus, ainsi que nous le verrons, p et q contiennent δ en facteur et sont de l'ordre de $r\delta$; si donc nous négligeons les termes en $\alpha\delta$ et $\epsilon\delta$, nous aurons pour la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à Gx, Gy et Gz

$$Ap + (A - C)r\epsilon$$
$$Aq$$
$$Cr.$$

Mais si à l'instant initial, dans le plan perpendiculaire à Gz, la ligne Gx de la figure 4 fait avec la ligne GQ de la figure 3 l'angle $\varphi_0 + b$, ces deux lignes feront entre elles à un instant quelconque l'angle $\varphi + b$ (1). On aura par suite pour la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à GQ et à GR

$$[Ap + (A - C)r\epsilon]\cos(\varphi + b) - Aq\sin(\varphi + b)$$
$$[Ap + (A - C)r\epsilon]\sin(\varphi + b) + Aq\cos(\varphi + b).$$

D'ailleurs le projectile est animé des rotations φ' autour de Oz, δ' autour de OR, ν' autour de Oz_1 et θ' autour de OY_1, de sorte qu'en négligeant les termes en δ^2 nous aurons

$$p = (\delta' + \theta'\cos\nu)\sin(\varphi + b) - (\nu'\delta - \theta'\sin\nu)\cos(\varphi + b)$$
$$q = (\delta' + \theta'\cos\nu)\cos(\varphi + b) + (\nu'\delta - \theta'\sin\nu)\sin(\varphi + b)$$
$$r = \nu' + \varphi' + \theta'\delta\sin\nu \text{ (2)}.$$

On en déduit pour la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à GQ et GR

$$-A(\nu'\delta - \theta'\sin\nu) + (A - C)r\epsilon\cos(\varphi + b)$$
$$A(\delta' + \theta'\cos\nu) + (A - C)r\epsilon\sin(\varphi + b)$$

puis pour la même somme par rapport à GH

$$Cr\delta - A(\nu'\delta - \theta'\sin\nu) + (A - C)r\epsilon\cos(\varphi + b).$$

On conclut enfin de ce qui précède pour la somme des moments des quantités de mouvement, suivant GX_1 et GY_1

$$Cr\delta\cos\nu - A(\nu'\delta\cos\nu + \delta'\sin\nu) + (A - C)r\epsilon\cos(\varphi + \nu + b)$$
$$Cr\delta\sin\nu - A(\nu'\delta\sin\nu - \delta'\cos\nu) + (A - C)r\epsilon\sin(\varphi + \nu + b) + A\theta'.$$

---

(1) Puisque φ est l'angle dont le solide a tourné autour de Gz par rapport au plan zGQ.

(2) Le plan z_1GV tourne en réalité autour de GV avec une vitesse η' si on désigne, pour un instant, par η l'angle de ce plan avec le plan de tir, mais cet angle η est toujours très petit par rapport à θ, de sorte que l'on peut négliger η' devant les autres rotations.

Si nous posons de plus

$$\delta_1 = \delta \sin \nu, \qquad \delta_2 = \delta \cos \nu$$

ces moments que je désigne par σ_x et σ_y devriendront

$$\sigma_x = Cr\delta_2 - A\delta'_1 + (A - C)r\epsilon \cos(\varphi + \nu + b)$$
$$\sigma_y = Cr\delta_1 + A\delta'_2 + (A - C)r\epsilon \sin(\varphi + \nu + b) + A\theta'.$$

Quant à la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à Gz, elle est, comme nous l'avons vu plus haut,

$$\sigma_z = Cr.$$

Si de plus M_x, M_y, M_z sont la somme des moments des forces extérieures par rapport à GX_1, GY_1 et Gz, on a, comme nous l'avons vu,

$$M_x = \left(aX' - m'Xl' \frac{av_0}{v} \operatorname{tg} \gamma\right) \sin(\varphi + \nu)$$

$$- mXl \frac{av_0}{v} \operatorname{tg} \gamma \cos(\nu + \varphi) - mXRl\delta \sin \nu + m'XRl'\delta \cos \nu$$

$$M_y = -\left(aX' - m'Xl' \frac{av_0}{v} \operatorname{tg} \gamma\right) \cos(\varphi + \nu)$$

$$- mXl \frac{av_0}{v} \operatorname{tg} \gamma \sin(\varphi + \nu) + mXRl\delta \cos \nu + m'XRl'\delta \sin \nu$$

$$M_z = aX\delta(m \sin \varphi + m' \cos \varphi) - mX \frac{a^2 v_0}{rR} \operatorname{tg} \gamma.$$

Mais comme nous avons supposé a et δ assez petits pour que l'on puisse négliger les termes en $a\delta$, nous pourrons, comme nous l'avons dit, prendre

$$M_z = 0.$$

Nous aurons par suite pour l'équation de la vitesse de l'extrémité de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement suivant Gz (¹)

(¹) En considérant le système Gx, Gy, Gz pour lequel les composantes de la

$$C\frac{dr}{dt} - (A - C)qr\epsilon = 0,$$

équation qui, avec l'approximation adoptée, se réduit à

$$C\frac{dr}{dt} = 0,$$

et donne par suite, ω désignant une constante

$$r = \omega = \frac{v_0}{R}\operatorname{tg}\gamma. \tag{1}$$

Remarquons maintenant que le mouvement d'entraînement du système $GX_1Y_1z_1$ se réduit à une rotation θ' autour de GY_1, en négligeant, comme nous l'avons fait plus haut, la rotation beaucoup plus faible autour de la verticale GV. Nous aurons alors, en vertu du théorème de la vitesse de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement suivant GX_1 et GY_1

$$\begin{aligned} &\frac{d\sigma_x}{dt} + \theta'\sigma_{z_1} = M_x \\ &\frac{d\sigma_y}{dt} = M_y \end{aligned} \tag{2}$$

où σ_{z_1} désigne la somme des moments des quantités de mouvement suivant Gz_1, mais si nous remarquons, comme nous l'avons déjà fait, que p et q sont de l'ordre de $r\delta$, nous aurons avec la même approximation que dans ce qui précède

$$\sigma_{z_1} = Cr = C\omega.$$

Nous pourrons alors réunir les deux équations (2) dans la suivante (¹) :

$$\frac{d(\sigma_y - i\sigma_x)}{dt} - Ci\omega\theta' = M_y - iM_x. \tag{3}$$

---

rotation sont p, q, r et la somme des moments des quantités de mouvement $Ap + (A - C)r\epsilon$, Aq, Cr.

(¹) Où $i = \sqrt{-1}$.

Mais

$$\sigma_y - i\sigma_x = \mathrm{A}(\delta'_2 + i\delta'_1) - \mathrm{C}i\omega(\delta_2 + i\delta_1)$$
$$+ \mathrm{A}\theta' - (\mathrm{A} - \mathrm{C})\omega i\epsilon e^{(b + \varphi + \nu)i}$$

$$\mathrm{M}_y - i\mathrm{M}_x = -\left(a\mathrm{X}' - m'\mathrm{X}l' \frac{av_0}{v} \operatorname{tg} \gamma\right) e^{(\varphi + \nu)i}$$

$$+ m\mathrm{X}li \frac{av_0}{v} \operatorname{tg} \gamma e^{(\varphi + \nu)i} + m\mathrm{XR}l(\delta_2 + i\delta_1) - m'\mathrm{XR}l'i(\delta_2 + i\delta_1),$$

de sorte que si l'on pose

$$z = \delta_2 + i\delta_1$$

l'équation (3) deviendra (1)

$$\mathrm{A}\frac{d^2z}{dt} - \mathrm{C}i\omega\frac{dz}{dt} + \mathrm{A}\frac{d^2\theta}{dt^2} + (\mathrm{A} - \mathrm{C})\omega^2\epsilon e^{(b + \varphi + \nu)i} - \mathrm{C}i\omega\theta' =$$

$$-\left[a\mathrm{X}' - \mathrm{X}(mli + m'l')\frac{av_0}{v} \operatorname{tg} \gamma\right] e^{(\varphi + \nu)} + \mathrm{RX}(ml - m'l'i)z.$$

Posons maintenant

$$\frac{\mathrm{C}\omega}{\mathrm{A}} = 2s, \quad \frac{\mathrm{R}ml\mathrm{X}_0}{\mathrm{A}} = \mathrm{H}s^2, \quad \mathrm{X}' = \lambda\mathrm{X}, \quad m'l' = hml \ (2)$$

où X_0 est la valeur initiale de X ; tenons compte de ce que

$$\omega = \frac{v_0 \operatorname{tg} \gamma}{\mathrm{R}}$$

et remplaçons de plus $\omega + \nu$ par ωt (3), nous aurons en fin de compte

---

(1) On a en effet

$$\omega = \varphi' + \nu' \cos \delta + \theta' \sin \delta \sin \nu$$

et par suite avec l'approximation convenue

$$\epsilon(\varphi' + \nu') = \omega\epsilon.$$

(2) h comme λ peuvent ne pas être indépendants de la vitesse.

(3) Ce qui est permis, d'après ce que nous avons vu, $\varphi + \nu$ ne figurant que dans des termes de correction moins importants que les autres.

$$
(4)\quad \begin{aligned}
&\frac{d^2z}{dt^2} - 2si\frac{dz}{dt} - \mathrm{H}s^2\left(1 - hi\right)\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{X}_0}z = 2si\theta' - \theta''\\
&-\frac{\mathrm{H}s^2\mathrm{X}}{\mathrm{X}_0}\left[\frac{a\lambda}{\mathrm{R}ml} - (i+h)\frac{a\omega}{v}\right]e^{\omega it} - \frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\omega^2\epsilon e^{i(\omega t+b)}.
\end{aligned}
$$

Considérons d'abord l'équation sans second membre

$$
(5)\qquad \frac{d^2z}{dt^2} - 2si\frac{dz}{dt} - \mathrm{H}s^2\left(1 - hi\right)\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{X}_0}z = 0,
$$

équation dans laquelle, si la vitesse initiale est grande, s est un grand nombre et où au lieu de cela H doit, ainsi que nous le verrons, être plus petit que *un* sans être cependant très petit.

Posons dans cette équation

$$
z = e^{su}\zeta
$$

d'où, u' désignant la dérivée de u,

$$
\frac{dz}{dt} = \left(\frac{d\zeta}{dt} + su'\zeta\right)e^{su}
$$

$$
\frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2su'\frac{d\zeta}{dt} + s^2u'^2\zeta + su''\zeta\right)e^{su}
$$

elle deviendra

$$
(6)\quad \begin{aligned}
&\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2s\left(u' - i\right)\frac{d\zeta}{dt}\\
&+ s\left[u'' + s\left\{u'^2 - 2iu' - \mathrm{H}\left(1 - hi\right)\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{X}_0}\right\}\right]\zeta = 0.
\end{aligned}
$$

Prenons maintenant

$$
(7)\qquad u'^2 - 2iu' - \mathrm{H}(1 - hi)\,\varphi(v) = 0
$$

où nous avons posé

$$
\varphi(v) = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{X}_0}\cdot
$$

On en déduit

$$
(7')\qquad u' = i(1 + \xi), \qquad \text{d'où } u'' = i\xi'
$$

en posant

$$\xi = \pm \sqrt{1 - \mathrm{H}(1 - hi)\,\varphi(v)}.$$

L'équation (6) se réduira alors

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2si\xi\frac{d\zeta}{dt} + si\xi'\zeta = 0. \tag{8}$$

Cherchons maintenant une intégrale approchée de l'équation (8) en nous fondant sur ce que s est très grand et posant

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{\zeta_1}{s} + \frac{\zeta_2}{s_2}.$$

Substituons cette valeur dans le premier membre de (8) et égalons à zéro les coefficients des différentes puissances de s, nous aurons

$$2\xi\frac{d\zeta_0}{dt} + \xi'\zeta_0 = 0$$

$$2\xi\frac{d\zeta_1}{dt} + \xi'\zeta_1 = i\frac{d^2\zeta_0}{dt}$$

$$2\xi\frac{d\zeta_2}{dt} + \xi'\zeta_2 = i\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}.$$

Ce qui peut s'écrire

$$2\sqrt{\xi}\,\frac{d(\zeta_0\sqrt{\xi})}{dt} = 0$$

$$2\sqrt{\xi}\,\frac{d(\zeta_1\sqrt{\xi})}{dt} = i\frac{d^2\zeta_0}{dt_1}$$

$$2\sqrt{\xi}\,\frac{d(\zeta_2\sqrt{\xi})}{dt} = i\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}$$

et permettra de calculer successivement ζ_0, ζ_1, ζ_2.

Toutefois s sera en général assez grand pour que l'on puisse se borner au premier terme et prendre, M désignant une constante,

$$\zeta = \zeta_0 = \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{\xi}}$$

On en déduira

$$z = \frac{M}{\sqrt{\xi}} e^{su}$$

mais (7') nous donne

$$u = i\,(t + \int \xi\,dt)$$

donc

$$z = \frac{M}{\sqrt{\xi}} e^{si(t + \int \xi dt)}$$

De plus, h est très petit par rapport à l'unité, car le couple dû à l'influence du phénomène de Magnus est très faible par rapport à celui provenant de la pression dynamique sur la partie antérieure du projectile, on pourra donc négliger les termes en h^2 dans ξ et prendre

$$\xi = \pm \sqrt{1 - H\,(1 - hi)\,\varphi(v)} = \pm \left[\eta + \frac{1}{2} Hhi\,\eta_1\right]$$

où on a posé

$$\eta = \sqrt{1 - H\varphi(v)} \tag{10}$$

$$\eta_1 = \frac{\varphi(v)}{\sqrt{1 - H\varphi(v)}} \tag{11}$$

En prenant donc successivement le signe + et le signe — dans ξ, on aura deux intégrales particulières de l'équation (5). On a d'ailleurs avec la même approximation

$$\frac{1}{\sqrt{\pm \xi}} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left(1 - \frac{Hhi}{4} \frac{\eta_1}{\eta}\right) \tag{12}$$

de sorte que l'on aura en définitive pour l'intégrale de l'équation sans second membre (5)

$$z = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left(1 - \frac{Hhi}{4} \frac{\eta_1}{\eta}\right) \left[M e^{s[i(t + \int \eta dt) - \frac{Hh}{2} \int \eta_1 dt]} + N e^{s[i(t - \int \eta dt) + \frac{Hh}{2} \int \eta_1 dt]} \right] \tag{13}$$

où M et N sont deux constantes arbitraires.

Nous allons maintenant chercher une intégrale particulière de l'équation complète (4).

Pour cela nous remarquons que si on a une équation différentielle linéaire de le forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = F_1(t) + F_2(t) \tag{14}$$

où a et b sont des fonctions quelconques de t, et que x_1 soit une solution particulière de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = F_1(t)$$

et x_2 une solution particulière de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = F_2(t)$$

L'équation (14) admettra, comme solution particulière (¹)

$$x = x_1 + x_2$$

Par suite, au lieu de l'équation (4) nous considérons les deux équations

$$\frac{d^2z}{dt^2} - 2si\frac{dz}{dt} - Hs^2(1 - hi)\,\varphi(v)\,z = 2si\,\theta' - \theta'' \tag{15}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} - 2si\frac{dz}{dt} - Hs^2(1 - hi)\,\varphi(v)\,z \tag{16}$$

$$= - Hs^2\,\varphi(v)\left[\frac{a\lambda}{Rml} - (i + h)\frac{a\omega}{v}\right]e^{\omega it} - \frac{A - C}{A}\omega^2\epsilon e^{i(\omega t + b)}$$

Occupons-nous d'abord de l'équation (15). Si on néglige dans une première approximation, l'influence du mouvement du projectile autour de son centre de gravité sur le mouvement de translation de ce point, on aura comme première approximation

---

(¹) Il suffit de faire la substitution pour vérifier le fait.

$$\theta' = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = -\frac{g\cos\theta}{v}$$

d'où

$$\theta'' = \frac{g\sin\theta}{v}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g\cos\theta}{v^2}\frac{dv}{dt}$$

Mais on a

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\theta - \frac{F(v)}{c}$$ (1)

On en déduit

$$\theta'' = -\frac{g\cos\theta}{v}\left[\frac{2g\sin\theta}{v} + \frac{F(v)}{cv}\right].$$

Or en se reportant aux valeurs de $F(v)$ on reconnaîtra que θ'' est en général plus petit que θ', pour les projectiles usuels et qu'en tout cas il ne saurait lui être notablement supérieur, comme nous supposons s très grand, il en résulte que θ'' pourra être négligé devant $s\theta'$ et que l'on pourra par suite réduire l'équation (15) à la suivante :

$$\frac{d^2z}{dt^2} - 2si\frac{dz}{dt} - Hs^2(1-hi)\varphi(v)z = -\frac{2sig\cos\theta}{v}$$

Cherchons alors une intégrale approchée de la forme

$$z = \frac{z_1}{s} + \frac{z_2}{s^2} +$$

Substituant et égalant à zéro les coefficients des puissances semblables de s dans les deux membres, nous aurons

$$H(1-hi)\varphi(v)z_1 = \frac{2ig\cos\theta}{v}$$

$$2i\frac{dz_1}{dt} + H(1-hi)\varphi(v)z_2 = 0$$

d'où

---

(1) $c = \frac{1}{\Delta j} \cdot \frac{p}{1000a_2}$ où p est le poids du projectile en kilogrammes, a son diamètre en mètres, Δ la densité de l'air dans les conditions de l'expérience, j l'indice balistique du projectile. De plus pour $v > 290^m$ on peut prendre

$$F(v) = 0{,}362v - 93{,}2.$$

$$z_1 = \frac{2ig\cos\theta}{Hv(1-hi)\varphi(v)}$$

$$z_2 = \frac{-2i}{H(1-hi)\varphi(v)}\,\frac{dz_1}{dt}$$

Mais en général s sera assez grand pour que l'on puisse négliger $\frac{z_2}{s^2}$ devant $\frac{z_1}{s}$ et prendre par suite, en se bornant au premier terme,

$$z = \frac{2ig\cos\theta}{Hvs(1-hi)\varphi(v)}$$

ou en négligeant les termes en h^2, ce qui sera en général permis

$$z = \frac{2(i-h)g\cos\theta}{Hvs\varphi(v)}$$

Reste à trouver une intégrale particulière de l'équation (16). Pour cela nous poserons d'abord

$$z = e^{\omega it}u$$

cette équation deviendra alors

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2i(\omega - s)\frac{du}{dt} - \left[\omega^2 - 2s\omega + Hs^2(1-hi)\varphi(v)\right]u$$
$$= -Hs^2\varphi(v)\left[\frac{a\lambda}{Rml} - (i+h)\frac{a\omega}{v}\right] - \frac{A-C}{A}\omega^2\epsilon e^{bt}$$

Mais la relation

$$s = \frac{C\omega}{2A}$$

donne

$$\omega^2 - 2s\omega = \frac{A-C}{A}\omega^2$$

de sorte que si nous négligeons les termes en $\frac{1}{\omega}$ dans u qui à cause de la petitesse de a et de ϵ est déjà très petit, nous pourrons prendre comme intégrale particulière de l'équation précédente

$$u = \frac{\epsilon e^{bi} + \mathrm{H}\frac{\mathrm{C}^2}{4\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}\left[\frac{a\lambda}{\mathrm{R}ml} - (i+h)\frac{a\omega}{v}\right]\varphi(v)}{1 + \mathrm{H}\frac{\mathrm{C}^2}{4\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}(1-hi)\,\varphi(v)}$$

On en conclut pour l'intégrale particulière approchée de l'équation (16)

$$z = \frac{\epsilon e^{bi} + \mathrm{H}\frac{\mathrm{C}^2}{4\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}\left[\frac{a\lambda}{\mathrm{R}ml} - (i+h)\frac{a\omega}{v}\right]\varphi(v)}{1 + \mathrm{H}\frac{\mathrm{C}^2}{4\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}(1-hi)\,\varphi(v)}\,e^{\omega it}$$

d'ailleurs, ainsi que nous l'avons déjà dit, on doit supposer h très petit par rapport à l'unité, de sorte que nous pourrons négliger les termes en h là où ils ne sont pas multipliés par s. En nous bornant à cette approximation et faisant la somme des intégrales particulières des équations (15) et (16) que nous avons obtenues, nous aurons comme intégrale particulière de l'équation (4), avec l'approximation indiquée

$$z = \frac{2ig\cos\theta}{\mathrm{H}sv\varphi(v)} + \frac{\epsilon e^{bi} + \mathrm{H}\frac{\mathrm{C}^2\varphi(v)}{4\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}\left[\frac{a\lambda}{\mathrm{R}ml} - i\frac{a\omega}{v}\right]}{1 + \mathrm{H}\frac{\mathrm{C}^2}{4\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}\varphi(v)}\,e^{\omega it}$$

Par suite, l'intégrale générale de l'équation (4) sera avec la même approximation, en désignant par M et N les deux constantes arbitraires à déterminer par les conditions initiales,

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\Bigg[&\mathrm{M}e^{si[t+\int\eta dt] - \frac{s\mathrm{H}h}{2}\int\eta_1 dt} \\ (17)\qquad &+ \mathrm{N}e^{si[t-\int\eta dt] + \frac{s\mathrm{H}h}{2}\int\eta_1 dt}\Bigg] + \frac{2ig\cos\theta}{\mathrm{H}sv\varphi(v)} \\ &+ \frac{\epsilon e^{bi} + \mathrm{H}\frac{\mathrm{C}^2}{4\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}\left[\frac{a\lambda}{\mathrm{R}ml} - i\frac{\omega a}{v}\right]\varphi(v)}{1 + \mathrm{H}\frac{\mathrm{C}^2}{4\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{C})}\varphi(v)}\,e^{\omega it} \end{aligned}$$

Cette expression nous fait voir d'abord que, pour que le projectile soit stable, il faut que l'on ait

$$H < 1$$

en effet

$$\eta = \sqrt{1 - H\varphi(v)}$$

et au début $\varphi(v) = 1$, de sorte que si H était plus grand que 1, η serait purement imaginaire et par suite ηi réel, de sorte que

$$e^{si\int \eta dt}$$

deviendrait à cause du facteur s, qui est très grand, lui-même très grand. Il en serait donc de même de z et le projectile ne pourrait être stable.

Remarquons d'ailleurs que, même en supposant H plus petit que un, le projectile ne pourrait être stable si le couple de Magnus n'était pas très faible par rapport à celui situé dans le plan de la tangente et de l'axe de figure (¹), c'est-à-dire si h n'est pas très petit par rapport à l'unité. En effet, s'il en était autrement, à cause du facteur s qui est très grand, le produit shH serait grand et il en serait par suite de même suivant le signe de h de l'une des quantités

$$e^{\frac{shH}{2}\int \eta_1 dt} \quad \text{ou} \quad e^{-\frac{shH}{2}\int \eta_1 dt}$$

z ne pourrait donc rester très petit et le projectile ne serait pas stable

Or l'expérience nous apprend que, tout au moins tant que la vitesse n'est pas très réduite, les projectiles sont stables. On doit donc en conclure que la quantité h est très petite par rapport à l'unité et que, par suite, le couple de Magnus est, ainsi que nous l'avons supposé, très faible par rapport à celui dû à la pression dynamique sur l'avant du projectile.

Remarquons d'ailleurs que

$$H = \frac{RmlX_0}{As^2} = \frac{4RmlAX_0}{C^2\omega^2}$$

(¹) Et qui est dû à la pression dynamique sur l'avant du projectile.

doit, d'après ce que nous avons dit, être plus petit que un, pour que le projectile soit stable. Ceci exige que ω dont le carré figure au dénominateur soit suffisamment grand ; d'autre part, on a tout intérêt à ce que H ne soit pas une fraction trop petite, puisque cette expression figure au dénominateur du terme

$$\frac{2gi \cos \theta}{\mathrm{H} s \varphi(v)}$$

Toutefois, comme les termes m, l, X_0 qui figurent dans H sont loin d'être connus d'une façon précise, on sera toujours obligé, par précaution, de prendre pour ω une valeur telle que celle de H soit notablement inférieure à un.

Il nous faut maintenant calculer les constantes M et N.

Pour cela considérons (fig. 3), la sphère de rayon unité ayant le point G pour centre et confondons dans le voisinage du point z_1 cette sphère avec son plan tangent en z_1 (¹)

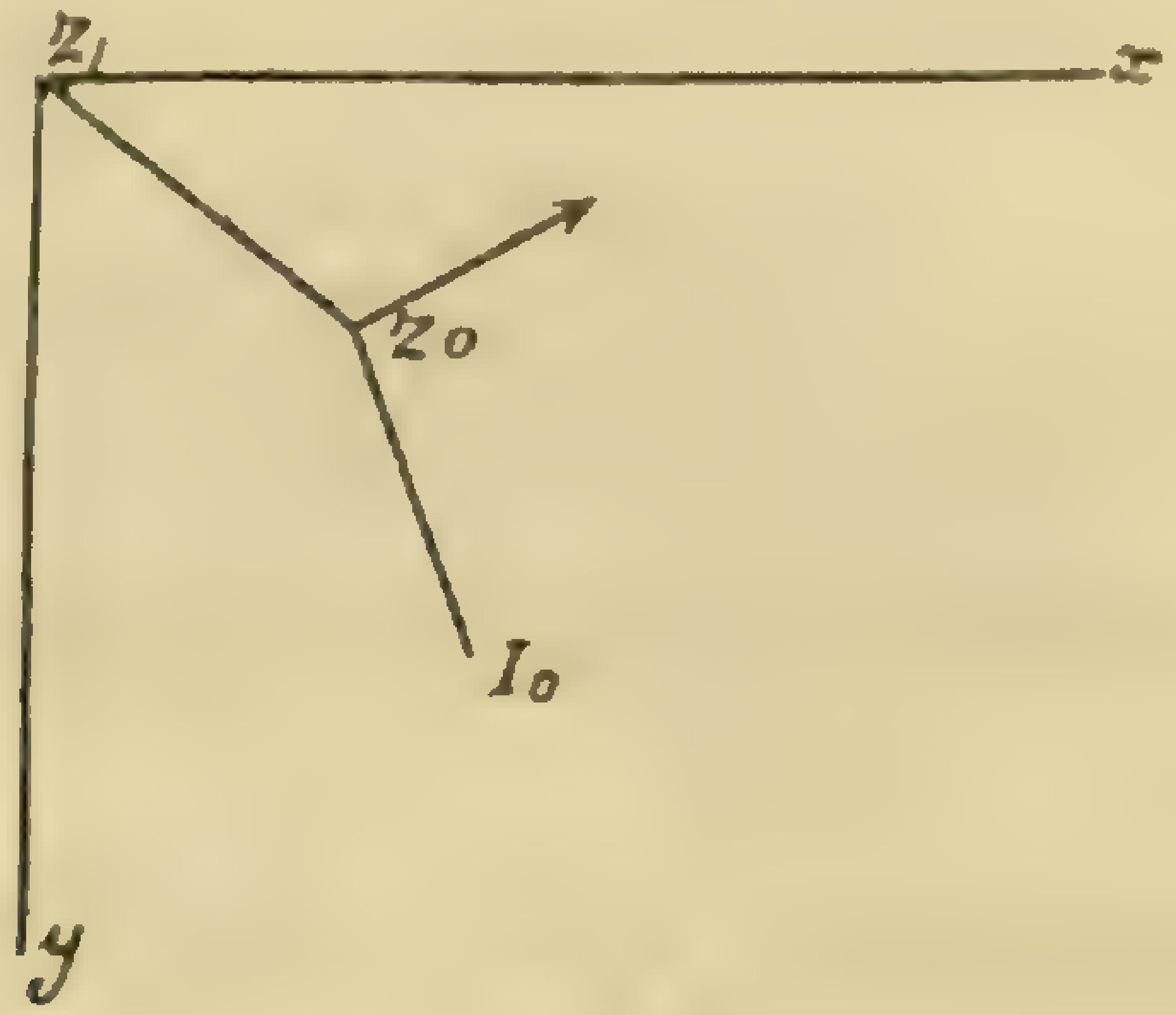


Fig. 5

$z_1 x$ sera alors la trace, sur ce plan tangent z_1, du plan du grand cercle $z_1 X_1$ fig. (5), $z_1 y$ la trace du plan $z_1 G Y_1$; z_0 sera alors le point ou à l'instant initial la parallèle à l'axe de figure menée par G perce le plan tangent en z_1, et I_0 le point où ce même plan est rencontré à l'instant initial par l'axe instantané de rotation passant par G. Je désignerai par α et β les coordonnées de z_0 et par $\alpha + \alpha'$ et $\beta + \beta'$ celles de I_0 par rapport au système d'axes $z_1 x y$, α et β

---

(1) Nous supposons en effet qu'à l'instant initial δ est très petit et l'axe instantané très voisin de la parallèle à l'axe de figure passant par G.

sont alors les valeurs initiales de δ_2 et de δ_1. Comme le mouvement du projectile autour de son centre de gravité, à l'instant initial, se réduit à une rotation de ce corps autour de l'axe GI_0, la vitesse absolue de z_0 aura pour composantes suivant z_1x et z_1y

$$\omega\beta' \quad \text{et} \quad -\omega\alpha'$$

D'ailleurs le système xz_1y a un mouvement de translation parallèle à z_1x dont la vitesse est θ', par suite, les composantes de la vitesse absolue de z suivant z_1x et z_1y sont

$$\delta'_2 + \theta' \qquad \text{et} \qquad \delta'_1$$

On a donc

$$(\delta'_2)_0 = \omega\beta' - \theta'_0 = \omega\beta' + \frac{g\cos\theta_0}{v_0}$$

$$(\delta'_1)_0 = -\omega\alpha'$$

Nous avons donc en définitive

$$z_0 = \alpha + \beta i$$

$$z'_0 = \omega(\beta' - \alpha' i) + \frac{g\cos\theta_0}{v_0}$$

En faisant donc $t = 0$ dans (17) et remarquant que $\varphi(v_0) = 1$ on aura d'abord :

$$\alpha + \beta i = \frac{\dfrac{M+N}{\sqrt{\eta_0}} + \dfrac{2ig\cos\theta_0}{Hsv_0} + \epsilon e^{bt} + H\dfrac{C^2}{4A(A-C)}\left[\dfrac{a\lambda}{Rml} - \dfrac{ia\omega}{v_0}\right]}{1 + H\dfrac{C^2}{4A(A-C)}}$$

Mais d'après le général Zaboudski, $\frac{A}{C}$ est égal à 4,45 pour le projectile de 11 pouces ayant 2,8 calibres de longueur, pour ce projectile on aurait par suite

$$\frac{C^2}{4A(A-C)} = 0{,}016$$

On pourra donc pour ces projectiles négliger $\frac{C^2}{4A(A-C)}$ devant l'unité et il en sera à plus forte raison de même pour la plupart des projectiles en service qui ont beaucoup plus de 2,8 calibres de longueur (¹).

Nous aurons alors

$$\begin{aligned} \alpha + \beta i = {} & \frac{M+N}{\sqrt{\eta_0}} + \frac{2ig\cos\theta_0}{Hsv_0} \\ (18) \qquad & + \epsilon e^{bi} + H\frac{C^2}{4A(A-C)}\left[\frac{a\lambda}{Rml} - \frac{ia\omega}{v_0}\right] \end{aligned}$$

Nous aurons ensuite en prenant la dérivée de z et en y négligeant les termes qui ne contiennent pas s ou ω en facteur devant ceux qui les contiennent, et se bornant à la même approximation que plus haut,

$$\begin{aligned} z'_0 = \omega(\beta' - \alpha' i) + \frac{g\cos\theta_0}{v_0} = {} & \frac{(M+N)si}{\sqrt{\eta_0}} \\ & + \frac{(M-N)\,s(\eta_0 i - \frac{hH}{2}\eta_1^0)}{\sqrt{\eta_0}} + \omega i\epsilon e^{bi} \\ & + H\frac{C^2}{4A(A-C)}\omega i\left[\frac{a\lambda}{Rml} - \frac{i\omega a}{v_0}\right] \end{aligned}$$

Mais, on a γ désignant l'inclinaison finale des rayures

$$\omega = \frac{v_0 \mathrm{tg}\gamma}{R}$$

d'où

$$\frac{a\lambda}{Rml} - \frac{i\omega a}{v_0} = \frac{a}{R}\left(\frac{\lambda}{ml} - i\,\mathrm{tg}\gamma\right)$$

---

(1) Si on admet que $\frac{A}{C}$ est proportionnel au carré de la longueur du projectile en calibres, ce qui ne doit pas s'éloigner beaucoup de la vérité, pour un projectile de 4 calibres de long, $\frac{A}{C}$ serait égal à $4{,}45\left(\frac{4}{2{,}8}\right)^2 = 9$ et par suite $\frac{C^2}{4A(A-C)} = \frac{1}{288} = 0{,}0035$.

Or en général on pourra négliger tg γ devant $\frac{\lambda}{ml}$, d'autant plus qu'il s'agit d'un terme multiplié par le facteur très petit $\frac{C^2}{4A(A-C)}$. De même à cause du facteur h on pourra négliger $\frac{hH}{2}\eta_1{}^0$ devant η_0 et écrire

$$(19)\quad \begin{aligned} \omega(\beta'-\alpha' i)+\frac{g\cos\theta_0}{v_0} &= \frac{M+N}{\sqrt{\eta_0}}\,si+(M-N)\sqrt{\eta_0}\,si \\ &+\omega i\epsilon e^{bi}+\omega H i\,\frac{C^2}{4A(A-C)}\,\frac{a\lambda}{Rml}. \end{aligned}$$

Nous aurons d'ailleurs avec la même approximation

$$(20)\quad \alpha+\beta i=\frac{M+N}{\sqrt{\eta_0}}+\frac{2ig\cos\theta_0}{Hsv_0}+\epsilon e^{bi}+\frac{HC^2}{4A(A-C)}\,\frac{a\lambda}{Rml}.$$

On en déduit

$$(21)\quad M+N=\sqrt{\eta_0}\left[\alpha+\beta i-\frac{2ig\cos\theta_0}{Hsv_0}-\epsilon e^{bi}-\frac{HC^2}{4A(A-C)}\,\frac{a\lambda}{Rml}\right]$$

$$(22)\quad \begin{aligned} N-M=\frac{1}{\sqrt{\eta_0}}\Bigg[\alpha+\beta i+\frac{\omega}{s}\left(\alpha'+\beta' i\right) \\ +\frac{gi\cos\theta_0}{v_0 s}\left(1-\frac{2}{H}\right)+\left(\frac{\omega}{s}-1\right)\left(\epsilon e^{bi}+\frac{HC^2}{4A(A-C)}\,\frac{a\lambda}{Rml}\right)\Bigg] \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$H=1-\eta_0{}^2$$

et par suite

$$\frac{2}{H}\left(1+\eta_0\right)-1=\frac{2}{1-\eta_0}-1=\frac{1+\eta_0}{1-\eta_0}$$

$$\frac{2}{H}\left(1-\eta_0\right)-1=\frac{2}{1+\eta_0}-1=\frac{1-\eta_0}{1+\eta_0}$$

et on déduit par suite des équations (21) et (22)

$$(23)\quad \begin{aligned} N=\frac{1+\eta_0}{2\sqrt{\eta_0}}\left[\alpha+\beta i-\frac{gi\cos\theta_0}{sv_0(1-\eta_0)}-\epsilon e^{bi}-\frac{HC^2}{4A(A-C)}\,\frac{a\lambda}{Rml}\right] \\ +\frac{\omega}{2s\sqrt{\eta_0}}\left[(\alpha'+\beta' i+\epsilon e^{bi}+\frac{HC^2}{4A(A-C)}\,\frac{a\lambda}{Rml}\right] \end{aligned}$$

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
M = &-\frac{1-\eta_0}{2\sqrt{\eta_0}}\left[(\alpha+\beta i)-\frac{gi\cos\theta_0}{sv_0(1+\eta_0)}-\epsilon e^{bi}-\frac{HC^2}{4A(A-C)}\,\frac{a\lambda}{Rml}\right]\\
&-\frac{\omega}{2s\sqrt{\eta_0}}\left[\alpha'+\beta' i+\epsilon e^{bi}+\frac{HC^2}{4A(A-C)}\,\frac{a\lambda}{Rml}\right].
\end{aligned}
$$

Ayant ainsi obtenu les valeurs de M et de N, z sera donné par la formule (17) qui, en nous bornant à l'approximation indiquée plus haut, devient

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
z = &\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left[Me^{si(t+\int\eta dt)-\frac{sHh}{2}\int\eta_1 dt}\right.\\
&\left.+Ne^{si(t-\int\eta dt)+\frac{sHh}{2}\int\eta_1 dt}\right]+\frac{2ig\cos\theta}{Hsv\varphi(v)}\\
&+\left(\epsilon e^{bi}-\frac{HC^2}{4A(A-C)}\,\frac{a\lambda}{Rml}\,\varphi(v)\right)e^{\omega it}.
\end{aligned}
$$

Cette formule fait voir que, bien que h doive, ainsi que nous l'avons dit, être supposé très petit, son influence peut malgré cela être très sensible. En effet, s étant très grand, sh peut fort bien ne pas être très petit, bien que h le soit.

Par suite, suivant le signe de h le module de

$$e^{\frac{sHh}{2}\int\eta_1 dt}$$

ou celui de

$$e^{-\frac{sHh}{2}\int\eta_1 dt}$$

peut prendre une valeur très supérieure à l'unité, tandis que ceux de

$$e^{si(t+\int\eta dt)}$$

et de

$$e^{si(t-\int\eta dt)}$$

sont toujours égaux à 1.

Supposons maintenant pour un instant qu'il s'agisse d'un projectile parfait lancé dans des conditions absolument normales, ce qui exige

$$\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = \epsilon = a = 0.$$

On aura

$$N = -\frac{gi\cos\theta_0}{2sv_0\sqrt{\eta_0}}\,\frac{1+\eta_0}{1-\eta_0}$$

$$M = \frac{gi\cos\theta_0}{2sv_0\sqrt{\eta_0}}\,\frac{1-\eta_0}{1+\eta_0}$$

et le maximum du module z (¹) pendant les premiers instants serait au plus égal à

$$\frac{|M|+|N|}{\sqrt{\eta_0}} + \frac{2g\cos\theta_0}{Hsv_0},$$

c'est-à-dire à

$$\frac{g\cos\theta_0}{2sv_0}\left[\frac{1+\eta_0}{\eta_0(1-\eta_0)} + \frac{1-\eta_0}{\eta_0(1+\eta_0)} + \frac{4}{1-\eta_0^2}\right] = \frac{g\cos\theta_0}{sv_0}\,\frac{1+\eta_0}{\eta_0(1-\eta_0)}$$

en tenant compte de ce que

$$H = 1 - \eta_0^2.$$

Cherchons quelle doit être l'inclinaison finale γ des rayures pour que cette expression soit minimum. Pour cela on a, ainsi que nous l'avons vu plus haut,

$$\omega = \frac{v_0\,\mathrm{tg}\,\gamma}{R}, \quad s = \frac{C\omega}{2A}, \quad Hs^2 = \frac{RmlX_0}{A}$$

de sorte que

$$s = \sqrt{\frac{RmlX_0}{AH}} = \frac{K}{\sqrt{1-\eta_0^2}}$$

K désignant une quantité indépendante de l'inclinaison des

(¹) Donc de δ, car on a

$$|z| = \delta.$$

rayures. Ce qu'il s'agit alors de rendre minimum c'est l'expression

$$\frac{1+\eta_0}{\eta_0}\sqrt{\frac{1+\eta_0}{1-\eta_0}} = \frac{2}{\left(1-\frac{1-\eta_0}{1+\eta_0}\right)\sqrt{\frac{1-\eta_0}{1+\eta_0}}}.$$

Si donc on pose

$$u = \sqrt{\frac{1-\eta_0}{1+\eta_0}}$$

il faut rendre maximum l'expression

$$u(1-u^2)$$

ce qui a lieu pour

$$u^2 = \frac{1}{3}.$$

Donc pour

$$\eta_0 = \frac{1}{2}.$$

ou

$$H = \frac{3}{4}.$$

On serait donc conduit pour l'inclinaison finale des rayures à la valeur qui se déduit de la relation

$$s = \frac{C\omega}{2A} = \frac{Cv_0 \operatorname{tg} \gamma}{2AR} = \sqrt{\frac{4RmlX_0}{3A}}$$

ou

$$\operatorname{tg} \gamma = 4\sqrt{\frac{AR^3mlX_0}{3C^2v_0^{\,2}}}. \tag{26}$$

Mais en réalité, parmi les coefficients qui figurent dans cette formule, plusieurs ne sont pas connus avec certitude et comme, pour que le projectile soit stable, il faut être assuré que H est inférieur à un, on sera, par mesure de prudence, obligé de prendre pour tg γ une valeur notablement plus forte, que celle que l'on déduirait de la formule (26), de sorte que H qui contient

$\mathrm{tg}^2\,\gamma$ en dénominateur aura en général une valeur assez inférieure à la valeur $\frac{3}{4}$ indiquée plus haut.

Il y a d'ailleurs une autre raison pour laquelle il y a avantage, lorsqu'il s'agit d'un projectile qui n'est pas absolument parfait, et de conditions de départ qui ne sont pas absolument régulières (ce qui sera toujours plus ou moins le cas) à prendre pour H une valeur inférieure à $\frac{3}{4}$.

Si, en effet, cette valeur semble la plus avantageuse, d'après ce que nous venons de dire, pour un projectile absolument parfait lancé dans des conditions parfaitement régulières, les valeurs (23) et (24) de M et N font voir au lieu de cela que les termes qui dépendent, soit des défectuosités du projectile, soit des irrégularités des conditions initiales, diminuent constamment avec H, elles auront donc d'autant moins d'influence que H sera plus petit.

Il faut remarquer toutefois que si les différents termes dépendant, soit des défectuosités du projectile soit des irrégularités des conditions initiales, et qui figurent dans les expressions (23) et (24) de N et de M, diminuent tous, en valeur absolue, avec H (¹), il n'en résulte pas forcément que les valeurs de N et M diminuent toujours avec H, puisque ces termes peuvent avoir des signes quelconques, mais en réduisant chacun d'eux, on est sûr que N et M ne pourront avoir eux-mêmes que des valeurs réduites.

On est conduit maintenant à distinguer deux cas suivant que

$$\frac{sHh}{2}$$

(¹) Remarquons, en effet, que η_0 croît lorsque H décroît. Par suite, lorsque H décroît, $\frac{1}{\sqrt{\eta_0}}$ et $\frac{1-\eta_0}{\sqrt{\eta_0}}$ décroissent également; de plus, si on considère l'expression $y = \frac{1+\eta_0}{\sqrt{\eta_0}}$ où $\eta_0 < 1$ et si on y pose

$$x = \sqrt{\eta_0},$$

on aura

$$y = \frac{1}{x} + x \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} + 1 < 0$$

puisque $x < 1$.

Par suite y décroît lorsque x croît de 0 à 1, donc lorque H croît.

est ou n'est pas très petit ; nous supposons en effet h très petit, puisque nous avons admis que le couple dû au phénomène de Magnus est très faible par rapport à celui dû à la pression dynamique sur la partie antérieure du projectile, mais s étant très grand (¹), il peut y avoir compensation.

Supposons d'abord $\frac{sHh}{2}$ très petit, on pourra prendre

$$e^{\pm \frac{sHh}{2} \int \eta_1 dt} = 1$$

et par suite en posant, pour simplifier l'écriture

$$u = \int_0^t \eta dt$$

on aura, en se reportant à la formule (25)

$$
\tag{27}
\begin{aligned}
z = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left[\mathrm{M} e^{si(t+u)} + \mathrm{N} e^{si(t-u)} \right] + \frac{2gi\cos\theta}{\mathrm{H}sv\varphi(v)} \\
+ \left(\epsilon e^{bi} + \frac{\mathrm{HC}^2 a\lambda\varphi(v)}{4\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{C})\mathrm{R}ml} \right) e^{\omega it}
\end{aligned}
$$

Supposons au lieu de cela que $sh\mathrm{H}$ ne soit pas très petit suivant le signe de cette quantité, l'un des deux facteurs

$$e^{\frac{sHh}{2} \int \eta_1 dt} \qquad \text{ou} \qquad e^{-\frac{sHh}{2} \int \eta_1 dt}$$

prendra assez rapidement une valeur importante, tandis que l'autre deviendra très petit.

Ce cas se subdivisera donc en deux

1° $$sh > 0$$

ce qui aura lieu si la force due au phénomène de Magnus ren-

(¹) Tout au moins tant que la vitesse initiale est grande, ce que nous supposons jusqu'ici, puisque $s = \frac{\mathrm{C}\omega}{2\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{C}v_0 \operatorname{tg} \gamma}{2\mathrm{AR}}$.

contre l'axe de figure entre le centre de gravité et la pointe du projectile.

Posons

$$u_1 = \int_0^t \eta_1 dt$$

Dans le cas qui nous occupe, on pourra, si on excepte les premiers moments, prendre

$$e^{-\frac{sHh}{2}u_1} = 0$$

et on aura par suite, sauf pour les premiers instants

$$(28)\quad \begin{aligned} z = {} & \frac{N}{\sqrt{\eta}} e^{si(t-u)} e^{\frac{sHh}{2}u_1} + \frac{2ig\cos\theta}{Hsv\varphi(v)} \\ & + \left(\epsilon e^{bi} + \frac{HC^2a\lambda\varphi(v)}{4A(A-C)Rml}\right)e^{\omega it} \end{aligned}$$

comme d'ailleurs

$$z = \delta\cos\nu + i\delta\sin\nu$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \delta\cos\nu = {} & \frac{N}{\sqrt{\eta}} e^{\frac{sHh}{2}u_1}\cos s(t-u) + \epsilon\cos(b+\omega t) \\ & + \frac{HC^2a\lambda\varphi(v)}{4A(A-C)Rml}\cos\omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\sin\nu = {} & \frac{N}{\sqrt{\eta}} e^{\frac{sHh}{2}u_1}\sin s(t-u) + \frac{2g\cos\theta}{Hsv\varphi(v)} + \epsilon\sin(b+\omega t) \\ & + \frac{HC^2a\lambda\varphi(v)}{4A(A-C)Rml}\sin\omega t. \end{aligned}$$

2° $$sh < 0$$

ce qui a lieu lorsque la force due au phénomène de Magnus rencontre l'axe entre le centre de gravité et le culot. Dans ce cas, si on excepte les premiers instants, on pourra prendre

$$e^{\frac{sHh}{2}u_1} = 0$$

et on obtiendra des formules que l'on déduira des précédentes en remplaçant $Ne^{\frac{sHh}{2}u_1}$ par $Me^{-\frac{sHh}{2}u_1}$, et u par $-u$.

Si nous nous reportons maintenant aux valeurs de M et de N, nous remarquerons que le facteur $\frac{\omega}{2s} = \frac{A}{C}$ est, pour les projectiles très allongés que l'on emploie aujourd'hui, relativement assez grand, de sorte que, parmi les irrégularités que le projectile peut présenter, soit dans sa construction, soit dans les conditions de son mouvement initial, ce sont celles provenant de l'angle que l'axe de figure fait avec l'axe principal d'inertie voisin ou avec la rotation initiale (¹), qui ont une influence prédominante. Au lieu de cela, les irrégularités provenant soit d'un angle entre la vitesse initiale et l'axe du projectile (angle qui peut être dû à l'existence d'un angle de relèvement), soit d'une légère excentricité du projectile (²), ont une influence beaucoup moindre.

Examinons maintenant ce qui se passe lorsque, ainsi que cela arrive le plus souvent, H est assez petit pour que l'on puisse, en développant les termes suivant les puissances ascendantes de cette quantité, se borner au premier terme. Nous ferons d'ailleurs ce calcul seulement pour le cas d'un projectile parfait lancé dans des conditions régulières, c'est-à-dire que nous supposons

$$\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = \epsilon = 0$$

Nous prendrons alors

$$\eta = \sqrt{1 - H\varphi(v)} = 1 - \frac{H}{2}\varphi(v)$$

$$\eta_0 = 1 - \frac{H}{2}$$

$$\eta_1 = \frac{\varphi(v)}{\sqrt{1 - H\varphi(v)}} = \varphi(v)\left(1 + \frac{H}{2}\varphi(v)\right)$$

(¹) Ce sont les termes dépendant de α', β' et ϵ.

(²) Ce sont les termes dépendant de α, β et a. Pour les termes en a, il y a lieu de remarquer que

$$\frac{\omega}{2s}\,\frac{C^2}{4A(A-C)} = \frac{C}{4(A-C)}$$ et que ce facteur est petit.

Expression d'où l'on tire

$$u = \int_0^t \eta dt = t - \frac{H}{2}\int_0^t \varphi(v)dt$$

$$u_1 = \int_0^t \eta_1 dt = \int_0^t \varphi(v)\left[1 + \frac{H}{2}\varphi(v)\right]dt$$

mais comme u_1 est multiplié par h qui est très petit et que nous supposons H lui-même petit, nous nous bornerons à prendre

$$(29) \qquad u_1 = \int_0^t \varphi(v)dt$$

et nous aurons par suite

$$(30) \qquad u = t - \frac{H}{2}u_1.$$

Nous aurons d'ailleurs dans les mêmes conditions et avec la même approximation

$$N = -\frac{gi\cos\theta_0}{2sv_0\sqrt{\eta_0}}\frac{1+\eta_0}{1-\eta_0}\,(^1) = -\frac{2gi\cos\theta_0}{sv_0 H}\left(1 - \frac{H}{4}\right)$$

$$M = \frac{gi\cos\theta_0}{2sv_0\sqrt{\eta_0}}\frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} = \frac{gi\cos\theta_0}{8sv_0}H.$$

Remarquons alors que H étant, dans le cas qui nous occupe, supposé assez petit, M sera petit par rapport à N ; On a en effet

---

(1) Pour calculer $\frac{1+\eta_0}{(1-\eta_0)\sqrt{\eta_0}}$ il faut, à cause du facteur $(1-\eta_0)$ qui introduit H en dénominateur, conserver un terme de plus dans η_0, on a alors

$$\eta_0 = \sqrt{1-H} = 1 - \frac{H}{2} - \frac{H^2}{8} \text{ et par suite } 1 - \eta_0 = \frac{H}{2}\left(1 + \frac{H}{4}\right)$$

donc

$$\frac{1+\eta_0}{(1-\eta_0)\sqrt{\eta_0}} = \frac{2\left(1-\frac{H}{4}\right)}{\frac{H}{2}\left(1+\frac{H}{4}\right)\left(1-\frac{H}{4}\right)} = \frac{4}{H}\left(1-\frac{H}{4}\right).$$

$$\left|\frac{M}{N}\right| = \frac{H^2}{16\left(1-\frac{H}{4}\right)}$$

Il en résulte que l'on pourra le plus souvent négliger M par rapport à N, si ces quantités sont multipliées par des grandeurs de même ordre. Par suite, si sh est négligeable nous pourrons en général prendre, en nous bornant à la partie principale, et remplaçant $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ par l'unité

$$(31)\qquad z = \frac{2gi\cos\theta}{Hsv\varphi(v)} - \frac{2gi\cos\theta_0}{sv_0H}\, e^{\frac{siH}{2}u_1}.$$

De même si sh n'est pas négligeable, mais qu'il soit positif, on pourra prendre dans les mêmes conditions

$$(32)\qquad z = \frac{2gi\cos\theta}{Hsv\varphi(v)} - \frac{2gi\cos\theta_0}{sv_0H}\, e^{\frac{sHh}{2}u_1}\, e^{\frac{siH}{2}u_1}.$$

Enfin si sh était négatif, sans être très petit, le terme en N deviendrait rapidement négligeable à cause du facteur

$$e^{\frac{sHh}{2}u_1}$$

mais comme d'autre part M est, dans le cas qui nous occupe, très petit, non seulement par rapport à N (¹) mais aussi par rapport aux termes non périodiques, il en résulte que dans ce cas, si sh n'a pas une valeur absolue importante, ce qui est très probable (²), les termes périodiques deviendront rapidement négligeables.

(¹) Si on suppose, par exemple $H = \frac{1}{5}$ on aura

$$\left|\frac{M}{N}\right| = \frac{20}{25.16.19} = \frac{1}{380} = 0{,}0026$$

(²) Si sh était négatif et avait une valeur absolue importante, on pourrait prendre, en exceptant les premiers instants

$$z = \frac{2gi\cos\theta}{Hsv\varphi(v)} + \frac{gi\cos\theta_0}{8sv_0}\, H\, e^{\frac{siH}{2}u_1}\, e^{-\frac{sHh}{2}u_1}$$

II

Dans ce qui précède nous avons étudié directement le mouvement de l'axe de figure; on sait que, pour cette étude, on suppose souvent l'axe de figure confondu avec l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, en se fondant sur ce que ces deux droites font généralement un angle très petit par rapport à celui de l'axe de figure avec la tangente.

Nous allons reprendre le calcul de cette façon, et en comparant les résultats auxquels nous arrivons par cette méthode avec ceux obtenus précédemment, nous verrons dans quelle mesure est acceptable l'hypothèse qui lui sert de point de départ.

Nous supposerons le projectile parfait et les conditions de départ régulières, mais en revanche nous admettrons que l'angle δ, de l'axe de figure avec la tangente, puisse ne pas rester très petit.

Le projectile est alors soumis, en conservant les notations employées plus haut, à un premier couple situé dans le plan passant par la tangente de l'axe de figure que nous représenterons par

$$\mathrm{R}ml\mathrm{X}\psi(\delta)\sin\delta$$

où $\psi(\delta)$ se réduit à l'unité lorsque δ est assez petit pour que l'on puisse négliger les termes en δ^2 devant l'unité.

De plus le projectile est, ainsi que nous l'avons vu, soumis à un second couple, dû au phénomène de Magnus, dont l'axe est situé dans le plan passant par la tangente et l'axe de figure et perpendiculaire à cet axe, couple qui sera égal à

$$\mathrm{R}m'l'\mathrm{X}\psi_1(\delta)\sin\delta \text{ (}^1\text{)}$$

$\psi_1(\delta)$ se réduisant à l'unité comme $\psi(\delta)$, lorsque δ est assez petit pour que l'on puisse négliger les termes en δ^2.

Ceci dit, comme, dans le cas présent, où nous supposons le projectile parfait, toutes les forces extérieures rencontrent l'axe de figure Gz, la composante ω de la rotation suivant cet axe est constante, en vertu de l'équation d'Euler par rapport à cet axe.

---

(1) Si on se reporte à la figure 3, l'axe du premier couple est dirigé suivant GR et celui du second suivant GQ.

De plus, d'après ce que nous avons dit, nous admettons maintenant que l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, est dirigé suivant l'axe de figure Gz (fig. 3) et par suite égal à Cω.

Si nous considérons alors le système d'axes rectangulaires GQ, GR, Gz qui est animé d'un mouvement d'entraînement autour du point G dont la vitesse a pour composantes

suivant GQ $\theta' \sin \nu \cos \delta - \nu' \sin \delta$

suivant GR $\delta' + \theta' \cos \nu$

et suivant Gz $\theta' \sin \nu \sin \delta + \nu' \cos \delta$.

D'après ce que nous avons dit, nous considérons l'axe du couple résultant des quantités de mouvement comme égal à Cω et dirigé suivant Gz, il résulte de là que la vitesse de son extrémité aura pour composantes

suivant GQ $C\omega\,(\delta' + \theta' \cos \nu)$

et suivant GR $C\omega\,(\nu' \sin \delta - \theta' \sin \nu \cos \delta)$.

En écrivant alors que ces deux composantes de la vitesse de l'extrémité de l'axe du couple résultant sont égales à la somme des moments des forces extérieures par rapport aux mêmes axes, nous aurons les deux équations.

$$C\omega(\delta' + \theta' \cos \nu) = Rm'l'X\psi_1(\delta) \sin \delta$$
$$C\omega(\nu' \sin \delta - \theta' \sin \nu \cos \delta) = RmlX\psi(\delta) \sin \delta \text{ (1)}.$$

Si on multiplie la première de ces équations par $\cos \delta \sin \nu$, la seconde par $\cos\nu$ et que l'on ajoute ces équations, on pourra écrire le résultat

---

(1) Remarquons que, si nous négligeons l'effet du couple dû au phénomène de Magnus, ces équations n'incident avec celles du Général Zaboudski. (*Recherches sur le mouvement des projectiles oblongs*, 1908, page 43, traduction allemande, 1909, page 38). Il suffit de faire dans les équations que nous venons d'obtenir $\psi_1(\delta) = 0$ et d'y remplacer C par A, ω par p_0 et $Rml\psi(\delta) \sin \delta$ par K pour obtenir celles du Général Zaboudski. Toutefois, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, on ne peut, tout au moins à priori, négliger l'influence du couple dû au phénomène de Magnus dès que l'on suppose que la force, qui lui donne naissance, influe notablement sur le mouvement du centre de gravité, car, sauf des circonstances exceptionnelles, cette force ne passera pas par ce point.

$$\cos\delta\sin\nu\delta' + \sin\delta\cos\nu\nu'$$

$$= \frac{RX\sin\delta}{C\omega}\left[m'l'\psi_1(\delta)\cos\delta\sin\nu + ml\psi(\delta)\cos\nu\right]$$

de même en multipliant la première équation par $\cos\delta\cos\nu$, la seconde par $\sin\nu$ et retranchant la seconde de la première, on aura

$$\cos\delta\cos\nu\delta' - \sin\delta\sin\nu\nu' + \theta'\cos\delta$$

$$= \frac{RX\sin\delta}{C\omega}\left[m'l'\psi_1(\delta)\cos\delta\cos\nu - ml\psi(\delta)\sin\nu\right].$$

Posons maintenant

$$(33)\qquad \zeta_1 = \sin\delta\sin\nu \qquad\qquad \zeta_2 = \sin\delta\cos\nu$$

et admettons que l'on puisse prendre, au moins entre certaines limites (1), h désignant un facteur constant,

$$(34)\qquad m'l'\psi_1(\delta)\cos\delta = hml\psi(\delta),$$

les équations précédentes pourront alors s'écrire

$$(35)\qquad \frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{RmlX}{C\omega}\psi(\delta)(h\zeta_1 + \zeta_2)$$

$$(36)\qquad \frac{d\zeta_2}{dt} = -\theta'\cos\delta + \frac{RmlX}{C\omega}\psi(\delta)(h\zeta_2 - \zeta_1)$$

Revenons maintenant au cas où on suppose δ assez petit pour que l'on puisse remplacer $\cos\delta$ par l'unité. On devra dans les mêmes conditions prendre

$$\psi(\delta) = 1.$$

Si de plus on pose

---

(1) Comme nous admettons que le couple dû au phénomène de Magnus est toujours faible par rapport à celui situé dans le plan de la tangente et de l'axe de figure, le facteur h est petit, et quitte à considérer un intervalle assez restreint on pourra le remplacer par une valeur moyenne.

$$\frac{X}{X_0} = \varphi(v) \qquad\qquad \frac{RmlX_0}{C\omega} = \beta$$

et que l'on remplace θ' par sa valeur, lorsqu'on néglige l'influence du mouvement du projectile autour de son centre de gravité

$$\theta' = -\frac{g\cos\theta}{v},$$

on aura

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \beta\varphi(v)(h\zeta_1 + \zeta_2)$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = \frac{g\cos\theta}{v} + \beta\varphi(v)(h\zeta_2 - \zeta_1.$$

Si alors on ajoute ces équations, après avoir multiplié la première par i, et que l'on pose

$$z = \zeta_2 + i\zeta_1$$

on aura

$$(37) \qquad \frac{dz}{dt} - \beta i\varphi(v)(1 - hi)z = \frac{g\cos\theta}{v}$$

d'où on déduit, B désignant une constante

$$(38) \quad z = e^{\beta(i+h)\int_0^t \varphi(v)dt}\left[B + \int_0^t \frac{g\cos\theta}{v} e^{-\beta(i+h)\int_0^t \varphi(v)dt} dt\right].$$

Si nous posons alors, ainsi que nous l'avons déjà fait

$$u_1 = \int_0^t \varphi(v)dt$$

$$(39) \qquad z = e^{\beta(i+h)u_1}\left[B + -\int \frac{g\cos\theta}{v\varphi(v)} e^{-\beta(i+h)u_1} du_1\right].$$

Supposons maintenant que β soit assez grand pour que l'on puisse négliger les termes en $\frac{1}{\beta^2}$ devant ceux en $\frac{1}{\beta}$, condition qui sera satisfaite si la vitesse initiale est assez grande (1), (et qui entraîne comme conséquence que δ reste assez petit pour que l'on puisse prendre $\cos\delta = 1$).

Nous aurons alors, en intégrant par partie

$$\int \frac{g\cos\theta}{v\varphi(v)} e^{-\beta(i+h)u_1} du_1 = \frac{g(i-h)\cos\theta}{\beta(1+h^2)v\varphi(v)} e^{-\beta(i+h)u_1} - \int \frac{g(i-h)}{\beta(1+h^2)} \frac{d}{du_1}\left(\frac{\cos\theta}{v\varphi(v)}\right) e^{-\beta(i+h)u_1} du_1$$

ce qui peut s'écrire

$$(40) \qquad \int \frac{g\cos\theta}{v\varphi(v)} \left[1 + \frac{(i-h)}{\beta(1+h^2)} \frac{d}{du_1}\left(\mathrm{L}\frac{\cos\theta}{v\varphi(v)}\right)\right] e^{-\beta(i+h)u_1} du_1 = \frac{g(i-h)\cos\theta}{\beta(1+h^2)v\varphi(v)} e^{-\beta(i+h)u_1}$$

Mais, tout au moins entre certaines limites, on peut prendre

$$\varphi(v) = \frac{v^2}{v_0^{\,2}}$$

et si de plus nous posons

$$v\cos\theta = u$$

on a

$$\frac{d}{du_1}\left(\mathrm{L}\frac{\cos\theta}{v\varphi(v)}\right) = \frac{d}{du_1}\left(\mathrm{L}\frac{\cos^4\theta}{u^3}\right) = -4tg\theta\frac{d\theta}{du_1} - \frac{3}{u}\frac{du}{du_1}$$

Mais

$$\frac{d\theta}{du_1} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{du_1} = -\frac{g\cos\theta}{v\varphi(v)}$$

$$\frac{du}{du_1} = \frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{du_1} = -\frac{X_1 g\cos\theta}{p\varphi(v)}\,^{(2)} = -\frac{\lambda g X_0\cos\theta}{p}$$

---

(1) On a en effet

$$\beta = \frac{RmlX_0}{C\omega} = \frac{R^2ml}{Ctg\gamma}\frac{X_0}{v_0}$$

où γ est l'inclinaison finale des rayures. Or $\frac{X_0}{v_0}$ croît avec la vitesse initiale v_0.

(2) On a en effet, p étant le poids du projectile

$$\frac{p}{g}\frac{du}{dt} = -X_1\cos\theta, \qquad X_1 = \lambda X = \lambda X_0\varphi(v).$$

donc enfin

$$\frac{d}{du_1}\left(\mathrm{L}\frac{\cos\theta}{v\varphi(v)}\right) = \frac{4g\sin\theta}{v\varphi(v)} + \frac{3g\lambda X_0}{vp}.$$

Or tant que la valeur de v ne sera pas considérablement réduite, condition d'ailleurs nécessaire pour que δ reste petit, les deux termes qui figurent dans l'expression précédente seront petits, on pourra par suite, β étant supposé lui-même grand, négliger dans l'expression entre crochets du premier membre de l'égalité (40), le second terme devant l'unité, et prendre par suite

$$\int \frac{g\cos\theta}{v\varphi(v)} e^{-\beta(i+h)u_1} du_1 = \frac{g(i-h)\cos\theta}{\beta(1+h^2)v\varphi(v)} e^{-\beta(i+h)u_1}$$

Nous aurons donc

$$z = \mathrm{B}e^{\beta(i+h)u_1} + \frac{g(i-h)\cos\theta}{\beta(1+h^2)v\varphi(v)} \tag{41}$$

Si nous supposons δ et par suite z nul à l'instant initial et si de plus on néglige les termes en h là où ils ne sont pas multipliés par β, nous aurons en définitive

$$z = \frac{gi\cos\theta}{\beta v\varphi(v)} - \frac{gi\cos\theta_0}{\beta v_0} e^{\beta h u_1} e^{\beta i u_1}. \tag{42}$$

Or si nous remarquons que

$$\beta = \frac{\mathrm{R}ml\mathrm{X}_0}{\mathrm{C}\omega} = \frac{\mathrm{H}s}{2}$$

Nous reconnaîtrons que cette formule coïncide avec la formule (32), applicable, *si on excepte les premiers instants*, lorsque H est assez petit pour que l'on puisse se borner à la première puissance de cette quantité, et que sh est positif ou nul, c'est-à-dire lorsque la force due à l'effet de Magnus rencontre l'axe du projectile entre le centre de gravité et la pointe, ou est négligeable.

Nous avons dit d'ailleurs que, vu l'incertitude qui existe sur une partie des coefficients qui figurent dans H, et aussi par suite des irrégularités qui peuvent exister dans les conditions initiales ou des imperfections du projectile, on sera, le plus souvent, conduit à adopter pour la vitesse de rotation une valeur plus grande que celle qui serait théoriquement la plus avantageuse et cette circonstance fera prendre généralement à H une valeur assez petite.

Il résulte de là que si, comme cela semble probable, la force résultant de l'effet de Magnus rencontre l'axe du projectile entre le centre de gravité et la pointe, on pourra en général, pour l'étude du mouvement du projectile autour de son centre de gravité, supposer l'axe de figure confondu avec l'axe du couple résultant des quantités de mouvement. Toutefois on ne peut se rendre compte en agissant ainsi, ni de l'influence des imperfections du projectile ou des irrégularités des conditions initiales, ni des conditions de stabilités du projectile, problèmes que nous avons résolus plus haut.

III

Supposons maintenant que la vitesse initiale soit assez réduite pour que l'on ne puisse négliger les termes en $\frac{1}{\beta}$ devant l'unité (¹), et que de plus δ puisse prendre une valeur assez grande pour que l'on ne puisse plus remplacer $\cos \delta$ par l'unité.

Nous remarquerons toutefois que les hypothèses que l'on est obligé de faire, dans ce cas, pour connaître les couples auxquels est soumis le projectile dans son mouvement autour du centre de gravité paraissent, en l'absence d'expériences directes, fort discutables. En effet, tant que δ restait très petit, il était naturel de supposer ces couples proportionnels à δ, mais pour une valeur quelconque δ il est beaucoup plus difficile de se rendre compte de leur valeur. Cette valeur tient en effet, non seulement à l'excès de pression qui existe du côté choqué par l'air, mais aussi au vide plus ou moins complet qui se produit de l'autre côté.

Nous admettrons que l'inclinaison finale des rayures est assez

---

(¹) Ainsi que nous l'avons fait remarquer, $\beta = \frac{R^2 ml}{C \operatorname{tg} \gamma} \frac{X_0}{v_0}$ et pour une vitesse réduite X_0 peut être regardé comme proportionnel à $v_0{}^2$ de sorte que β est proportionnel à v_0.

forte pour que l'on puisse confondre, ainsi que nous l'avons fait dans le chapitre précédent, l'axe de figure avec l'axe du couple résultant des quantités de mouvement (1). Cette hypothèse sera très généralement admissible ainsi que nous l'avons dit plus haut, d'autant plus que nous laissons de côté les premiers instants du mouvement pendant lesquels δ est assez petit pour que l'on puisse remplacer $\cos\delta$ par l'unité. Nous ne nous occupons d'ailleurs ni des conditions de stabilité ni de l'influence des imperfections du projectile ou des irrégularités du départ, questions que nous avons traitées dans le premier chapitre.

Les équations (35) et (36) sont alors applicables ; toutefois, ici le rapport du couple dû à l'influence du phénomène de Magnus, à celui situé dans le plan de la tangente et de l'axe de figure, pourrait être fonction non seulement de v mais aussi de δ, mais, en l'absence de toute donnée expérimentale à ce sujet, nous lui supposerons une valeur constante. Ceci est d'autant plus acceptable, que, d'une part, dans le cas actuel nous serons obligés de partager le mouvement en une série d'arcs successifs, ce qui permettrait, sans inconvénients, de changer la valeur de h lorsqu'on passe d'un arc à un autre, et d'autre part l'influence de h, que l'on doit supposer très petit, ne devenait appréciable, dans les cas que nous avons traités précédemment, que dans les termes où cette quantité était multipliée par β qui était très grand. Or dans le cas qui nous occupe β ne sera pas très grand, de sorte que l'influence des termes dépendant de h sera très probablement négligeable.

Quant à la fonction $\psi(\delta)$, il semble, dans le cas où nous nous plaçons, d'une vitesse très réduite, que l'on puisse admettre que la pression sur la partie du projectile qui n'est pas atteinte par le

---

(1) Pour qu'il en soit ainsi il faut que H soit petit, or on a

$$\mathrm{H} = \frac{4\mathrm{R}ml\mathrm{AX}_0}{\mathrm{C}^2\omega^2} = \frac{4\mathrm{R}^3ml\mathrm{AX}_0}{\mathrm{C}^2\,\mathrm{tg}^2\,\gamma v_0{}^2}.$$

Or pour le cas d'une vitesse initiale réduite on peut supposer X_0 proportionnel à $v_0{}^2$; si on prend alors $\mathrm{X}_0 = \alpha v_0{}^2$, on aura $\mathrm{H} = \dfrac{4\mathrm{R}^3ml\mathrm{A}\alpha}{\mathrm{C}^2\,\mathrm{tg}^2\,\gamma}$ de sorte que H est indépendant de v_0 et, si $\mathrm{tg}\,\gamma$ a une valeur convenable, restera petit quel que soit v_0.

choc de l'air puisse être considérée comme ne différant pas beaucoup de la pression atmosphérique et que la pression dynamique sur la partie exposée au choc de l'air puisse être calculée en la supposant proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse.

Dans ces conditions on serait, d'après le général Zaboudski, conduit à prendre, pour δ variant de 0° à 75°, le couple de la résistance de l'air, situé dans le plan de la tangente et de l'axe de figure égal à

$$\alpha R X \sin \delta \cos \delta.$$

On devrait par suite, dans les formules (35) et (36) remplacer

$$ml\psi(\delta)$$

par

$$\alpha \cos \delta.$$

Si donc on pose, pour avoir les mêmes notations que plus haut,

$$\beta = \frac{R\alpha X_0}{C\omega}$$

nous aurons

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \beta\varphi(v) \cos \delta(h\zeta_1 + \zeta_2) \tag{43}$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = -\theta' \cos \delta + \beta\varphi(v) \cos \delta(h\zeta_2 - \zeta_1). \tag{44}$$

Si nous remplaçons alors θ' par $-\frac{g \cos \theta}{v}$ et si nous posons, comme plus haut

$$z = \zeta_2 + i\zeta_1$$

et en même temps

$$dx = \varphi(v) \cos \delta dt = -\frac{v\varphi(v)}{g \cos \theta} \cos \delta d\theta. \tag{45}$$

Nous déduisons des équations (43) et (44)

$$\frac{dz}{dx} - \beta i(1 - hi)z = \frac{g \cos \theta}{v\varphi(v)}$$

d'où on déduit

$$z = e^{\beta(i+h)x}\left[\mathrm{H} + \int \frac{g\cos\theta}{v\varphi(v)}\, e^{-\beta(i+h)x}\, dx\right].$$

Supposons maintenant que nous partagions la trajectoire en arcs assez petits pour que sur chacun d'eux nous puissions remplacer $\frac{g.\cos\theta}{v\varphi(v)}$ par une valeur moyenne m, nous aurons alors

$$z = \mathrm{H}e^{\beta(i+h)x} + \frac{m(i-h)}{\beta(1+h^2)},$$

ce que nous pourrons écrire, si nous négligeons h devant l'unité en dehors de l'exponentielle

$$z = \mathrm{H}e^{\beta(i+h)x} + \frac{mi}{\beta}.$$

Mais on peut remarquer que dans le cas où nous nous supposons placé, nous pourrons le plus souvent négliger les termes en h même dans l'exponentielle. En effet, on a

$$\beta x = -\beta \int \frac{v\varphi(v)}{g\cos\theta} \cos\delta\, d\theta$$

d'où

$$|\beta x| < \beta \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{v\varphi(v)}{g\cos\theta}\, d\theta = \frac{\beta}{m'}(\theta_1 - \theta_2),$$

θ_1 étant la valeur initiale et θ_2 la valeur finale de θ pour l'arc considéré, et m' une valeur moyenne de $\frac{g\cos\theta}{v\varphi(v)}$. Or pour que δ prenne une valeur importante il faut que $\frac{m}{\beta}$ ne soit pas très petit, et par suite $\frac{\beta}{m'}$, ne saurait être très grand et par suite $\frac{h\beta}{m'}$ sera très petit et nous pourrons négliger, dans le cas où nous nous supposons placé, d'une vitesse initiale très réduite, les termes en h même dans l'exponentielle.

Nous aurons donc

$$r = \mathrm{H}e^{\beta ix} + \frac{mi}{\beta}.$$

Désignons alors par x', z', ζ'_1 et ζ'_2 les valeurs de x, z, ζ_1 et ζ_2 pour le début de l'arc que nous considérons, nous aurons

$$z' = \zeta'_2 + i\zeta'_1 = \mathrm{H}e^{\beta i x'} + \frac{mi}{\beta}$$

d'où

$$\mathrm{H} = \left(\zeta'_2 + i\zeta'_1 - \frac{mi}{\beta}\right)e^{-\beta i x'}$$

et par suite

$$z = \zeta_2 + i\zeta_1 = \left(\zeta'_2 + i\zeta'_1 - \frac{mi}{\beta}\right)e^{\beta i(x - x')} + \frac{mi}{\beta}$$

d'où on déduit en égalant les parties réelles et imaginaires,

$$\zeta_2 = \zeta'_2 \cos\beta(x - x') + \left(\frac{m}{\beta} - \zeta'_1\right)\sin\beta(x - x') \tag{46}$$

$$\zeta_1 = \frac{m}{\beta} + \left(\zeta'_1 - \frac{m}{\beta}\right)\cos\beta(x - x') + \zeta'_2 \sin\beta(x - x'). \tag{47}$$

Mais

$$\sin^2\delta = \zeta_2^2 + \zeta_1^2 = \frac{m^2}{\beta^2} + \left[\left(\zeta'_1 - \frac{m}{\beta}\right)^2 + \zeta'^2_2\right]$$
$$+ 2\frac{m}{\beta}\left[\left(\zeta'_1 - \frac{m}{\beta}\right)\cos\beta(x - x') + \zeta'_2 \sin\beta(x - x')\right].$$

Posons maintenant

$$a = \sqrt{\left(\zeta'_1 - \frac{m}{\beta}\right)^2 + \zeta'^2}, \quad \cos\varphi = \frac{\frac{m}{\beta} - \zeta'_1}{a}, \quad \sin\varphi = \frac{\zeta'_2}{a}. \tag{48}$$

Nous aurons

$$\sin^2\delta = \frac{m^2}{\beta^2} + a^2 - 2\frac{ma}{\beta}\cos\left[\beta(x - x') + \varphi\right]$$

et par suite

$$\cos^2\delta = 1 - \frac{m^2}{\beta^2} - a^2 + \frac{2ma}{\beta} - \frac{4ma}{\beta}\sin^2\frac{1}{2}\left[\beta(x - x') + \varphi\right]$$

et en posant de nouveau

$$(49)\qquad f=\sqrt{1-\left(\frac{m}{\beta}-a\right)^{2}},\qquad\qquad (50)\qquad k^{2}=\frac{4ma}{\beta f^{2}}$$

$$(51)\qquad \frac{dx}{\cos\delta}=\frac{dx}{f\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\frac{1}{2}\left[\beta(x-x')+\varphi\right]}}=-\frac{d\theta}{m}$$

Par la relation (51) le calcul de x serait ramené aux fonctions elliptiques, mais comme la méthode que nous avons employée ne comporte qu'une approximation assez restreinte, il est préférable d'employer la méthode d'approximation suivante.

Considérons l'expression

$$z=\frac{1}{\sqrt{1-y}}-1-\frac{3}{4}y$$

on en déduit

$$\frac{dz}{dy}=\frac{1}{2}(1-y)^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{4},$$

cette expression devient nulle pour

$$1-y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\text{ ou }y=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

et la valeur correspondante z_m de z sera

$$z_m=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{7}{4}=-0{,}033$$

on a d'ailleurs pour la valeur z_1 de z pour $y=\frac{1}{2}$

$$z_1=\sqrt{2}-\frac{11}{8}=0{,}0392$$

On pourra donc pour $y\leq\frac{1}{2}$ prendre

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}}=1+\frac{3}{4}y$$

avec une erreur qui *en valeur absolue* sera certainement inférieure à 0,04, et l'erreur relative sera elle-même plus petite puisque $\frac{1}{\sqrt{1-y}}$ est supérieur à 1.

Si donc on suppose $k^2 \leq \frac{1}{2}$, on pourra prendre

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{1}{2}\left[\beta(x - x') + \varphi\right]}} = 1 + \frac{3k^2}{4} \sin^2 \frac{1}{2}\left[\beta(x - x') + \varphi\right]$$

et on aura dans ces conditions

$$\frac{\theta' - \theta}{m} = \frac{1}{f} \int_{x'}^{x} \left\{ 1 + \frac{3k^2}{4} \sin^2 \frac{1}{2}\left[\beta(x - x') + \varphi\right] \right\} dx$$

ou comme

$$\int \sin^2 \psi d\psi = \int \frac{1 - \cos 2\psi}{2} d\psi = \frac{1}{2}\psi - \frac{1}{4}\sin 2\psi$$

il viendra

$$\frac{\theta' - \theta}{m} = \frac{1}{f}\left(1 + \frac{3k^2}{8}\right)(x - x') - \frac{3k^2}{8\beta f}\left\{ \sin\left[\beta(x - x') + \varphi\right] - \sin\varphi \right\} \tag{52}$$

En introduisant l'angle φ les formules (46) et (47) peuvent d'ailleurs s'écrire

$$\zeta_2 = a \sin\left[\beta(x - x) + \varphi\right] \tag{53}$$

$$\zeta_1 = \frac{m}{\beta} - a \cos\left[\beta(x - x') + \varphi\right] \tag{54}$$

IV

Dans le cas que nous venons d'examiner, où nous supposons β assez petit pour que l'on puisse négliger partout les termes en h, on peut employer une méthode géométrique d'intégration beaucoup plus rapide et qui donnera une approximation au moins égale.

Si nous négligeons les termes en h, les équations (43) et (44) deviennent (¹)

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \beta\varphi(v)\zeta_2 \cos\delta$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = \frac{g\cos\theta}{v}\cos\delta - \beta\varphi(v)\zeta_1\cos\delta$$

Mais dans le cas actuel δ variera assez lentement pour que l'on puisse sur chaque arc de la trajectoire remplacer $\cos\delta$ par une valeur moyenne, nous poserons alors

(55) (²) $$dx = \beta\,\varphi(v)\cos\delta\, dt$$

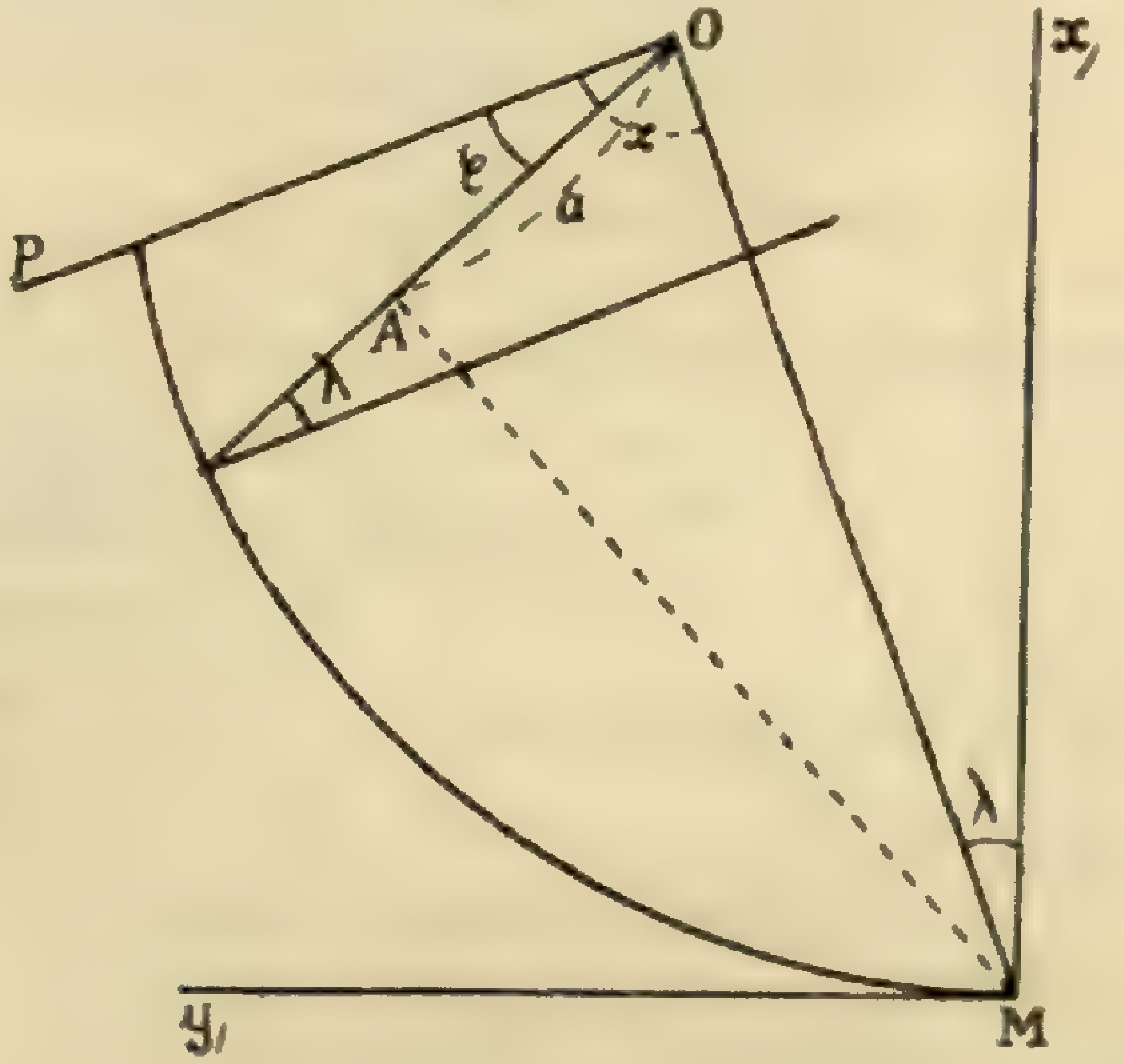


Fig. 6

et nos équations deviendront

(56) $$\frac{d\zeta_1}{dx} = \zeta_2$$

(57) $$\frac{d\zeta_2}{dx} = \frac{g\cos\theta}{\beta v\varphi(v)} - \zeta_1$$

(¹) En remplaçant dans la seconde θ' par sa valeur $-\dfrac{g\cos\theta}{v}$.

(²) La quantité désignée ici par x est le produit par β de celle désignée plus haut par la même lettre.

Considérons d'autre part une spirale logarithmique

$$\rho = \rho_0 \, e^{(x - x_0)\,\mathrm{tg}\,\lambda} \tag{58}$$

où λ est l'angle constant de la normale à la courbe avec le rayon vecteur (¹), et un point A situé sur un rayon vecteur fixe, à une distance a du pôle.

Désignons alors par ζ_1 et ζ_2 les coordonnées du point A par rapport à des axes dont l'un Ox_1 serait la normale à la spirale en un point M de cette courbe et l'autre Oy_1 la tangente au même point.

Soit de plus OP l'axe polaire, φ l'angle polaire du point A et x celui du point M, nous aurons

$$\zeta_1 = \rho \cos\lambda - a\cos(x - \varphi - \lambda) \tag{59}$$

$$\zeta_2 = \rho \sin\lambda + a\sin(x - \varphi - \lambda). \tag{60}$$

Mais en remarquant que l'on a

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho\,\mathrm{tg}\,\lambda.$$

on déduit des équations précédentes

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = \rho\sin\lambda + a\sin(x - \varphi - \lambda)$$

$$\frac{d\zeta_2}{dx} = \rho\frac{\sin^2\lambda}{\cos\lambda} + a\cos(x - \varphi - \lambda).$$

Mais en tenant compte de (59) et (60) ces équations donnent

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = \zeta_2 \tag{61}$$

$$\frac{d\zeta_2}{dx} = \frac{\rho}{\cos\lambda} - \zeta_1. \tag{62}$$

(¹) On a en effet

$$\frac{\rho}{\rho'} = \cot\lambda.$$

Si on avait constamment

$$(63) \qquad \frac{\rho}{\cos\lambda} = \frac{\rho_0 e^{(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\lambda}}{\cos\lambda} = \frac{g\cos\theta}{\beta v\varphi(v)}$$

les équations (61) et (62) deviendraient identiques (56) et (57) et par suite la construction indiquée fournirait les intégrales de ces équations ; nous aurions en particulier

$$\mathrm{AM} = \sin\delta$$
$$\mathrm{AM}y_1 = \nu.$$

Nous remarquerons de plus que si on désigne par r le rayon de courbure de la spirale en M, on a

$$(64) \qquad r = \frac{\rho}{\cos\lambda} = \frac{g\cos\theta}{\beta v\varphi(v)}.$$

L'égalité (63) ne sera pas satisfaite en tous les points de l'arc que nous considérons, mais on pourra disposer de λ et ρ_0 de façon qu'elle soit satisfaite au début et à la fin de l'arc en question. Pour cela désignons par θ_1, v_1, x_1, ρ_1, r_1 les valeurs de θ, v, x, ρ, r au début de l'arc et par θ_2, v_2, x_2, ρ_2, r_2 les mêmes valeurs à la fin, nous aurons

$$r_1 = \frac{\rho_1}{\cos\lambda} = \frac{g\cos\theta_1}{\beta v_1\varphi(v_1)} = \frac{\rho_0 e^{(x_1-x_0)\,\mathrm{tg}\,\lambda}}{\cos\lambda}$$

$$r_2 = \frac{\rho_2}{\cos\lambda} = \frac{g\cos\theta_2}{\beta v_2\varphi(v_2)} = \frac{\rho_0 e^{(x_2-x_0)\,\mathrm{tg}\,\lambda}}{\cos\lambda}$$

d'où on déduit

$$\mathrm{tg}\,\lambda = \frac{\mathrm{L}r_2 - \mathrm{L}r_1}{x_2 - x_1}$$

ou en passant aux logarithmes vulgaires

$$(65) \qquad \mathrm{tg}\,\lambda = \frac{\log r_2 - \log r_1}{(x_2 - x_1)\log e}.$$

Pour calculer x la formule (55) donne

$$(55) \qquad dx = \beta\varphi(v) \cos \delta dt = -\frac{\beta v\varphi(v) \cos \delta}{g \cos \theta} d\theta.$$

Mais, ainsi que nous l'avons dit, nous remplacerons dans cette formule cos δ, par une valeur constante que nous prendrons, au moins comme première approximation, égale à sa valeur $\cos \delta_1$ au début de l'arc; de plus, dans le cas où nous nous plaçons d'une vitesse fort réduite, on pourra supposer $\varphi(v)$ proportionnelle au carré de la vitesse et prendre par suite

$$\varphi(v) = \frac{v^2}{v_0^2}.$$

Nous aurons alors en désignant par u la composante horizontale de la vitesse

$$dx = -\frac{\beta u^3 \cos \delta_1}{g v_0^2} \frac{d\theta}{\cos^4 \theta}.$$

Dans le cas actuel d'une vitesse assez réduite, la composante horizontale u de la vitesse varie assez lentement; on pourra donc sur l'arc assez réduit que nous considérons, remplacer u par une valeur moyenne et prendre en fin de compte

$$x = \frac{\beta u^3 \cos \delta_1}{g v_0^2} \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\cos^4 \theta}$$

c'est-à-dire

$$(66) \quad x - x_1 = \frac{\beta u^3 \cos \delta_1}{g v_0^2} \left[\operatorname{tg} \theta_1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \theta_1 - \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \theta \right]$$

et par suite

$$(67) \quad x_2 - x_1 = \frac{\beta u^3 \cos \delta_1}{g v_0^2} \left[\operatorname{tg} \theta_1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_2 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \theta_2 \right]$$

D'ailleurs avec la valeur prise pour $\varphi(v)$ l'équation (64) donne

$$(64) \qquad r = \frac{g v_0^2 \cos \theta}{\beta v^3} = \frac{g v_0^2 \cos^4 \theta}{\beta u^3}$$

$$\rho = r \cos \lambda.$$

V

Appliquons cette méthode au cas suivant

poids du projectile en kilogr. $p = 216{,}1$
rayon du projectile en mètres $R = 0{,}1397$
vitesse initiale en mètres $v_0 = 263{,}9$
angle de projection $\theta_0 = 55^\circ$

Calculons d'abord la trajectoire (¹) sans tenir compte du mouvement du projectile autour de son centre de gravité. Jusqu'à 240^m nous supposerons la résistance proportionnelle au cube de la vitesse. Nous trouverons alors pour $v = 240^m$, $\theta = 52^\circ$. Pour les valeurs de v inférieures à 240^m nous supposerons la résistance proportionnelle au carré de la vitesse et nous considérerons la série des arcs suivants :

1° de 52° à 47° pour $\theta = 47^\circ$ nous avons $v = 210{,}8$
2° de 47° à 40° » $\theta = 40^\circ$ » $v = 184{,}1$
3° de 40° à 30° » $\theta = 30^\circ$ » $v = 158{,}7$
4° de 30° à 0° » $\theta = 0^\circ$ » $v = 131{,}3$
5° de 0° à — 30° » $\theta = -30^\circ$ » $v = 144{,}9$
6° de — 30° à — 40° » $\theta = -40^\circ$ » $v = 160{,}8$
7° de — 40° à — 47° » $\theta = -47^\circ$ » $v = 177{,}9$
8° de — 47° à — 52° » $\theta = -52^\circ$ » $v = 191{,}0$
9° de — 52° à — 55° » $\theta = -55^\circ$ » $v = 200{,}3$
10° de — 55° à — 58° » $\theta = -58^\circ$ » $v = 213{,}1$

Nous supposerons ensuite la résistance dynamique sur la partie antérieure du projectile proportionnelle au carré de la vitesse ; cette hypothèse peut d'autant plus être admise dans le cas actuel que, pour v inférieur à 240^m, la résistance totale est proportionnelle au carré de la vitesse et que, pour ces vitesses, on peut supposer que la résistance dynamique diffère peu de la résistance totale, l'influence du vide à l'arrière étant à ces vitesses relativement assez

---

(¹) Ou plus exactement simplement l'hodographie, c'est-à-dire les valeurs de v en fonction de θ.

peu importante. Pour le premier arc où la vitesse est comprise entre 264^m et 240^m, nous supposerons que la pression dynamique suit la même loi, en nous basant sur ce fait que cet arc est assez restreint et que si on calcule la vitesse sur cet arc en supposant la résistance proportionnelle au carré on trouve un résultat peu différent de celui auquel nous sommes arrivé en admettant la résistance totale proportionnelle au cube de la vitesse.

Nous prendrons alors, en adoptant les nombres donnés par le Général Zaboudski, pour ce projectile (¹)

$$\alpha = 6{,}138, \qquad \mu = 0{,}545$$

Si alors on considère le cas où le pas de l'inclinaison finale des rayures est de vingt calibres et que l'on prenne pour la valeur initiale X_0 de la résistance dynamique

$$X_0 = \frac{4R^2Nv_0^2}{g}$$

où $N = 0{,}108$, nous obtiendrons

$$\log \beta = \bar{1}{,}86818.$$

Nous avons construit, fig. (7) la spirale ou plus exactement la série des spirales successives en question.

Pour cela pour le premier arc qui correspond aux valeurs de θ allant de 55° à 52°, nous prenons $\delta_1 = 0$, nous obtenons alors par les formules (64), (67) et (65)

$$\rho_1 = 0{,}028, \quad \rho_2 = 0{,}040, \quad x_2 - x_1 = 87°2', \quad \lambda = 13°11'$$

et pour la valeur finale δ_1 de δ

$$\delta_1 = 2°41'.$$

Nous obtenons ainsi l'arc de spirale 0 — 1.

Nous construirons ensuite d'une façon semblable les différents arcs de spirale.

Si par exemple nous considérons l'arc de spirale correspondant

---

(¹) Pages 82 et 83 de l'édition allemande.

aux valeurs de θ comprises 0 et -30°, le centre de la spirale précédente était le point A, et on avait pour le rayon vecteur final $A - 5$, 0,376 et la valeur de λ était $\lambda = 23^\circ 10'$; de plus, la valeur finale δ_1 de δ pour cet arc était $\delta_1 = 2^\circ 21'$. Pour l'arc suivant les formules (64), (65), (67) donneront alors

$$x_2 - x_1 = 77^\circ 54', \qquad \lambda = -17^\circ 53, \qquad \rho_2 = 0{,}251.$$

En menant alors la droite 5—B faisant avec 5—A un angle de 23°10′, nous aurons la normale en 5 à la spirale; de plus, si nous menons AB normal à 5—A, le point B sera le centre de courbure commun des deux spirales successives qui sont oscillatrices en 5. Si maintenant nous menons la droite C—5 faisant avec 5—B l'angle de 17°53 ($\lambda = -17^\circ 53'$), du côté opposé à A—5, par rapport à B—5 et si nous projetons B en C sur C—5, nous aurons en C le centre de l'arc de spirale suivant (¹). En menant alors la droite C—6, faisant avec C—5 l'angle $x_2 - x_1 = 77^\circ 54'$ et portant sur cette droite la longueur

$$C - 6 = \rho_2 = 0{,}251.$$

Nous aurons en 6 l'extrémité de l'arc de spirale considérée. De plus en menant 6—D faisant avec 6—C l'angle $\lambda = -17^\circ 53$ et menant CD normal à 6—C, on aura en D le centre de courbure en 6 des deux arcs de spirale oscillateurs en ce point.

Pour l'arc suivant on trouve $\lambda = -31^\circ 35'$, en menant donc la droite 6—E, faisant avec 6—D l'angle $\widehat{D6E} = -31^\circ 35$ et projetant le point D en E sur cette droite, on obtiendra en E le centre de l'arc de spirale suivant que l'on construira d'une façon semblable. Une fois tous ces arcs de spirale 0—1—2—3—4—5—6—7—8—9—10 construits, il sera facile d'en déduire la position de l'axe de figure à un instant quelconque.

Supposons par exemple que nous voulions avoir cette position pour $\theta = -15^\circ$, donc pour un point correspondant à l'arc 5—6 que nous avons considéré plus haut.

(¹) En vertu de la formule (64)

$$\rho = r \cos \lambda.$$

La formule (66) nous donne alors

$$x - x_1 = 33^{\circ}19,$$

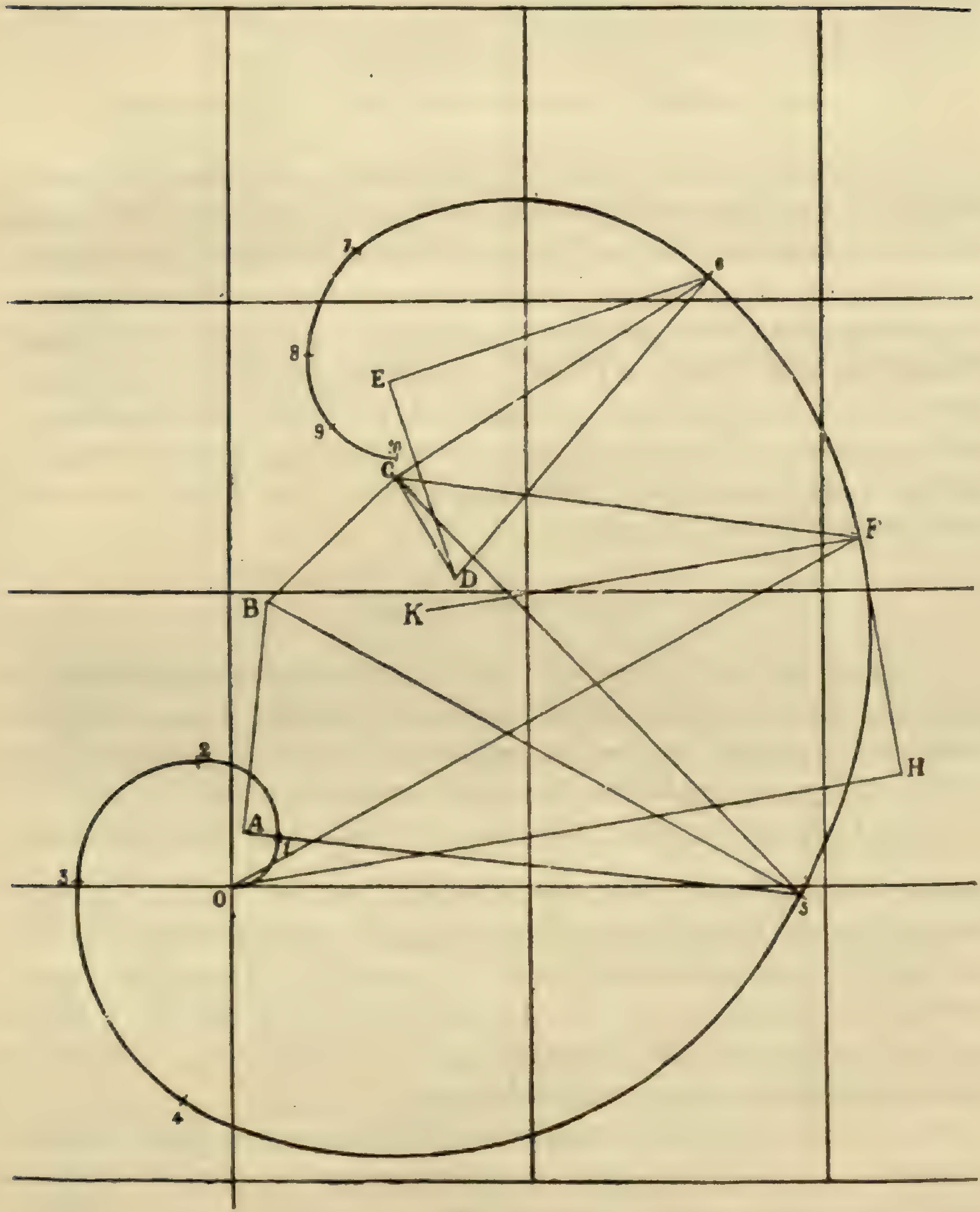


Fig. 7.

nous mènerons donc la droite CF, faisant avec C—5 un angle de 33°19′, puis nous mènerons par F la droite FK faisant avec CF un angle égal à 17°53′, dans un sens convenable, cette droite FK sera la normale en F à la spirale, la perpendiculaire FH à cette droite sera donc la tangente en F. Par suite, si du point 0, on abaisse la perpendiculaire 0—H sur FH, on aura

$$0 - \mathrm{H} = \zeta_1 = \sin \delta \sin \nu \quad \mathrm{FH} = \zeta_2 = \sin \delta \cos \nu$$

$$0 - \mathrm{F} = \sin \delta \qquad \widehat{0\mathrm{FH}} = \nu$$

on trouve ainsi

$$\sin \delta = 0{,}486$$

d'où

$$\delta = 29°5'.$$

On peut remarquer que, dans le calcul de $x - x_1$, nous avons pris pour cos δ la valeur cos δ_1 correspondant à l'origine de la spirale, on pourrait faire une seconde approximation en remplaçant cos δ_1 par $\cos \frac{\delta + \delta_1}{2} = \cos 25°37'$.

On trouverait ainsi pour $x - x_1$ une valeur inférieure de 55', différence en réalité sans importance, étant donnée l'incertitude qui existe au sujet de la valeur du couple de la résistance de l'air. La figure 7 nous permet aussi d'obtenir très facilement la valeur maxima de δ, pour cela il suffit de prendre la distance maxima du point 0 à la spirale (¹).

On trouve pour cette distance maxima

$$0{,}528$$

si donc δ_m est la valeur maxima de δ, on a

$$\sin \delta_m = 0{,}528$$

d'où on conclut

$$\delta_m = 31°52'.$$

Nous donnons d'ailleurs dans le tableau suivant les éléments des différents arc de spirale.

Dans ce tableau ρ_2 désigne la valeur du rayon vecteur à la fin de l'arc, la valeur du rayon vecteur au début de l'arc, ainsi que le rayon de courbure initial de l'arc de spirale, se déduisent, ainsi

---

(¹) Ou plus exactement aux séries des arcs de spirale.

que nous l'avons vu, de la valeur de ρ_2 pour l'arc précédent ; δ_1 désigne la valeur de δ au début de l'arc, valeur qui sert au calcul de $x_2 - x_1$ pour l'arc considéré ; enfin u désigne la valeur moyenne de la vitesse horizontale u que nous avons admise sur l'arc en question.

Nous avons d'ailleurs pour la valeur β du rayon vecteur à l'instant initial

$$\rho_0 = 0{,}028$$

DE $\theta =$	A $\theta =$	$x_2 - x_1$	ρ_2	δ_1	λ	u'
55°	52°	87°2′	0,040	0°	13°11′	149,6
52°	47°	94°50′	0,065	2°41′	16°34′	145,7
47°	40°	79°40′	0,106	5°2′	20°33′	142,4
40°	30°	65°35′	0,180	6°5′	26°25′	139,2
30°	0°	95°21′	0,376	8°21′	23°10′	134,4
0°	—30°	77°54′	0,251	22°1′	—17°53′	128,4
—30°	—40°	40°28′	0,145	30°24′	—31°35′	124,3
—40°	—47°	45°55′	0,100	29°13′	—28°4′	122,0
—47°	—52°	47°46′	0,076	23°10′	—21°23′	119,2
—52°	—55°	38°13′	0,063	20°37′	—17°45′	116,2
—55°	—58°	49°22′	0,048	18°4′	—17°8′	113,9

Si on compare les résultats précédents avec ceux donnés pour le même cas par le général Zaboudski (¹), on trouve qu'ils sont loin de coïncider ; la différence provient de ce fait que le général Zaboudski suppose sur toute la trajectoire la résistance dynamique proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse. Sans aucun doute lorsqu'il s'agit, comme dans le cas présent, de gros projectiles, on obtient pour la trajectoire, une approximation encore très suffisante en supposant la résistance proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse même pour des vitesses aussi réduites que celles qui se rencontrent dans le cas actuel, mais cela tient d'une

---

(1) Page 86 de la traduction allemande d'Eberhard.

part à ce que pour de gros projectiles animés de vitesses réduites l'influence de la résistance de l'air n'est pas très considérable ainsi que le fait voir la lente décroissance de la vitesse horizontale, et, d'autre part, à ce que l'on prend un coefficient de résistance variable avec les limites entre lesquelles reste comprise la vitesse, ce qui produit une certaine compensation.

Toutefois il est incontestable que pour des vitesses aussi réduites que celles que nous avons à considérer, la résistance totale est proportionnelle à la seconde et non à la quatrième puissance de la vitesse, et comme, à ces vitesses, l'influence du vide à l'arrière doit être assez faible, on doit supposer la résistance dynamique et par suite aussi le couple de la résistance de l'air comme proportionnels à la seconde puissance de la vitesse. Or le rayon de courbure de la spirale que nous avons considéré est proportionnel à $\frac{1}{\varphi(v)}$, donc si la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse à $\frac{1}{v^2}$ et si au lieu de cela on admet cette résistance proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse, il devient proportionnel à $\frac{1}{v^4}$. On est donc conduit, en faisant cette substitution, si on adopte un coefficient de résistance moyen, de façon que la trajectoire soit peu altérée, à prendre pour les grandes vitesses un rayon de courbure beaucoup trop petit et au lieu de cela beaucoup trop grand pour les faibles vitesses. De telle sorte que, tout en ayant une trajectoire sensiblement exacte, le résultat auquel on arrive pour le mouvement du projectile autour de son centre de gravité est complètement inexact.

Je ferai d'ailleurs remarquer en terminant, que les méthodes que j'ai exposées dans le présent mémoire peuvent s'appliquer quelle que soit la loi de résistance admise, et qu'elles pourraient servir, si l'on disposait d'expériences suffisantes, à déterminer la loi de la résistance. En particulier on pourrait, je crois, assez facilement, se rendre compte si le couple dû au phénomène de Magnus a réellement une influence sensible ; cette influence devrait être surtout appréciable pour les grandes vitesses, lorsque le nombre de révolutions de l'axe de figure autour de la tangente est très considérable (1).

---

(1) Lorsque s est grand.

Note au sujet de la théorie du mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité donnée par M. Cranz dans le 1e volume de son Traité de Balistique (1).

Dans son nouveau traité de balistique, dont le premier volume a paru en 1910, ouvrage fort intéressant et remarquable a bien des points de vue, M. Cranz revient sur la question du mouvement du projectile autour du centre de gravité (2).

La théorie qu'il présente de ce phénomène appelle toutefois certaines remarques que je vais indiquer.

1° M. Cranz prend pour variable l'inclinaison de l'axe du projectile sur l'horizon inclinaison qu'il désigne par η et il suppose que cet angle reste assez petit pour que l'on puisse négliger son carré devant l'unité. Sans aucun doute cette hypothèse est admissible, pour le tir tendu, dans l'étude du mouvement du centre de gravité, mais il y a lieu de remarquer que l'angle δ de la tangente à la trajectoire avec l'axe de figure est beaucoup plus petit que η, même dans le cas du tir tendu, de sorte que cet angle δ, qu'il s'agit de calculer pourra être plus petit que les termes en η^2 que l'on a négligé.

2° M. Cranz pose

$$M = \frac{W_s a \cos \vartheta}{\sin \alpha}$$

où W_s désigne la composante de la résistance de l'air normale à l'axe du projectile, a la distance du centre de gravité où la résistance de l'air rencontre l'axe, ϑ l'angle de la tangente à la trajectoire avec l'horizon α l'angle de la tangente avec l'axe du projectile (que j'ai désigné par δ). Il suppose (3) alors que le mouvement du projectile est partagé en intervalles assez petits pour que dans chacun d'eux on puisse remplacer M par une valeur moyenne constante. Pour justifier cette manière de faire il dit (4) que les calculs faits avec la loi de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse font voir que M varie lentement. Ceci n'est pas exact, les calculs auxquels M. Cranz fait allusion montrent *que pour une valeur donnée de v*, M varie lentement avec α, mais au lieu de cela, M, qui contient en facteur la résistance de l'air, varie très rapidement avec la vitesse v, surtout dans le cas du tir tendu qui est celui que suppose M. Cranz. La manière d'agir employée par lui exige que l'on partage la trajectoire en une série d'arcs assez petits pour que sur chacun d'eux on puisse regarder la vitesse et la résistance de l'air comme constantes, en les remplaçant par une valeur moyenne.

---

(1) *Lehrbuch der Ballistik* von C. Cranz, erster Band. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1910.

(2) Chapitre 10.

(3) Voir pages 317 et 318.

(4) Page 318.

3° M. Cranz part des deux systèmes d'équations (¹)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} - \frac{A-C}{A} rq &= \frac{M}{A}(-\eta \cos rt - \psi \sin rt + \cos rt \operatorname{tg} \varphi) \\ \frac{dq}{dt} + \frac{A-C}{A} rp &= -\frac{M}{A}(-\eta \sin rt + \psi \cos rt + \sin rt \operatorname{tg} \varphi) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= -p \sin rt - q \cos rt \\ \frac{d\eta}{dt} &= -p \cos rt + q \sin rt \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

et il dit que ces deux systèmes ne peuvent être intégrés que par approximation (²), ce qui est inexact ainsi que nous le verrons bientôt, de plus il indique un moyen d'intégration approché qui consiste à poser (³)

$$p = f_1 \cos rt + f_2 \sin rt + p_1 \qquad -\eta = f_3 \cos rt + f_4 \cos rt + \eta_1$$
$$q = f_2 \cos rt - f_1 \sin rt + q_1 \qquad \psi = f_4 \cos rt - f_3 \sin rt + \psi_1$$

et à négliger

$$\frac{df_1}{dt} \text{ devant } rf_2\,; \qquad \frac{df_2}{dt} \text{ devant } f_1 r\,;\ldots$$

en se fondant sur ce que r est grand par rapport à $f_1, f_2, \ldots$ Mais

---

(¹) Page 317.
(²) Page 323.
(³) Page 318.

nous allons voir que $\frac{df_3}{dt}$ par exemple est précisément de l'ordre de rf_4.

En effet, par la méthode d'intégration approchée M. Cranz obtient

$$f_3 = \frac{q_1}{r},\ f_4 = \frac{p_1}{r},\ p_1 = \mathrm{C}' \sin \beta_1 + \mathrm{D}' \cos \beta_1,\ q_1 = \mathrm{C}' \cos \beta_1 - \mathrm{D}' \sin \beta_1$$

où C′ et D′ sont des constantes et où

$$\beta_1 = \frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{\mathrm{A}} rt + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}r} t$$

On déduit de là, r étant constant,

$$\frac{df_3}{dt} = -\frac{1}{r}(\mathrm{C}' \sin \beta_1 + \mathrm{D}' \cos \beta_1) \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{p_1}{r}\left[\left(1 - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) r + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}r}\right]$$

ou

$$\frac{df_3}{dt} = -f_4 r \left[\left(1 - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}r^2}\right]$$

En négligeant donc $\frac{df_3}{dt}$ devant $f_4 r$ on néglige une quantité du même ordre que celle que l'on conserve, la méthode employée n'est donc pas rigoureuse.

Nous allons faire voir de plus que, lorsqu'on suppose M constant l'intégration des systèmes (14) et (15) se ramène à celui d'une équation linéaire à coefficients constants et de plus, que si on suppose M fonction de la vitesse, l'intégration de ces systèmes se ramène à celui de l'équation (9) de mon mémoire publié par l'Académie de Stockholm et que par suite il peut s'intégrer par les procédés que j'ai indiqués sans être obligé de partager la trajectoire en arcs successifs.

Pour intégrer les systèmes (14) et (15) multiplions la seconde équation du système (14) par i (¹) et ajoutons à la première, nous aurons

$$(1) \quad \frac{d(p + qi)}{dt} + \frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{\mathrm{A}} ri(p + qi) = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}(\eta + \psi i) e^{-rit} + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} \operatorname{tg} \varsigma\, e^{-rit}$$

(¹) $i = \sqrt{-1}$.

Multiplions de même la première équation (15) par i et ajoutons à la seconde, nous aurons

(II) $$\frac{d(\eta + \psi i)}{dt} = -(p + qi)e^{rit}$$

Si nous posons alors

(III) $$\eta + \psi i = z$$

nous aurons

$$p + qi = -\frac{dz}{dt}e^{-rit}$$

$$\frac{d(p + qi)}{dt} = -\frac{d^2z}{dt^2}e^{-rit} + ri\frac{dz}{dt}e^{-rit}$$

Portons alors ces valeurs dans l'équation (I), elle devient

(IV) $$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{C}{A}ri\frac{dz}{dt} - \frac{M}{A}z = -\frac{M}{A}\operatorname{tg}\vartheta$$

équation différentielle linéaire.

Cette équation ne diffère pas au fond de l'équation (22), page 35 (¹), de mon mémoire publié en 1894 dans le Mémorial de l'Artillerie de la Marine. Si en effet on remplace tg ϑ par ϑ, ce qui est permis, vu que l'équation a été obtenue en négligeant les termes en ϑ^2 devant l'unité et que l'on pose

$$z = u + \vartheta$$

nous aurons

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{C}{A}ri\frac{du}{dt} - \frac{M}{A}u = \frac{C}{A}ri\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{d\vartheta^2}{dt^2}$$

où pour passer des notations de M. Cranz aux miennes on doit poser

$$\frac{Cr}{A} = 2K \qquad \frac{M}{A} = KHv^2$$

et remplacer u par z.

(¹) Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité et sur les conditions de stabilité de ces projectiles. (Extrait du Mémorial de l'Artillerie de la Marine 1894). Cette équation est également reproduite dans mon mémoire publié par l'Académie de Stockholm en 1904 (équations (8) et (9), pages 286 et 289).

Or j'ai intégré cette équation, sans supposer M constant et par suite sans être obligé de partager la trajectoire en une série d'arcs successifs, arcs dont l'amplitude devrait être très petite, car M qui contient v^2 en facteur varie très rapidement avec la vitesse.

Si on traite M comme une constante, ainsi que le fait M. Cranz, l'équation (IV) devient une équation différentielle linéaire *à coefficients constants* et il n'est par suite réellement pas nécessaire d'employer une méthode d'approximation pour l'intégrer, puisque l'intégrale exacte s'obtient avec facilité.

On a pour cette intégrale exacte.

$$\text{(V)} \qquad z = \mathrm{H}e^{\alpha_1 it} + \mathrm{K}e^{\alpha_2 it} + \frac{\mathrm{M}ie^{\alpha_1 it}}{\mathrm{A}(\alpha_1 - \alpha_2)} \int \operatorname{tg} \vartheta e^{-\alpha_1 it} dt$$

$$- \frac{\mathrm{M}ie^{\alpha_2 it}}{\mathrm{A}(\alpha_1 - \alpha_2)} \int \operatorname{tg} \vartheta e^{-\alpha_2 it} dt$$

où $\alpha_1 i$ et $\alpha_2 i$ sont les racines de l'équation caractéristique de l'équation sans second membre

$$\text{(VI)} \qquad \lambda^2 - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} ri\lambda - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} = 0 \ (^1)$$

où on a par suite

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{C}r}{2\mathrm{A}}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\mathrm{MA}}{\mathrm{C}^2r^2}}\right) \qquad \alpha_2 = \frac{\mathrm{C}r}{2\mathrm{A}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\mathrm{MA}}{\mathrm{C}^2r^2}}\right)$$

Si d'ailleurs on suppose $\frac{4\mathrm{MA}}{\mathrm{C}^2r^2}$ petit, on aura en négligeant les termes du carré de cette quantité

$$\text{(VII)} \qquad \alpha_1 = \frac{\mathrm{C}r}{\mathrm{A}} - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{C}r}, \qquad \alpha_2 = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{C}r}$$

Mais une intégration par parties donne

$$\int \operatorname{tg} \vartheta e^{-\alpha_1 it} dt = \frac{ie^{-\alpha_1 it}}{\alpha_1} \operatorname{tg} \vartheta - \frac{i}{\alpha_1} \int e^{-\alpha_1 it} \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} dt$$

---

(1) On a donc par hypothèse

$$-\alpha_1^2 + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} r\alpha_1 - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} = 0 \qquad -\alpha_2^2 + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} r\alpha_2 - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} = 0$$

Mais lorsqu'on ne tient pas compte de l'influence du mouvement du projectile autour de son centre de gravité sur le mouvement de ce point, on a

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{g\cos\vartheta}{v} = -\frac{g\cos^2\vartheta}{v_x}\ (^1)$$

donc

$$\int \operatorname{tg}\vartheta\, e^{-\alpha_1 it}\,dt = \frac{ie^{-\alpha_1 it}}{\alpha_1}\operatorname{tg}\vartheta + \frac{i}{\alpha_1}\int \frac{g}{v_x}\,e^{-\alpha_1 it}\,dt$$

ou si dans l'intégrale du second membre nous remplaçons ainsi que le fait M. Cranz v_x par une valeur moyenne constante.

$$\int \operatorname{tg}\vartheta\, e^{-\alpha_1 it}\,dt = \frac{ie^{-\alpha_1 it}}{\alpha_1}\operatorname{tg}\vartheta - \frac{1}{\alpha_1^2}\,\frac{g}{v_x}\,e^{-\alpha_1 it}$$

de même

$$\int \operatorname{tg}\vartheta\, e^{-\alpha_2 it}\,dt = \frac{ie^{-\alpha_2 it}}{\alpha_2}\operatorname{tg}\vartheta - \frac{1}{\alpha_2^2}\,\frac{g}{v_x}\,e^{-\alpha_2 it}$$

On aura donc, toutes réductions faites,

$$z = \mathrm{H}e^{\alpha_1 it} + \mathrm{K}e^{\alpha_2 it} + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}\alpha_1\alpha_2}\operatorname{tg}\vartheta + \frac{\mathrm{M}i(\alpha_1+\alpha_2)}{\mathrm{A}\alpha_1^2\alpha_2^2}\,\frac{g}{v_x}.$$

Mais l'équation (VI) donne

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\mathrm{C}r}{\mathrm{A}}.$$

De sorte que l'on a en définitive

$$z = \mathrm{H}e^{\alpha_1 it} + \mathrm{K}e^{\alpha_2 it} + \operatorname{tg}\vartheta + \frac{g\mathrm{C}ri}{\mathrm{M}v_x}.$$

Pour déterminer H et K nous remarquerons que l'on a

$$z_0 = \eta_0 + i\psi_0 = v_0$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = -p_0 - q_0 i$$

---

(1) v_x désignant la composante horizontale de la vitesse.

puisque

$$\eta_0 = \vartheta_0 \qquad \text{et} \qquad \psi_0 = 0.$$

Nous aurons donc, en supposant toujours v_x remplacé par une valeur moyenne (1)

$$\vartheta_0 = \mathrm{H} + \mathrm{K} + \operatorname{tg} \vartheta_0 + \frac{g\mathrm{C}ri}{\mathrm{M}v_x}$$

$$-p_0 - q_0 i = \mathrm{H}\alpha_1 i + \mathrm{K}\alpha_2 i - \frac{g}{v_x} \text{ (2)}.$$

D'ailleurs avec l'approximation admise par M. Cranz on doit prendre $\vartheta_0 = \operatorname{tg} \vartheta_0$, puisque l'on néglige les termes en ϑ^2 devant l'unité.

On aura alors

$$\mathrm{H} + \mathrm{K} = -\frac{g\mathrm{C}ri}{\mathrm{M}v_x}$$

$$\mathrm{H}\alpha_1 + \mathrm{K}\alpha_2 = -\frac{gi}{v_x} + p_0 i - q_0$$

d'où, en tenant compte des valeurs (VII) de α_1 et α_2,

$$\mathrm{H}(\alpha_1 - \alpha_2) = p_0 i - q_0 \text{ (3)}$$

$$\mathrm{K}(\alpha_1 - \alpha_2) = q_0 - p_0 i - (\alpha_1 - \alpha_2)\frac{g\mathrm{C}ri}{\mathrm{M}v_x}.$$

Nous avons donc en définitive

$$\eta + i\psi = \frac{p_0 i - q_0}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 i t} + \left(\frac{q_0 - p_0 i}{\alpha_1 - \alpha_2} - \frac{g\mathrm{C}ri}{\mathrm{M}v_x}\right) e^{\alpha_2 i t} + \operatorname{tg} \vartheta + \frac{g\mathrm{C}ri}{\mathrm{M}v_x}.$$

D'où en égalant les parties réelles et les parties imaginaires et séparant les termes qui dépendent de p_0 et q_0 de ceux qui n'en dépendent pas, comme le fait M. Cranz en posant par suite (4)

---

(1) Et prenant par suite $\frac{dv_x}{dt} = 0$.

(2) Puisque $\frac{d(\operatorname{tg} \vartheta)}{dt} = -\frac{g}{v_x}$.

(3) On déduit en effet des valeurs de α_1 et α_2

$$-\frac{gi}{v_x} + \frac{g\mathrm{C}r\alpha_2 i}{\mathrm{M}v_x} = 0, \quad \frac{gi}{v_x} - \frac{g\mathrm{C}r\alpha_1 i}{\mathrm{M}v_x} = \frac{g\mathrm{C}ri}{\mathrm{M}v_x}\left(2\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{C}r} - \frac{\mathrm{C}r}{\mathrm{A}}\right) = -\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)\frac{g\mathrm{C}ri}{\mathrm{M}v_x}$$

(4) Et remplaçant $\operatorname{tg} \vartheta$ par ϑ puisque nous négligeons les termes en ϑ^2 devant l'unité.

$$\eta = \eta_r + \eta_n \qquad \psi = \psi_r + \psi_n$$

on aura

$$\eta_r = \vartheta + \frac{gCr}{Mv_x} \sin \alpha_2 t$$

$$\psi_r = \frac{gCr}{Mv_x}\left(1 - \cos d_2 t\right)$$

$$\eta_n = \left\{ p_0(\sin \alpha_2 t - \sin \alpha_1 t) + q_0(\cos \alpha_2 t - \cos \alpha_1 t) \right\} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$\psi_n = \left\{ q_0(\sin \alpha_2 t - \sin \alpha_1 t) - p_0(\cos \alpha_2 t - \cos \alpha_1 t) \right\} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

où

$$\alpha_1 = \frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}, \qquad \alpha_2 = \frac{M}{Cr}, \qquad \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{Cr}{A} - \frac{2M}{Cr}.$$

En comparant ces formules avec celles données par M. Cranz (page 325, tome I) on constate que l'on a bien

$$rt - \beta_1 = \alpha_1 t, \qquad \beta_2 = \alpha_2 t$$

mais dans les expressions de η_n et ψ_n le dénominateur au lieu d'être

$$\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}$$

est

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{Cr}{A} - \frac{2M}{Cr}.$$

Les formules de M. Cranz sont donc inexactes, cette inexactitude tient évidemment à ce que M. Cranz emploie une méthode d'intégration approchée (¹) où, comme je l'ai fait voir (page 66), il néglige des termes de même ordre que ceux qu'il garde, il n'est donc pas étonnant que cette méthode le conduise à des résultats inexacts.

On doit remarquer d'ailleurs que même pour arriver à ces résultats inexacts, M. Cranz doit corriger d'une façon, en réalité

(¹) Il est d'ailleurs étrange de recourir à une méthode approchée pour intégrer une équation qui, comme je l'ai fait voir, s'intègre sans peine exactement.

fort arbitraire (¹), les résultats que lui donne sa méthode. Cette méthode lui donne en effet (²)

$$rt - \beta_1 = \left(\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Ar}\right)t$$

au lieu de

$$\left(\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}\right)t$$

et pour le dénominateur de η_n et ψ_n,

$$r - N = r - \frac{M}{Cr}$$

au lieu de

$$\frac{Cr}{A} - \frac{M}{Cr}.$$

Mais si la première correction est suffisante, la seconde ne l'est pas et malgré cette correction fort arbitraire les valeurs de η_n et ψ_n n'en restent pas moins inexactes.

De plus, ce qui précède met bien en évidence d'une part l'inconvénient du mauvais choix de variables adoptées, car en négligeant les termes en ϑ^2 devant l'unité on néglige, même pour le cas du tir tendu, des quantités plus considérables que l'angle de la tangente avec l'axe de figure qu'il s'agit de calculer, et d'autre part on voit également la grave cause d'erreur que l'on introduit en remplaçant partout la vitesse par une valeur moyenne constante. En effet, dans les intégrations on est conduit à négliger $\frac{dv_x}{dt}$ qui pour les cas des grandes vitesses a une valeur considérable, car il ne faut pas oublier que dans le cas du tir aux grandes vitesses M et r varient très rapidement.

(¹) Page 323.

(²) Page 318.

Quelques remarques sur le principe de la “ tendance des rotations au parallélisme „ énoncé en 1852 par Léon Foucault

par **HENRY JANNE**

Docteur en Sciences physiques et mathématiques, Ingénieur civil des Mines,
Ingénieur-électricien, Répétiteur à l'Université de Liége

Nous avons l'honneur de présenter aux membres de la Première Section quelques remarques sur le principe de la « tendance des rotations au parallélisme » que Léon Foucault énonça en 1852 après avoir fait ses brillantes expériences du gyroscope (¹).

I. Il convient d'abord de rappeler en quelques mots à quel corps le principe est montré applicable et dans quel sens il doit être entendu. Cela fait, on pourra comparer les résultats rappelés à l'énoncé du principe donné par Foucault lui-même.

II. Le petit Travail (²) que nous remettons aux membres présents de la Section nous permettra d'être brefs. Si les honorables membres veulent bien prendre connaissance du contenu de ses quelques pages, ils feront les remarques suivantes :

1° Le système dont nous étudions un cas particulier de mouvement est un *corps solide de révolution autour d'un axe* Oz, *suspendu par son centre de gravité* O, qui est supposé absolument

---

(¹) COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, t. XXXV, 1852, pp. 421, 424, 602 ; RECUEIL DES TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE LÉON FOUCAULT, mis en ordre par C.-M. Gariel. Paris, Gauthier-Villars. 1878, pp. 401-420.

(²) *Note sur le couple qui produit, dans le gyroscope, la « tendance des axes au parallélisme »*, Extrait du BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'A. E. E. S., Liége, Nouvelle série, 13ᵉ année, novembre et décembre 1910, nᵒˢ 1 et 2.

fixe ; ce corps peut être homogène ou non, mais est composé d'un ensemble de circonférences matérielles uniformément chargées ayant toutes leur centre situé sur l'axe de révolution : par suite, le centre de gravité O du corps est situé sur cet axe ;

2° Ce corps peut recevoir, autour de cet axe, un mouvement « propre » de rotation (angle φ) qui est l'un des *trois degrés* de mouvement partiel composant le mouvement total du corps autour du point O ; dans notre étude, ce degré de mouvement est toujours supposé *naturel* et par conséquent *uniforme* : $\frac{d\varphi}{dt} = \mu$: cette rotation peut lui être communiquée par une impulsion vive initiale, par exemple par le déroulement rapide d'une cordelette bobinée préalablement sur l'axe matériel (¹) du corps. Outre ce mouvement propre uniforme autour de Oz, le corps peut encore recevoir un mouvement « de précession » (angle ψ) que nous supposons généralement *forcé*, mais *uniforme* : $\frac{d\psi}{dt} = \nu$, autour d'un axe absolument fixe Oz_1 passant par O ; enfin le troisième degré de mouvement est un mouvement « de nutation » dans lequel l'inclinaison $\theta =$ angle z_1Oz varie. En général, si les deux premiers mouvements (d'entraînement) sont communiqués au corps et que la nutation θ soit maintenue constante par des liens convenablement choisis, le corps exerce sur ces liens une *réaction d'inertie* sous forme d'un couple (statique) de forces. Si au contraire on laisse varier la nutation de l'axe Oz (²), cette réaction d'inertie se transforme en un *couple* (de forces) *relatif* $\overline{W}$ qui produit un *mouvement relatif* en nutation, dans le plan z_1Oz, de l'axe de révolution Oz (³).

(¹) C'est-à-dire un axe cylindrique faisant partie du corps, dont Oz est l'axe géométrique.

(²) En permettant à cet axe d'osciller dans le plan mobile z_1Oz [passant par l'axe fixe Oz_1 et participant, autour de ce dernier axe, au seul mouvement de précession (uniforme)].

(³) Dans la figure dessinée dans notre *Opuscule*, nous avons, pour fixer les idées, adopté, pour l'orientation des trièdres employés, la « convention à gauche » et, pour sens positif de rotation, celui du mouvement des aiguilles d'une montre.

Le couple $\overline{W}$ a pour axe la perpendiculaire OU en O au plan mobile z_1Oz et a pour mesure, en intensité et sens (¹) :

$$W = -C\mu\nu \sin\theta - (C - A)\nu^2 \sin\theta \cos\theta,$$

où C, A sont les moments d'inertie, en O, polaire et équatorial du corps de révolution (²).

Ce couple tend généralement à rapprocher le support de l'axe Oz de celui de l'axe fixe Oz_1, de telle façon que les vecteurs $\overline{\mu}$, $\overline{\nu}$, représentant les rotations uniformes *propre* et de *précession*, aient même support et même sens. C'est dans ce mouvement relatif en nutation que se manifeste la *tendance des axes de rotation au parallélisme* ;

3° Le couple W est *pendulaire* et donne naissance à des oscillations, en θ, de l'axe Oz autour de sa position Oz_1 d'équilibre stable ; ces oscillations sont fournies, si l'on néglige les frottements, par l'intégration de l'équation

$$(A + A')\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\mu\nu \sin\theta - (C - A)\nu^2 \sin\theta \cos\theta,$$

où A′ désigne le moment d'inertie, par rapport à OU, de la partie de l'appareil de suspension du corps qui participe au mouvement de nutation. Mais en fait les résistances passives de cet appareil et le frottement du corps contre l'air amortissent assez rapidement ces oscillations (théoriquement éternelles), et le vecteur $\overline{\mu}$ ne tarde guère à venir se mettre en coïncidence de support et de sens avec le vecteur $\overline{\nu}$;

4° Le principe souffre des exceptions. Le couple W peut être nul, et alors il n'y pas plus « tendance au parallélisme » (³). Ce couple peut même avoir le sens opposé à celui du couple qui produirait le parallélisme avec le même sens : dans ce cas la « tendance » change de sens et $\overline{\mu}$ tend encore à se mettre en

---

(¹) Après avoir fait choix d'une direction positive convenable sur OU.

(²) Voyez encore une démonstration très intuitive donnée dans le quatrième fascicule du célèbre ouvrage *(Ueber die Theorie des Kreisels)* de F. Klein et A. Sommerfeld (Leipzig, 1910, chap. IX, § 1).

(³) Le mouvement de précession régulière correspondant est alors le *mouvement complètement naturel* du corps de révolution.

coïncidence de support, mais *non plus en coïncidence de sens* avec ν ;

5° Le principe peut être facilement généralisé de la façon suivante : Si, en vertu de certaines liaisons, l'axe Oz ne peut plus se placer en coïncidence de support avec l'axe fixe Oz_1, mais est astreint à se mouvoir dans un plan qui, bien que lié invariablement (sous une inclinaison λ constante) à ce dernier axe et participant, autour de lui, au mouvement ν de précession uniforme, ne passe plus par lui, l'axe Oz tend encore à former *l'angle minimum* $\theta = \lambda$ avec Oz_1, c'est-à-dire oscille autour de la projection orthogonale Oz'_1 de Oz_1 sur le plan d'oscillation et finit par coïncider, en support, avec elle (¹). Dans ce sens on peut toujours dire qu'il y a « tendance au parallélisme » ;

6° Nous ne démontrons nullement le principe pour un corps solide *quelconque*, c'est-à-dire n'ayant pas de *symétrie mécanique* par rapport à un axe ; mais *nous ne nions, en aucune façon, que le principe puisse lui être appliqué sous certaines restrictions.*

III. Voici maintenant comment Léon Foucault énonce le principe (²) :

« *Quand un corps tourne autour d'un axe principal et qu'une force ou qu'un système de forces tend à produire une rotation nouvelle non parallèle à la première, l'effet résultant est un déplacement de l'axe de rotation primitive qui se dirige vers l'axe de rotation nouvelle par le chemin favorable au parallélisme des deux rotations.* »

1° Remarquons tout d'abord que Foucault parle d'un corps solide quelconque et ne dit pas expressément qu'il est suspendu par son centre de gravité. Les démonstrations expérimentales, aussi bien que notre démonstration analytique, n'établissent le principe que pour un corps solide *de révolution* (au sens méca-

---

(¹) C'est le principe ainsi modifié qui règle le mouvement de la *boussole gyroscopique de déclinaison (expérience d'orientation* de Foucault) ; c'est lui aussi qui intervient généralement dans la théorie du *barogyroscope* de Ph. Gilbert.

Le couple W' qui produit alors le mouvement de Oz a alors la même expression que le couple W précédent, avec cette différence cependant que ν est remplacé par $\nu \cos \lambda$.

(²) COMPTES RENDUS, t. XXXV, p. 602 ; RECUEIL..., p. 413.

nique) autour d'un axe et suspendu par son centre de gravité O (qui se trouve alors sur cet axe).

Quant aux considérations théoriques de Foucault (¹), elles n'ont pas grande valeur démonstrative, comme nous le verrons plus loin (n° V).

2° Sa « force » ou son « système de forces » peut toujours, en définitive, se réduire à une résultante unique, passant par le point fixe O et détruite par la réaction de ce point, et à un couple de forces qui est, dans notre démonstration, le couple extérieur capable de produire le mouvement (généralement forcé) uniforme de précession.

3° Les mots « tend à produire une rotation nouvelle » ne sont pas parfaitement clairs. Il eût été, ce nous semble, préférable de dire : « semblerait devoir produire », ou mieux : « produirait, si » le corps ne possédait pas de rotation propre autour de son axe » de révolution... »

4° L' « effet résultant » dont parle Foucault est un mouvement relatif, en nutation, de l'axe de figure Oz du corps.

5° « Un déplacement de l'axe de rotation primitive » est ici, comme nous venons de le dire, un déplacement relatif, en nutation, de l'axe de révolution Oz, qui d'ailleurs était l'axe instantané (de rotation) primitif du mouvement absolu du corps, avant qu'on ne lui eût communiqué le mouvement de précession et qu'il n'eût pris lui-même, du chef de son inertie, un mouvement en nutation.

6° « Qui se dirige vers l'axe de rotation nouvelle... » L'axe de rotation nouvelle est l'axe Oz_1 du mouvement d'entraînement en précession. Les mots « se dirige vers » pourraient laisser croire que Foucault ignore que le mouvement en nutation de Oz soit *pendulaire ;* néanmoins il n'en est rien : nous verrons plus loin (n° V) qu'il est absolument hors de doute que Foucault a parfaitement observé (et même deviné) le caractère oscillatoire de ce mouvement.

7° « Par le chemin favorable... » Imprécision dans les termes. En fait, si le plan d'oscillation de Oz passe par Oz_1, le parallélisme s'obtient rigoureusement en peu de temps ; s'il ne passe pas par cet axe, Oz arrive rapidement en une position Oz'_1 faisant l'angle minimum avec Oz_1 (voyez n° II, 5°).

(¹) Comptes Rendus, t. XXXV, pp. 424-425 ; Recueil..., pp. 406-408.

8° « Au parallélisme des deux rotations ». Foucault veut dire parallélisme des supports des vecteurs représentant les rotations *propre* et *de précession*. Il aurait pu avantageusement appuyer, insister sur la coïncidence, non seulement *en support*, mais encore *en sens* des deux rotations $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, quitte à revenir dans la suite aux cas d'exception.

IV. Avant de reproduire sa démonstration théorique, jetons un coup d'œil sur les expériences qu'il invoque à l'appui de son principe.

Remarquons d'abord qu'il énonce ce dernier pour résumer en quelques mots les résultats de ses propres expériences (¹) de la boussole gyroscopique, car, avant de formuler sa règle, il commence par dire :

« On peut énoncer ainsi le principe qui m'a servi de guide dans mes recherches sur l'*orientation* et sur l'*inclinaison* des corps tournants... » Effectivement ses expériences avec la boussole gyroscopique (²) sont d'excellentes confirmations du principe tel que nous l'entendons.

Mais peu après vient une confusion assez grave : en effet il continue, après l'énoncé du principe (³) :

« Dans les phénomènes d'orientation et d'inclinaison, la rotation nouvelle et communiquée est une composante variable du couple terrestre (⁴). Mais en combinant artificiellement deux rotations ensemble, on peut varier à l'infini les expériences propres à démontrer le principe précédent ; je n'en citerai que deux.

» Que l'on prenne un corps animé d'un mouvement de rotation très rapide tel que le tore que j'ai choisi comme présentant un grand moment d'inertie sous une petite surface, et qu'on le fasse

---

(¹) Faites avec son gyroscope auquel il ne laisse plus, vis-à-vis de la Terre, que *deux* degrés de liberté, expériences qu'il nomme « expérience d'orientation » et « expérience d'inclinaison » par opposition à celle *de déviation* dans laquelle il laisse à son appareil ses *trois* degrés de liberté [Voyez RECUEIL..., pp. 416-418].

(²) RECUEIL... : *Instructions sur les expériences du gyroscope*, pp. 418-419.

(³) RECUEIL... : *Sur quelques expériences tendant à démontrer la tendance des rotations au parallélisme*, pp. 413-414.

(⁴) On voit que le langage de Foucault est, comme celui de Poinsot, souvent incorrect : la rotation d'entraînement n'est pas un couple d'impulsion.

reposer sur un point fixe par un autre point quelconque pris sur le prolongement de son axe horizontalement situé, on aura à considérer à chaque instant 1°) le couple qui anime le corps et dont l'axe horizontal passe au point d'appui ; 2°) un couple dû à la pesanteur et dont l'axe horizontal que j'appellerai axe de chute est perpendiculaire à l'axe de rotation primitive (¹).

» Puisque ces deux axes sont dans le plan horizontal, le déplacement aura lieu dans ce plan (²) ; mais comme l'axe de chute est essentiellement perpendiculaire sur l'autre, il en résulte que celui-ci ne saurait l'atteindre. En conséquence le corps circule sans tomber autour du point d'appui et d'autant plus lentement que sa rotation est plus rapide (³).

Cette expérience n'est en réalité que l'exagération du phénomène de précession ; mais elle est tellement saillante, elle contredit si directement les prévisions habituelles de nos sens que j'ai cru devoir la produire à l'appui de la tendance des rotations au parallélisme.... (⁴) ».

Ailleurs (⁵) Foucault, après l'exposé du mode opératoire à suivre pour les expériences de la boussole gyroscopique, revient encore au même problème :

« Cette théorie de la concordance des rotations conduit à une conséquence qui se vérifie par une expérience curieuse.

» On arme d'un crochet le prolongement de l'axe du gyroscope, et lui ayant communiqué une grande vitesse, on pose l'extrémité du crochet dans une capsule d'acier qui forme le sommet d'un support, puis l'axe étant tant soit peu relevé au-dessus de la direction horizontale, on le lâche ; en obéissant doucement au mouvement de précession qui tend à se produire, bien différent de ce qu'il serait au repos, le gyroscope, abandonné ainsi dans

---

(¹) Même observation. Foucault a le tort de ne pas faire remarquer que le couple du 1° est un *couple d'impulsion* et que celui du 2° est un *couple de forces*.

(²) Foucault veut sans doute parler du déplacement de l'axe de figure Oz ; mais ce qu'il avance n'est vrai que pour l'axe du couple d'impulsion OG (voyez n° V) qui est *mobile vis-à-vis de* Oz.

(³) Cette dernière remarque est très juste.

(⁴) Suit une seconde expérience dans laquelle le tore est placé à l'extrémité d'un pendule conique.

(⁵) RECUEIL.... : *Instructions sur les expériences du gyroscope*, pp. 419-420.

une position qui place sa masse entière en dehors du point d'appui, se soutient en surplomb et circule lentement autour du support. A mesure que la rotation diminue de vitesse, cette translation devient plus rapide et finirait par compromettre la stabilité du système, si l'on ne se hâtait de mettre fin à l'expérience... ».

On voit de suite que Foucault croit pouvoir rattacher *immédiatement* à son principe le mouvement de la *toupie gyroscopique*, c'est-à-dire d'un corps de révolution autour d'un axe Oz, en rotation « propre » rapide autour de cet axe, qui a son centre de gravité situé sur cet axe, mais qui est suspendu par un autre point (fixe) O du même axe (cas d'intégrabilité de Lagrange et de Poisson). On sait (¹) que, si l'*impulsion propre* $C\mu$ de la toupie est suffisamment grande, le mouvement de l'axe Oz *paraît* être un mouvement de précession régulière sur un cône circulaire ayant pour axe la verticale fixe (²) Oz_1 passant par O ; mais qu'*en fait* l'axe Oz engendre, dans son mouvement autour de cette verticale, non pas un cône circulaire (³), mais bien une surface conique « en parapluie », au moins s'il ne reçoit aucune impulsion latérale initiale en précession ; cette surface ne s'écarte que très peu d'un cône circulaire : sa directrice (dans un plan horizontal) est une courbe différant d'une circonférence par de petites dentelures cycloïdales ; l'amplitude de ces dentelures est d'autant moindre que l'impulsion propre est plus grande. Le mouvement correspondant de l'axe Oz est nommé par Klein et Sommerfeld : mouvement de *précession pseudo-régulière* (⁴).

Les deux problèmes sont absolument distincts et ne peuvent légitimement être confondus (⁵). La profonde différence entre

---

(¹) *Ueber die Theorie des Kreisels*, 2^{me} fasc., 1898, chap. V, § 2.

(²) Rigoureusement parlant, la verticale du lieu géographique O n'est pas fixe par rapport à des axes absolus ; mais *pratiquement* on peut le supposer.

(³) Comme Poisson et Résal l'avaient déjà remarqué, le mouvement de précession régulière est cependant un cas particulier qui peut se présenter (lorsque l'impulsion latérale est choisie convenablement) : en fait les équations du mouvement de précession régulière sont des *solutions singulières* des équations différentielles du mouvement. [Voyez THEORIE DES KREISELS, 1er fasc., 1897, chap. III, § 6, p. 177, et 2^{me} fasc., 1898, chap. V, § 1, p. 282].

(⁴) *Theorie des Kreisels*, 2^{me} fasc., chap. IV, § 2, p. 209.

(⁵) *Ibidem*, chap. V, § 3, n^{os} 1-2, pp. 307-308.

leurs résultats, plus sensible encore au point de vue qualitatif qu'au point de vue quantitatif, c'est-à-dire la diversité de nature des deux mouvements (1) de précession régulière et de précession pseudo-régulière, prouve surabondamment la nécessité de la distinction à faire entre ces derniers. Au reste Foucault, dans les lignes que nous avons reproduites, ne confond pas le mouvement absolu *complètement naturel* du corps solide de révolution mobile autour d'un point fixe (mouvement propre uniforme du corps autour de son axe de révolution et mouvement de précession régulière de ce dernier autour d'un axe fixe) et le mouvement *forcé* du même corps soumis à l'action de la pesanteur (2) ; mais voici bien l'erreur qu'il commet.

La « tendance » des axes Oz et Oz_1 au parallélisme se manifeste, pour le corps soustrait à l'action de la pesanteur, non pas évidemment dans le mouvement naturel (3), mais bien dans le cas où un degré de mouvement (4) est forcé (5). Foucault veut appliquer ce résultat au cas de la toupie gyroscopique en supposant que c'est le mouvement « en nutation » (6) qui est forcé, c'est-à-dire réglé par la pesanteur. Mais il ne s'aperçoit pas des distinctions suivantes qu'il est nécessaire de faire :

1° L'axe du couple (de forces) extérieur Ψ qui produit, dans le premier cas, le mouvement uniforme d'entraînement en précession (et qui ne transmet son effet au corps que par l'intermédiaire d'un mécanisme permettant à la nutation de l'axe Oz de varier) est un axe absolument fixe. Dans le second cas, au contraire, l'axe du couple de la pesanteur est essentiellement mobile puisqu'il reste continuellement perpendiculaire au plan mobile z_1Oz tournant autour de la verticale Oz_1 (sensiblement) fixe ;

---

(1) Il faut d'ailleurs remarquer que ce ne sont pas les deux mouvements totaux du corps que nous voulons comparer, mais bien les mouvements en nutation dans le premier cas, en azimut et hauteur dans le second, de l'axe de figure Oz du corps de révolution.

(2) C'est-à-dire non plus suspendu par son centre de gravité.

(3) Qui est un mouvement de précession régulière dans lequel l'axe Oz fait un angle *constant* avec Oz_1.

(4) Celui-ci de précession.

(5) Voyez notre *Opuscule*, pp. 6-8.

(6) Dans ce cas il vaut mieux remplacer le mot « nutation » par « distance zénitale » ou « (complément de la) hauteur ».

2° Au point de vue quantitatif, l'intensité de ce dernier couple est d'ailleurs fonction sinusoïdale de la *distance zénithale* $\theta = z_1Oz$ et ne peut donc produire un mouvement *uniforme* d'entraînement « en hauteur » de l'axe Oz ;

3° Enfin, précisément à cause du 1°, l'axe du couple de la pesanteur fuyant constamment devant Oz, la « tendance au parallélisme » ne pourrait pas recevoir même seulement un commencement d'exécution. D'ailleurs généralement, à l'instant initial et à une infinité d'autres instants, le plan tangent à la surface conique engendrée par Oz dans son mouvement ne passe pas par l'axe du couple de la pesanteur : par exemple, si l'impulsion latérale en azimut est nulle, Oz, à l'instant initial, loin de tendre directement à se mettre en coïncidence avec cet axe, commence par se mouvoir dans le plan d'action de ce couple, donc *normalement à celui qu'il devrait suivre* pour qu'on pût dire qu'il se manifeste une « tendance au parallélisme » (¹).

Foucault semble cependant soupçonner qu'il y ait une distinction à faire, car dans un extrait (²) de sa Note *Sur quelques expériences tendant à démontrer la tendance des rotations au parallélisme* (³), il dit, après avoir formulé son principe :

« L'axe de rotation peut, suivant les cas, être fixe ou mobile et dépendant de la position du corps ; quand il est fixe, le corps tournant tend vers une position définie, c'est ce qui arrive en présence du seul mouvement de la Terre ; quand il est mobile avec l'axe du corps, celui-ci change constamment de direction, sans jamais rencontrer de position d'équilibre, c'est ce qu'on observe dans les phénomènes de précession antérieurement étudiés, et auxquels se rattache l'expérience qui consiste à abandonner à l'action de la pesanteur un corps tournant posé sur un point fixe par l'une ou l'autre extrémité de son axe.... »

(¹) Voyez P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, t. II, 2me éd., 1904, n° 396, et surtout *Theorie des Kreisels*, 2me fasc,, chap. V, §§ 2 et 3.

(²) Présenté le 26 octobre 1852 à l'Académie des Sciences. Voyez Comptes Rendus, t. XXXV, 1852, p. 602.

(³) Recueil..., pp. 413-415.

Au fond Foucault veut donner une règle assez large pour pouvoir contenir, comme cas particuliers, le principe tel que nous l'entendons et le résultat du problème tout différent de Poisson. Mais on vient de voir que cette dernière réduction est loin d'être admissible.

G. Sire, son contemporain, a fait une confusion analogue (1) et a en outre commis d'autres graves erreurs (2).

Plusieurs mécaniciens (3) ont d'ailleurs cherché à ramener l'explication du mouvement de précession pseudo-régulière à la tendance des rotations au parallélisme.

V. Examinons maintenant la démonstration théorique de Foucault. Voici ce à quoi il se borne (4) :

« Pour procéder méthodiquement dans l'exposé de ces faits (5) et pour arriver à les éclairer par de simples considérations empruntées à la mécanique et à la géométrie, j'examinerai d'abord le cas où le corps tournant autour de son axe propre est en même temps assujetti sur un axe vertical autour duquel il est libre de se mouvoir en même temps.... »

En fait le « corps tournant autour de son axe propre » est un corps solide de révolution autour d'un axe Oz, animé d'une rotation propre uniforme autour de cet axe.

On voit aussi que Foucault se prépare à donner la démonstration pour le phénomène « d'orientation » (boussole gyroscopique de déclinaison), c'est-à-dire celui où l'axe de figure Oz du tore de la boussole, astreint à se mouvoir dans le plan horizontal du lieu géographique O, ne peut se disposer parallèlement à l'axe du monde SN, mais tend à prendre la position formant l'angle minimum avec cet axe. Ce choix nous semble assez malheureux, au moins au point de vue didactique, puisque le mouvement relatif de l'axe Oz est gêné par une liaison.

---

(1) Comptes Rendus, t. XXXV, 1852, p. 431 ; Arch. de Genève, t. I, 1858, p. 105.

(2) Voyez Gilbert, *Étude historique et critique sur le problème de la rotation.* (Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles, t. II, 1878, pp. 306-310) ; et *Theorie des Kreisels*, 2me fasc., chap. V, § 3, nos 1-2.

(3) Poggendorff, *Noch ein Wort über die Fesselsche Rotationsmaschine.* (Ann. der Physik, t. XC, 1853, pp. 175, 341) ; F. Heinen, *Ueber einige Rotationsapparate, insbesondere den Fesselschen*, Brunswick, 1857 ; Ph. Gilbert, *op. cit.*, pp. 312-317 ; M. Koppe, *Ueber die Bewegung des Kreisels* (Zeitschrift für die Physik. und Chem. Unterricht, 4me année, 1890) ; Idem, *Zur Kreiselbewegung.* (Ibidem. 9me année, 1896) ; F. Klein et A. Sommerfeld, *op. cit.*, 2me fasc., chap. V, § 3, no 4, pp. 313-315.

(4) Recueil.... : *Sur les phénomènes d'orientation des corps tournants.* pp. 406-408 ; Comptes Rendus, t. XXXV, pp. 424-425.

(5) Expériences d'*orientation* et de *déclinaison.*

Continuons avec Foucault :

« Je supposerai qu'à l'origine le corps ait son axe dirigé de l'Est à l'Ouest et qu'il tourne de droite à gauche, pour l'observateur qui le voit devant lui, ayant lui-même la face tournée vers l'Orient. »

Comme on va s'en apercevoir de suite, notre physicien adopte pour sens positif de rotation celui du mouvement des aiguilles d'une montre (1) : le vecteur représentant le couple d'impulsion propre du tore est alors dirigé vers l'Ouest, si toutefois l'observateur dont il parle voit la moitié *supérieure* (située au-dessus du plan horizontal) du tore tournant de droite à gauche (2).

Foucault poursuit :

« Dans cette situation le mobile est non seulement animé de sa vitesse initiale, mais il ressent encore l'influence de la composante de la rotation diurne autour de la méridienne (3) du lieu qui agit à la façon d'un couple accélérateur (4) dont l'axe est dirigé suivant cette méridienne. Or ce couple, très petit par rapport à celui qui anime le mobile (5), ne s'en compose pas moins avec ce dernier de la manière suivante.

» Si l'on se conforme aux représentations enseignées par

---

(1) En effet il suppose, plus loin, le vecteur représentant le couple d'impulsion dû à la rotation de la Terre dirigé du Nord au Sud.

(2) C'est à tort que M. Gariel met en note, dans le Recueil des Travaux de Foucault, qu' « il faut, pour que l'indication de Foucault soit conforme à la représentation du couple ci-après spécifié, que le corps tourne de droite à gauche *par dessous* ou que l'observateur ait la face tournée vers l'occident. »

(3) Tangente en O au méridien géographique passant par O : cette tangente est évidemment dans le plan horizontal du lieu O.

(4) C'est-à-dire un *couple de forces* : ce couple est celui qui produit le mouvement forcé d'entraînement.

(5) Foucault confond encore ici couple de forces et couple d'impulsion ; au lieu du couple de forces très petit, il aurait dû ajouter géométriquement au couple d'impulsion propre *le produit du couple de forces par l'intervalle de temps* Δt très court considéré.

M. Poinsot, le couple d'impulsion du corps a son axe qui vise vers l'occident ; celui qui provient de la rotation de la terre a son axe qui vise au midi, et l'axe du couple résultant, compris dans le plan des deux autres est donné par la construction du parallélogramme incliné tant soit peu de l'occident au midi ».

On voit que Foucault procède à la composition *parfaitement correcte* des couples d'impulsion : celui dû à l'impulsion propre du corps ; celui, relativement petit, dû au mouvement d'entraînement du globe vis-à-vis d'axes absolus. En fait, il n'obtient pas ainsi le couple d'impulsion *total*, vis-à-vis de tels axes, du corps (¹), mais bien la composante OG de ce couple total qui semble seule l'intéresser ici (²).

On voit aussi qu'il ne commet pas la même erreur que Sire (³) qui construit simplement le parallélogramme des vecteurs « rotations instantanées » et veut en déduire des conséquences dynamiques (⁴). Toutefois, il semble bien, d'après ce qui suit, que Foucault, en confondant les directions de l'axe instantané et du couple d'impulsion et en se faisant une fausse idée du mouvement de ces axes, commet une faute presque aussi grave.

Voici la suite de la démonstration :

« Il en résulte qu'à l'axe principal sur lequel le corps a été primitivement lancé se substituent une suite d'axes instantanés de rotation occupant successivement des positions différentes dans le corps et dans l'espace, et qui s'en vont gagnant peu à peu le plan du méridien ».

L' « axe principal sur lequel le corps a été primitivement (⁵)

(¹) En effet, pour avoir le couple d'impulsion total, on devrait encore ajouter une composante due au mouvement (cherché) en azimut du tore de la boussole.

(²) Au fait, si l'on veut, comme Klein et Sommerfeld, étudier la réaction d'inertie du corps au moyen de la considération du vecteur *impulsion*, c'est la vitesse de l'extrémité du vecteur OG qui donne le couple de réaction d'inertie [*op. cit.*, 4^me^ fasc., 1910, chap. IX, § 1, nº III].

(³) Voyez Gilbert, *op. cit.*, p. 307.

(⁴) Consultez à ce sujet *Theorie des Kreisels*, 2^me^ fasc., chap. V, § 3, nº 3, pp. 310-311.

(⁵) Le mot « primitivement » doit lui-même être entendu d'une manière spéciale : il correspond à un état initial *particulier*, à savoir celui qui précéderait, si c'était possible, la mise en rotation uniforme du globe terrestre. (Au lancé » est l'axe de révolution du corps. Mais que veut dire Foucault par ces mots : « se substituent » ? S'il veut faire simplement remarquer que l'axe instantané OI de rotation (du corps vis-à-vis du globe) (1), change de position par rapport à la Terre et dans le corps, il exprime une chose vraie. Mais, comme il ne rappelle pas un théorème convenable reliant les positions de l'axe de figure Oz, de l'axe d'impulsion OG et de l'axe instantané OI (2), il est douteux qu'il se rende exactement compte des lois du mouvement qui se produit. Il semble plutôt, surtout d'après ce qui suit, qu'il s'imagine que OI coïncide en support avec OG, axe qu'il vient de déterminer par la construction du parallélogramme des couples d'impulsion, et que cet axe OI se meut ainsi avec OG, dans le plan d'oscillation de Oz. Il semble aussi qu'il croie que ces deux axes coïncidents précèdent toujours Oz, dans chaque oscillation simple, d'un angle très petit et variable, pouvant s'annuler aux élongations maxima (3), et que *ces axes traînent ainsi l'axe de figure* Oz *à leur suite* : ce dernier axe est le seul qui, en définitive, doive l'intéresser, puisqu'il est l'axe géométrique de l'axe matériel (seul visible) du corps en rotation. Mais un peu de réflexion montre qu'il ne peut pas en être ainsi. Tout d'abord OI ne peut se trouver dans le plan d'oscillation de Oz, car il possède une composante non nulle suivant la verticale en O ; toutefois OI reste toujours près de ce plan, car cette composante est faible vis-à-vis de la rotation propre μ (qui est grande par hypothèse). De plus, OG, se mouvant dans le plan d'oscillation de l'axe de figure, ne le précède que dans la moitié d'une oscillation simple, coïncide avec lui au moment où il passe par sa position d'équilibre, puis reste en arrière de lui lorsqu'il dépasse cette position, etc. : on voit que, loin de coïncider avec Oz aux élongations maxima de cet axe,

---

moins si l'axe sur lequel le corps a été primitivement lancé, est synonyme d'axe instantané de rotation primitif.)

(1) Pour avoir l'axe instantané du mouvement total du corps, vis-à-vis d'axes absolus, on devrait composer, avec la rotation dont il s'agit ici, celle du mouvement diurne de la Terre.

(2) Il faut bien remarquer que ces trois axes ne sont pas, comme on serait tenté de le croire d'après une remarque de Poinsot, situés dans un même plan, car OI et OG correspondent à deux mouvements partiels *différents*.

(3) Comme on va le voir de suite.

il est au contraire, aux moments correspondants, à sa plus grande distance de Oz (¹). Le phénomène inverse se passe pour l'axe OI : il coïncide avec Oz aux élongations maxima et se trouve à son plus grand écart angulaire de cet axe, lorsqu'il passe par sa position d'équilibre : cet écart ayant lieu dans le plan perpendiculaire au plan d'oscillation (²).

On voit donc qu'il est absolument nécessaire de distinguer l'axe instantané OI de l'axe d'impulsion OG.

Évidemment notre opinion en ce qui concerne l'idée que se fait Foucault des rapports qui unissent les trois axes entre eux n'est pas incontestable, nous le reconnaissons. Mais si telle n'est pas la pensée de notre physicien, comment expliquer qu'il passe directement de OG à OI et d'autre part qu'il se soucie tant du mouvement de l'axe instantané OI qui ne peut, *au moins directement et immédiatement*, le renseigner sur celui de l'axe de figure ? Au reste, la suite de la démonstration laisse croire que, très vraisemblablement, il l'entendait bien ainsi : « En même temps, dit-il, que ce déplacement a lieu, le moment du couple terrestre diminue de valeur, et enfin il s'annule au moment précis où l'axe instantané toujours voisin de l'axe principal atteint le plan du méridien (³). Mais en vertu de cette nouvelle vitesse acquise qui a modifié le mouvement du corps, ce plan est bientôt dépassé ; alors le petit couple terrestre reparaît en sens inverse ; son action rapproche

---

(¹) Soient : θ l'azimut de Oz compté à partir de la méridienne, v' la composante de la rotation terrestre suivant cette méridienne, A le moment d'inertie équatorial du corps. La composante de OG due à l'action de rotation terrestre est $Av' \sin \theta$: cette composante est nulle pour $\theta = 0$ et change de signe avec θ ; enfin sa valeur absolue est maxima avec la valeur absolue de θ.

(²) La composante de OI suivant la verticale en O est $\frac{d\theta}{dt}$, donc nulle aux élongations maxima, et maxima lorsque Oz passe dans le plan méridien.

(³) Si Foucault veut simplement dire que OI, tout *en n'étant pas dans le plan d'oscillation* de Oz, reste très voisin de ce dernier axe, ce qu'il avance ici est parfaitement juste : OI passe dans le plan méridien en même temps que Oz, et le couple d'orientation (qui règle le mouvement en azimut de ce dernier axe) s'annule à ce moment.

Au contraire, dans l'hypothèse que nous croyons bonne, Foucault se trompe, car le couple d'orientation s'annule seulement quand Oz (et non OI, ni même OG) passe dans le méridien.

l'axe instantané de l'axe principal (1), retarde en même temps le mouvement qui les emporte tous deux hors du plan méridien, et quand ils coïncident, ils ont atteint tous deux le maximum de leur excursion (2). Mais le couple terrestre continuant d'agir les sépare de nouveau et les ramène vers le méridien qu'ils dépassent encore, et ainsi de suite.

» Il en résulte en définitive que l'axe principal qui est le seul observable s'anime d'un mouvement oscillatoire très lent autour du méridien, où il finirait par se fixer si la rotation persistait assez longtemps... »

On voit que, somme toute, ces dernières phrases sont parfaitement correctes et, si elles étaient placées après des éclaircissements sur les positions relatives des trois axes, *on n'y verrait que l'achèvement d'une excellente démonstration.* Mais comment croire d'autre part que Foucault ait saisi en un éclair les phénomènes délicats dont nous parlons, alors qu'il s'exprime d'une manière aussi laconique sur ces phénomènes : « Il résulte (de la composition du couple d'impulsion OG) qu'à l'axe principal sur lequel le corps a été primitivement lancé se substituent une suite d'axes instantanés... qui s'en vont gagnant peu à peu le plan du méridien » ? Encore un coup, il devait insister d'autant plus sur les rapports de position existant entre les trois axes que *ces rapports ne sont nullement établis dans les théorèmes de Poinsot*, et pour cause (3).

Pour nous, on ne nous enlèvera pas facilement l'opinion que Foucault confond OI et OG en un seul axe et que cet axe, d'après lui, se mouvrait dans le plan d'oscillation de Oz et traînerait à sa suite ce dernier axe.

Dans cette hypothèse, en effet, les phrases s'enchaînent logiquement l'une à l'autre.

Une chose reste inexplicable dans l'une et l'autre alternative : on ne saisit pas le motif pour lequel Foucault pense que le couple d'orientation W s'annule lorsque non pas Oz, mais OI passe dans le méridien.

---

(1) Ceci est exact.

(2) Ceci est encore correct, s'il s'agit d'*excursion en azimut*, ce qui est manifestement l'idée de Foucault.

(3) En effet, comme nous l'avons déjà fait observer dans une note précédente, Oz, OI et OG ne sont pas dans un même plan.

Enfin, on pourrait objecter à notre thèse que, si telle était la pensée de Foucault, il dirait : « ... A partir du moment où l'axe Oz passe dans le méridien, l'axe OI (coïncidant avec OG), sous l'action du couple d'impulsion terrestre changeant de sens, *passe de l'autre côté* de l'axe de figure... » Mais il ne faut pas oublier que Foucault construit le parallélogramme des couples d'impulsion sur un couple d'impulsion terrestre non pas *indéfiniment petit*, mais *seulement petit* (¹), en sorte que, dans sa pensée (selon nous), OG (avec OI) ne précède pas, dans le plan d'oscillation, Oz d'un angle indéfiniment petit, mais d'un angle petit, variable (avec l'angle θ de Oz avec la méridienne) et décroissant pendant la première moitié de l'oscillation simple sans s'annuler d'ailleurs à la fin de cette moitié : rien d'étonnant dès lors à ce qu'il fasse seulement *diminuer* ce petit angle par le couple terrestre changé de sens, au lieu de le faire annuler, puis changer de signe. Quelles que soient les idées de Foucault (au sujet du phénomène), ce qu'il est essentiel de remarquer, c'est qu'il voit parfaitement le *caractère oscillatoire* du mouvement de Oz en lequel se manifeste la « tendance des rotations au parallélisme », ce que l'énoncé de son principe (²) ne met pas en relief.

VI. Il semble aussi que, pour rendre parfaitement intelligible l'exposé de ses expériences tant de *déviation* que d'*orientation* et d'*inclinaison*, Foucault dût, avant de démontrer quoi que ce fût, rappeler la définition d'*axes absolus* et, pour terminer, montrer que ces expériences prouvent que, *pratiquement*, les axes absolus sont fixes (ou se meuvent, dans une translation uniforme, parallèlement à des axes fixes) par rapport au « solide stellaire » (³).

De plus, il eût été convenable de faire voir que le mouvement

---

(¹) Ce *petit* couple d'impulsion terrestre, correspondant à un intervalle de temps très court Δt (toujours le même ?) doit être remplacé par l'*intégrale géométrique* des couples analogues *élémentaires* et être composé avec le couple d'impulsion propre *initial*.

(²) Voyez plus haut (n° III, 6°).

(³) Voyez à ce sujet E. Pasquier, *La terre tourne-t-elle ?* (Revue de l'Université de Bruxelles, mars 1904, p. 17).

circulaire et uniforme de O, par rapport à de tels axes, n'influe nullement sur le mouvement du corps autour de O, comme E. Guyou l'a si bien montré plus tard (1), pour le problème de la déviation, par un raisonnement de quelques lignes.

Enfin il est bon d'observer qu'une critique très intéressante et très profonde des expériences de Foucault est contenue dans l'ouvrage magistral *Ueber die Theorie des Kreisels* (2).

VII. Notre but, en écrivant ces lignes, n'est pas le moins du monde de chercher à amoindrir le prestige dont le nom de Léon Foucault est entouré : cela semblerait, à bon droit, injuste et prétentieux. Mais nous avons le dessein de fixer l'attention sur la *véritable signification* du principe de la « tendance des rotations » au parallélisme, en même temps que de mettre en garde contre l'*imprécision des mots*, lorsqu'on expose un phénomène aussi complexe que celui régi par ce principe.

Pour éviter le reproche d'audace nous citerons les paroles suivantes que des langues plus autorisées que la nôtre ont prononcées.

F. Klein et A. Sommerfeld, à propos de la confusion citée au n° IV, disent (3) :

« ... Der genannte Irrthum ist keinem geringeren, wie dem berühmten französischen Experimentator Foucault und seinem Konkurrenten Sire passiert... »

Et plus loin, à propos des expériences de Sire et Foucault (4) :

« Die theoretischen Ueberlegungen von Sire... sind indessen nicht einwandfrei, da sie an einer gewissen Vieldeugtigkeit des Wortes Axe leiden (Figurenaxe, Rotationsaxe, Impulsaxe). Etwas Aehnliches lässt sich wohl auch gegen die glänzend geschriebenen

---

(1) Comptes Rendus, t. CVI, 1888.

(2) 3me Fasc., 1903, chap. VIII, section B, § 9, pp. 731-759. Voyez aussi le 4me fasc., 1910, chap. IX, § 7, pp. 845-863, § 10, n° 6, pp. 919-920, et Appendice, p. 955.

(3) 2me Fasc., chap. V, § 3. pp. 308-309. Gilbert (*op. cit.*, p. 307) disait déjà à propos de l'explication donnée par Sire : « Ce raisonnement présente une apparence de simplicité qui en dissimule la complète insuffisance... Foucault même en communiquant sa découverte à l'Académie, donnait une explication semblable ».

(4) 3me Fasc., chap. VIII, section B, § 9, p. 734.

Ausführungen Foucaults sagen ; allerdings beabsichtigen dieselben bei ihrer Kürze mehr beschreibender als beweisender Natur zu sein... »

Et enfin (1) :

« Foucault hatte in geistvoller Weise, mehr durch Intuition als durch zwingende mechanische Schlüsse, das Verhalten des rotierenden Schwungringes an der Erdoberfläche vorhergesagt... »

Comme bien on pense et comme ces auteurs le font expressément observer, Foucault avait moins l'intention de donner une démonstration rigoureuse du principe que d'exposer en quelques lignes le résultat de ses brillantes expériences : c'est ce qui explique le peu de précision dans ses paroles en communiquant les superbes découvertes de sa géniale intuition.

Terminons par ces paroles de Joseph Bertrand (2) :

« On lui a reproché de manquer de rigueur, et sans rigueur, nul ne le conteste, il n'y a plus de géométrie ; c'est là une fausse accusation. M. Foucault, on ne doit pas l'oublier, ne professe pas ; il ignore l'art de présenter ses inventions selon les formes de l'école ; il persuade contre les règles, et ne sait pas réduire démonstrativement ses contradicteurs au silence. Cependant, à prendre ses expressions dans la juste étendue de leur sens véritable, toutes ses assertions sont exactes dans les termes mêmes où il les énonce : il sait toutes les routes de la science du mouvement, il a pénétré au fond de ses théories les plus abstraites, et pour l'embrasser tout entière, il ne lui manque que la manière de savoir... »

Cette docte compagnie nous épargnera l'accusation d'avoir voulu manquer de respect au génie de Léon Foucault.

---

(1) *Ibid.*, p. 759.

(2) Préface du RECUEIL... Paris, 1878, pp. XXVI-XXVII.

Sur une transformation unirationnelle

PAR

J. NEUBERG

1. Soient C_1, C_2, C_3 les points de rencontre d'une transversale quelconque p avec les côtés a_1, a_2, a_3 du triangle $A_1A_2A_3$. On sait que les circonférences (¹) (A_1C_1), (A_2C_2), (A_3C_3) se coupent aux mêmes points P, P'. Réciproquement, P étant un point quelconque du plan $A_1A_2A_3$, les perpendiculaires élevées en P sur les droites PA_1, PA_2, PA_3 rencontrent respectivement les côtés a_1, a_2, a_3 en trois points C_1, C_2, C_3 d'une même droite p.

Je me propose d'étudier la correspondance entre la droite p et le couple PP'.

Les centres C'_1, C'_2, C'_3 des cercles (A_1C_1), (A_2C_2), (A_3C_3) sont situés sur les droites qui joignent les milieux M_1, M_2, M_3 des côtés A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 ; ils appartiennent à une même droite q, appelée la *newtonienne* de p. Soient C''_1, C''_2, C''_3 les symétriques des points C_1, C_2, C_3 par rapport à M_1, M_2 M_3 ; ces points sont situés sur une droite p_1 qui a reçu le nom de *transversale réciproque* de p. Des relations

$$\frac{C'_1M_3}{C'_1M_2} = \frac{C_1A_2}{C_1A_3} = \frac{C''_1A_3}{C''_1A_2}, \cdots$$

il résulte que les droites q et p_1 sont des éléments homologues des deux triangles semblables $M_1M_2M_3$, $A_1A_2A_3$. Ainsi, q est la *complémentaire de la réciproque de p.*

2. Soient H_1, H_2, H_3, H les pieds et le point de concours des hauteurs du triangle $A_1A_2A_3$. Comme les cercles (A_1C_1), (A_2C_2),

---

(¹) Je désigne par *circonférence* (X Y) celle qui a pour extrémités d'un même diamètre les points X, Y. Une même lettre servira aussi à désigner une circonférence et son centre.

(A_3C_3) passent respectivement par H_1, H_2, H_3, ils sont de puissance constante μ par rapport à l'orthocentre H ; leur corde commune PP′ passe donc par H (¹) et l'on a

$$HP.HP' = HA_1.HH_1 = \mu.$$

Il résulte de là que les points P, P′ se correspondent dans une transformation par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant en H et la puissance égale à μ.

3. A un point P correspond en général une droite unique p.

Cependant, lorsque P est en A_1 ou en H_1, les points C_2, C_3 coïncident avec A_1 et l'on peut prendre pour C_1 un point quelconque de a_1. Par suite A_1 et H_1 sont des *points principaux* de la transformation (PP′, p). Il convient de remarquer que si l'on transforme une courbe passant par A_1, il faut prendre pour la droite p qui correspond à A_1 la normale en A_1. On verrait de même que A_2 et H_2, A_3 et H_3 sont des points principaux.

Si le point P s'éloigne à l'infini ou se confond avec H, la droite p se transporte à l'infini. D'ailleurs, dans l'involution constituée par les couples PP′ qui sont situés sur une même droite r menée par H, ce point et le point à l'infini de r sont des éléments conjugués.

A tout point de a_1 autre que A_2, A_3 et H_1 correspond la perpendiculaire en ce point sur a_1.

4. A une droite p correspond en général un couple déterminé PP′.

Cependant, lorsque p coïncide avec a_1, les cercles (A_2C_2), (A_3C_3) se confondent avec le cercle (A_2A_3), et comme le point C_1 est indéterminé (²), on peut prendre pour les points P, P′ les extrémités d'une corde quelconque du cercle (A_2A_3) menée par H. Semblablement, aux droites a_2, a_3 correspondent les extrémités d'une corde quelconque menée par H dans les cercles (A_3A_1), (A_1A_2). Les côtés du triangle $A_1A_2A_3$ sont donc des *droites principales* de notre transformation.

(¹) Par analogie, elle passe aussi par les orthocentres des triangles pa_2a_3, pa_3a_1, pa_1a_2 ; la droite PP′ est donc la directrice de la parabole inscrite au quadrilatère $a_1a_2a_3p$. Ces relations sont bien connues.

(²) Si l'on transforme les tangentes d'une courbe touchant a_1, le point C_1 qui correspond à a_1 est nécessairement le point de contact de a_1.

On a vu ci-dessus que la droite de l'infini a pour points correspondants l'orthocentre H et un point quelconque à l'infini ; on peut donc la considérer comme une droite principale.

5. Faisons maintenant décrire au point P une droite quelconque m ; le point P' décrira une circonférence K passant par H. La circonférence L qui passe par P,P' et touche m, touche également la circonférence K. Le centre L est donc équidistant du point K et d'une droite m' parallèle et distante de m de la quantité HK ; il en résulte que le point L décrit une parabole ayant pour foyer K et pour directrice m'. La droite q, qui est perpendiculaire au milieu du segment PP', touche la parabole en L. En transformant cette courbe par transversales réciproques, on obtient une courbe de la 4^e classe. L'enveloppe de p est également de cette classe.

Le dernier résultat peut être établi directement. En effet, les points C_2, C_3 marquent sur a_2, a_3 des ponctuelles qui sont en correspondance (2, 2) ; car si l'on donne, par exemple, C_2, le point P est l'un des deux points d'intersection de m avec la circonférence (A_2C_2) et chacun de ces points donne un seul point C_3. Par conséquent, la droite C_2C_3 enveloppe une courbe de la 4^e classe touchant les droites a_2, a_3 aux points qui correspondent au point A_1 considéré comme élément de l'autre droite. On voit par là que, si J, J' sont les points d'intersection de m avec la circonférence (A_1A_3), les perpendiculaires menées en ces points sur les droites A_2J, A_2J' rencontrent a_2 aux points de contact de a_2 avec l'enveloppe de p. On construirait de même les deux points de contact de a_3 et de a_1.

6. Soient O le centre de la circonférence $A_1A_2A_3$ et D_1, D_2, D_3 les secondes extrémités des diamètres A_1O, A_2O, A_3O.

Si le point P parcourt la circonférence O, les droites PC_1, PC_2, PC_3 tournent autour des points D_1, D_2, D_3 en engendrant trois faisceaux projectifs. Par suite, les points C_1, C_2, C_3 se correspondent dans trois ponctuelles projectives, qui sont même perspectives comme ayant deux à deux un élément uni en A_1, A_2 ou A_3. Lorsque P tend vers A_1, A_2, A_3, la droite p tend vers les positions A_1D_1, A_2D_2, A_3D_3 ; donc O est le centre de perspective.

Ce résultat, bien connu (¹), peut s'énoncer ainsi :

(¹) Voir Mathesis, 1892, p. 239, et 1902, p. 170. (Droz-Farny).

Lorsque p *tourne autour du centre O du cercle* $A_1A_2A_3$, *les points* *P*, *P'* *se meuvent sur ce cercle et sur le cercle des neuf points.*

7. Faisons maintenant parcourir au point P une circonférence quelconque T ; le point P' décrira une seconde circonférence T', inverse de la circonférence T par rapport à H. Il existe une circonférence Z qui touche en P, P' les circonférences T, T'. Le centre Z décrit une conique Σ ayant pour foyers les points T, T' et touchant en Z la droite q qui est perpendiculaire au milieu du segment PP'. On en conclut que la droite p enveloppe une courbe Σ' de la 4^e classe, bitangente aux côtés a_1, a_2, a_3 ; si les cercles T et (A_2A_3) se coupent en R,R', les circonférences A_1H_1R, A_1H_1R' passent par les points de contact de a_1 avec Σ'.

La classe de Σ' se déduit aussi de la nature de la correspondance entre les points C_2, C_3. En effet, donnons-nous le point C_2 sur a_2 ; alors la circonférence (A_2C_2) coupe la circonférence T en deux points S, S' que l'on peut prendre pour P, de sorte que les perpendiculaires en S ou S' sur les droites SA_3 ou $S'A_3$ rencontrent a_3 en des points que l'on peut associer à C_2. On voit par là qu'il existe entre C_2 et C_3 une correspondance (2, 2) ; par suite Σ' est de la 4^e classe. Cependant, si la circonférence T passait par A_2 sans passer par l'un des points A_1, A_3, A_2, H_1, A_3, la circonférence T serait rencontrée par une circonférence (A_2C_2) en un seul point (autre que A_2) et par une circonférence (A_3C_3) en deux points ; la correspondance (C_2, C_3) ne serait plus que l'espèce (2, 1) et la courbe Σ', de la 3^e classe. De même, si P décrivait une circonférence passant par A_2 et A_3 (sans passer par A_1 ou H_2), la droite p envelopperait une conique. Le cas de la circonférence $A_1A_2A_3$ a été traité ci-dessus.

8. Supposons que la droite p pivote autour d'un point fixe E. Alors les points C_1, C_2, C_3 se correspondent dans des ponctuelles perspectives, et les points C'_1, C'_2, C'_3 dans des ponctuelles projectives ; la droite q enveloppe une conique η inscrite au triangle $M_1M_2M_3$; les cercles (A_2C_2), (A_3C_3) se correspondent dans deux faisceaux projectifs et les points P, P' engendrent une quartique bicirculaire η' passant par les points A_1, H_1, A_2, H_2, A_3, H_3 qui correspondent aux positions EA_1, EA_2, EA_3 de p. Cette courbe η' est une anallagmatique qui a pour déférente la conique η.

Si l'on prend pour E un point de a_1 autre que A_2, A_3, le lieu des points P, P′ est la circonférence A_1H_1E jointe à la circonférence (A_2A_3) qui correspond à la position a_1 de p.

Considérons des transversales p parallèles entre elles. La droite q enveloppe alors une parabole inscrite au triangle $M_1M_2M_1$. La droite de l'infini qui est une position de p, a pour points correspondants l'orthocentre H et un point quelconque à l'infini ; par suite, le lieu proprement dit des points P, P′ est une cubique circulaire passant par H. Si les transversales p sont parallèles à a_1, le lieu des points P, P′ se compose de la hauteur A_1H_1 et du cercle (A_2A_3).

9. Nous terminons par quelques développements analytiques.

En adoptant des coordonnées barycentriques par rapport au triangle $A_1A_2A_3$, on a pour les équations du cercle $A_1A_2A_3$, de la droite de l'infini et d'un cercle quelconque :

$$\begin{aligned} &U \equiv a^2{}_1x_2x_3 + a^2{}_2x_3x_1 + a^2{}_3x_1x_2 = 0,\\ &V \equiv x_1 + x_2 + x_3 = 0,\\ &U - V(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) = 0. \qquad (1) \end{aligned}$$

Une transversale quelconque p est représentée par

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0.$$

Pour que l'équation (1) soit celle du cercle (A_1C_1), on doit d'abord avoir $u_1 = 0$; ensuite l'équation

$$a^2{}_1x_2x_3 - (x_2 + x_3)(u_2x_2 + u_3x_3) = 0 \qquad (2)$$

doit admettre les solutions $x_2 : x_3 = -p_3 : p_2, x_2 : x_3 = \operatorname{tg} A_2 : \operatorname{tg} A_3$. Tirant de (2) le produit et la somme des valeurs des rapports $x_2 : x_3$ on voit que

$$\frac{u_3}{u_2} = -\frac{p_3 \cot A_3}{p_2 \cot A_2},$$

$$\frac{a^2{}_1}{u_2} - 1 - \frac{u_3}{u_2} = -\frac{p_3}{p_2} + \frac{\cot A_3}{\cot A_2};$$

par suite, S désignant l'aire $A_1A_2A_3$, on a

$$u_2 = 2S\frac{p_2 \cot A_2}{p_2 - p_3},\ u_3 = 2S\frac{p_3 \cot A_3}{p_3 - p_2};$$

et l'équation du cercle (A_1C_1) est

$$(p_2 - p_3)\,U - 2SV(p_2x_2 \cot A_2 - p_3x_3 \cot A_3) = 0. \qquad (3)$$

La somme de cette équation et des équations analogues donne $0 = 0$; donc les trois cercles ont même axe radical.

L'égalité (3) peut s'écrire

$$p_2(U - 2SVx_2 \cot A_2) = p_3(U - 2SVx_3 \cot A_3).$$

Posons, pour abréger,

$$W_i \equiv U - 2SVx_i \cot A_i\ ;$$

$W_1 = 0$, $W_2 = 0$, $W_3 = 0$ sont les équations des cercles (A_2A_3), (A_3A_1), (A_1A_2), et celles des cercles (A_1C_1), (A_2C_2), (A_3C_3) prennent la forme

$$p_2W_2 = p_3W_3, \quad p_3W_3 = p_1W_1, \quad p_1W_1 = p_2W_2.$$

Les points P, P' sont maintenant déterminés par le système

$$p_1W_1 = p_2W_2 = p_3W_3,$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned} \frac{K}{p_1} &= U - 2SVx_1 \cot A_1, \\ \frac{K}{p_2} &= U - 2SVx_2 \cot A_2, \\ \frac{K}{p_3} &= U - 2SVx_3 \cot A_3, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ou encore

$$lp_1 = W_2W_3, \quad lp_2 = W_3W_1, \quad lp_3 = W_1W_2, \qquad (5)$$

K et l étant des facteurs de proportionnalité.

En faisant la somme des équations (4) après les avoir multipliées respectivement par $p_1(p_2 - p_3)$, $p_2(p_3 - p_1)$, $p_3(p_1 - p_2)$, on trouve

$$V\,.\,\Sigma p_1(p_2 - p_3)x_1 \cot A_1 = 0, \qquad (6)$$

équation qui représente la droite de l'infini et la droite PP' ;

comme elle est vérifiée par les coordonnées ($\operatorname{tg} A_1$, $\operatorname{tg} A_2$, $\operatorname{tg} A_3$) de l'orthocentre, la droite PP′ passe constamment par ce point. D'ailleurs, les quantités W_1, W_2, W_3 prennent la même valeur au point H ; il en résulte que H est de même puissance par rapport aux cercles (A_2A_3), (A_3A_1), (A_1A_2) et qu'il correspond à la transversale $p_1 = p_2 = p_3$, c'est-à-dire à la droite de l'infini.

Si la droite p pivote autour du point $E(\alpha_1, \sigma_2, \alpha_3)$, de manière que $p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 = 0$, les points P, P′ se meuvent sur la courbe qui a pour équation

$$\alpha_1 W_2 W_3 + \alpha_2 W_3 W_1 + \alpha_3 W_1 W_2 = 0,$$

ou

$$\begin{gathered} U^2\Sigma\alpha_1 - 2SUV\Sigma\alpha_1(x_2 \cot A_2 + x_3 \cot A_3) \\ + 4S^2V^2\Sigma\alpha_1 x_2 x_3 \cot A_2 \cot A_3 = 0. \end{gathered}$$

Cette courbe est, en général, une quartique bicirculaire. Cependant, lorsque E est à l'infini, on a $\Sigma\alpha_1 = 0$ et la courbe se décompose en la droite de l'infini et une cubique circulaire. Elle se décompose en les cercles $A_1A_2A_3$, $M_1M_2M_3$ si E coïncide avec O ; car pour $\alpha_i = \sin 2A_i$, le dernier terme de l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} & 8S^2V^2\Sigma \sin A_1 \cos A_1 \cot A_2 \cot A_3 \,.\, x_2 x_3 \\ & = 8S^2V^2 \cot A_1 \cot A_2 \cot A_3 \,\Sigma \sin^2 A_1 \,.\, x_2 x_3 \\ & = \frac{2S^2V^2}{K} \cot A_1 \cot A_2 \cot A_3 \,.\, U. \end{aligned}$$

Si la droite p enveloppe une conique inscrite au triangle $A_1A_2A_3$ et représentée par l'équation

$$\frac{m_1}{p_1} + \frac{m_2}{p_2} + \frac{m_3}{p_3} = 0,$$

les points P, P′ décrivent la circonférence

$$(m_1 + m_2 + m_3)U - 2SV\Sigma m_1 x_1 \cot A_1 = 0.$$

Cependant, dans l'hypothèse $m_1 + m_2 + m_3 = 0$, qui correspond à une parabole, le lieu se compose de la droite de l'infini et de la droite $\Sigma m_1 x_1 \cot A_1 = 0$ qui passe par l'orthocentre H.

Pour trouver les valeurs des coordonnées des points P, P′ en fonction de p_1, p_2, p_3, remarquons que l'équation (6) est vérifiée par les valeurs tg A_1, tg A_2, tg A_3 et $\frac{\operatorname{tg} A_1}{p_1}$, $\frac{\operatorname{tg} A_2}{p_2}$, $\frac{\operatorname{tg} A_3}{p_3}$; nous pouvons donc représenter les coordonnées de P ou P′ par

$$\left(\lambda + \frac{1}{p_1}\right) \operatorname{tg} A_1, \quad \left(\lambda + \frac{1}{p_2}\right) \operatorname{tg} A_2, \quad \left(\lambda + \frac{1}{p_3}\right) \operatorname{tg} A_3, \tag{7}$$

λ étant une inconnue que nous déterminerons en substituant les valeurs (7) dans l'équation (3). Il vient

$$\Sigma a_1^2 \left(\lambda + \frac{1}{p_2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{p_3}\right) \operatorname{tg} A_2 \operatorname{tg} A_3 - 2S\lambda\Sigma\left(\lambda + \frac{1}{p_1}\right) \operatorname{tg} A_1 = 0.$$

Pour simplifier cette équation, remplaçons a_1^2, a_2^2, a_3^2 par leurs valeurs tirées des formules

$$2S = \frac{a_1^2 \sin A_2 \sin A_3}{\sin A_1}, \dots$$

alors

$$a_1^2 \operatorname{tg} A_2 \operatorname{tg} A_3 = 2S \frac{\sin A_1}{\cos A_2 \cos A_3} = 2S(\operatorname{tg} A_2 + \operatorname{tg} A_3), \dots$$

Nous aurons

$$\Sigma\left(\lambda + \frac{1}{p_2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{p_3}\right)\left(\operatorname{tg} A_2 + \operatorname{tg} A_3\right) - \lambda\Sigma\left(\lambda + \frac{1}{p_1}\right) \operatorname{tg} A_1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation en λ, égalé à zéro, représente en coordonnées tangentielles, la transformée par transversales réciproques de l'anticomplémentaire du cercle conjugué.

Considérons les couples PP′ qui tombent sur une même droite r passant par H ; ils forment une involution dont H est le point central. Il y a lieu de distinguer trois cas :

a) Le triangle $A_1A_2A_3$ est obtusangle. Alors le cercle conjugué (de centre H et de rayon réel $\sqrt{\mu}$) rencontre r aux points doubles F, F′ de l'involution ; les tangentes f, f' en F, F′ sont des positions de q ; le milieu P″ du segment PP′ tombe en dehors du segment F F′. Par conséquent, il existe des transversales p telles que les cercles C'_1, C'_2, C'_3 se touchent sur le cercle conjugué ; ces droites sont les réciproques des anticomplémentaires des tangentes au cercle conjugué ; elles enveloppent une courbe de la quatrième classe. Aux droites q qui coupent le cercle conjugué en deux points réels, correspondent des points P, P′ imaginaires.

b) Le triangle $A_1A_2A_3$ est acutangle. L'involution formée par les couples PP′ sur la droite r est elliptique ; toute droite p donne lieu à deux points P, P′ qui sont réels et distincts.

c) Le triangle $A_1A_2A_3$ est rectangle en A_1. Les couples PP′ appartiennent à une involution parabolique dont A_1 est le point commun à tous les couples.

Aux différents couples PP′ appartenant à une même droite r correspondent des droites q perpendiculaires à r. Les points C'_1, C'_2, C'_3 étant des éléments homologues de trois ponctuelles semblables, il en est de même des points C_1, C_2, C_3 ; on en conclut que la droite p enveloppe une parabole inscrite au triangle $A_1A_2A_3$. La directrice de cette conique est la droite r ; car les droites p qui correspondent aux points ra_1, ra_2, ra_3 sont perpendiculaires à a_1, a_2, a_3.

Les couples PP′ qui sont situés sur la hauteur A_1H_1 correspondent à des droites p parallèles à a_1 ; cependant au couple particulier A_1H_1 correspond une droite quelconque menée par A_1. Par conséquent, les droites p qui sont les homologues des points d'une hauteur de $A_1A_2A_3$ ont pour enveloppe un couple de points, composé d'un sommet de $A_1A_2A_3$ et du point à l'infini du côté correspondant.

SUR LA GÉOMÉTRIE DES MOUVEMENTS OCULAIRES

PAR

J. DELEMER

I

Rappel des propriétés générales des mouvements oculaires. Les mouvements assez complexes des yeux dans leurs orbites se font suivant des lois géométriques remarquables. Rappelons sommairement ces lois et leurs conséquences les plus importantes.

Les mouvements des globes oculaires par rapport à la tête ne sont que des rotations, les centres des globes sont fixes dans la tête. Quand on étudie les rotations d'un œil, on les rapporte à trois axes de coordonnées fixes par rapport à la tête et se rencontrant au centre de cet œil. On suppose la tête immobile.

On appelle *point de regard,* le point vers lequel se dirige le regard.

La *ligne de regard* d'un œil est la ligne droite qui va du centre de rotation de cet œil au point de regard. Cette ligne prolongée en arrière rencontre le centre de la fovea rétinienne, elle est donc invariablement liée au globe oculaire dans les rotations de celui-ci.

La position *primaire de la ligne de regard* est la position que prend cette ligne quand, la tête étant maintenue naturellement droite le corps lui-même étant droit, le regard se porte au loin exactement en avant. En ce cas, le point de regard peut s'appeler : *point de regard direct.*

Toute position de la ligne de regard différente de celle qu'on vient de dire et par conséquent non dirigée vers le point de regard direct, est une position secondaire de la ligne de regard.

Enfin, quand la *tête restant fixe dans la position naturelle primaire* qu'on vient de dire, la ligne de regard d'un œil s'écarte du point de regard direct ou primaire en se portant tout autour, on appelle *champ de regard* la portion de l'espace dont la ligne de regard peut atteindre tous les points. Ce champ limitant la région de l'espace qui peut être vue nettement rien que par le mouvement de l'œil, la tête restant fixe, est plus petit que le champ visuel (¹).

Il y aura lieu pour préciser la discussion, de considérer certains plans *passant tous par la ligne de regard* et *invariablement liés au globe oculaire* dans ses rotations. Ce seront les différents méridiens de l'œil et spécialement celui que Helmholtz appelle « horizon rétinien. » C'est celui des méridiens de l'œil qui est *horizontal* quand, la tête étant droite, la ligne de regard est dans la position primaire.

Introduisons encore une sphère (S) qui nous permettra de repérer commodément les divers mouvements que nous avons à considérer. Cette sphère (S) sera concentrique avec le globe oculaire, mais de rayon beaucoup plus grand. Le champ de regard et tous les mouvements de la ligne de regard peuvent être définis par leurs traces sur cette sphère (S). Il en est de même pour tous les mouvements des plans méridiens de l'œil. En un mot, toutes les particularités des rotations oculaires viennent s'inscrire sur cette sphère.

Ceci posé, quand un œil parcourt son champ de regard, ses rotations obéissent généralement d'une manière assez rigoureuse à deux lois : *les lois de Donders et de Listing*. Pour énoncer ces lois, supposons la tête dans la position naturelle primaire, et rapportons les rotations de l'œil à trois axes rectangulaires fixes dans la tête concourants au centre de l'œil. L'axe des z sera la ligne de regard dans sa position primaire, l'axe des x mené vers le haut, sera dans un plan parallèle au plan médian ou plan de symétrie de la tête, celui des y, mené vers l'extérieur sera normal aux deux autres.

Les lois de Donders et de Listing.

Si, la tête restant fixe dans la position primaire définie ci-dessus, le regard se porte de la position *primaire* à toute autre *position déterminée,* le globe suit le mouvement d'entraînement de la ligne

---

(¹) Le champ visuel se mesure au périmètre, je crois inutile de rappeler ici sa définition très connue.

de regard, mais en même temps, tourne autour de celle-ci d'un angle parfaitement déterminé par le déplacement même de cette ligne. Cet angle de rotation se compte à partir d'un plan qui contient constamment la ligne de regard mobile tout en restant vertical ; on l'appelle *angle de torsion.*

La loi de Donders exprime précisément ce qu'on vient de dire ; elle s'énonce : *A une position déterminée de la ligne de regard par rapport à la tête répond une valeur déterminée et invariable de l'angle de torsion* (¹).

Quant à la loi de Listing, on peut la formuler en disant que *lorsque la ligne de regard se rend de la position primaire à toute autre position, le mouvement total du globe revient à une seule rotation autour d'un axe perpendiculaire aux positions initiale et finale de la ligne de regard.*

Les différents méridiens du globe oculaire, entraînés dans la rotation de celui-ci, se déplacent par rapport aux axes de coordonnées définis ci-dessus, axes fixes dans la tête. L'horizon rétinien notamment ne reste pas horizontal.

L'expérimentateur ne peut vérifier la loi de Listing que sur lui-même. La méthode la plus simple est celle des images consécutives. On regarde en vision directe le milieu d'un ruban de couleur assez large tendu horizontalement ou verticalement sur fond gris ; puis on porte brusquement, la tête restant fixe, le regard vers un point quelconque du fond gris plus ou moins éloigné du point de regard direct. On a soin d'observer les rotations apparentes, des images consécutives du ruban et de repérer ces rotations méthodiquement.

La loi de Listing complète celle de Donders en donnant le moyen de trouver la valeur numérique de l'angle de torsion dont parle la loi de Donders, angle de torsion relatif à une position secondaire déterminée de la ligne de regard. Helmholtz arrive à cette valeur numérique par deux méthodes différentes, l'une analytique, l'autre géométrique. Les deux méthodes sont basées sur la projection stéréographique des rotations oculaires, telles que les définit la loi de Listing.

(¹) Helmholtz, Opt. physiol. — traduction Javal.

PROJECTIONS STÉRÉOGRAPHIQUES DES ROTATIONS ET PRINCIPE DE LA PLUS FACILE ORIENTATION.

On peut prendre pour plan de cette projection un plan perpendiculaire à la position primaire de la ligne de regard ; plus exactement, tangent au pôle antérieur de la sphère (S) définie ci-dessus. Considérons deux méridiens du globe oculaire, l'horizon rétinien et un autre méridien perpendiculaire à celui-ci, les plans de ces méridiens couperont la sphère (S) suivant deux grands cercles. Considérons les éléments linéaires très courts de chacune des circonférences de ces grands cercles au point de leur intersection antérieure, c'est-à-dire au point de regard. Ces éléments très courts forment une petite croix qui se déplace sur la sphère (S) en y indiquant le mouvement du globe.

Or, les démonstrations de Helmholtz sur la présente question mènent aisément à la conclusion suivante : si l'on projette stéréographiquement du point de la sphère (S) opposé au point de regard direct, la petite croix qu'on vient de dire sur le plan ci-dessus désigné pour la projection, la figure projetée est une autre petite croix plane, qui se déplace dans le mouvement du globe oculaire. Mais quel que soit le mouvement du globe, la croix projetée ne se déforme pas et ne se meut qu'en translation. C'est là une caractéristique remarquable de la symétrie des rotations conformes à la loi de Listing.

Disons en passant que Helmholtz donne dans son admirable traité d'optique physiologique une raison théorique de la loi de Listing. Il démontre que cette loi est telle que pour un champ de regard circulaire, *la somme des carrés de toutes les rotations infiniment petites* relatives à tous les déplacements infiniment petits de la ligne de regard à partir de toutes les positions secondaires que celle-ci peut prendre, est un minimum. Il est conduit à appeler cette conséquence de la loi de Listing le « principe de la plus facile orientation ».

II

OBJET DU PRÉSENT MÉMOIRE.

D'après les préliminaires précédents, la symétrie des mouvements conformes à la loi de Listing, résulte de l'énoncé même de cette loi quand la ligne de regard part de sa position primaire. Quand, au contraire, celle-ci part d'une position secondaire, les propriétés de symétrie des mouvements de l'œil n'ont pas à ma connaissance été mises en évidence autrement que par l'emploi de la projection stéréographique.

Or le mouvement du globe oculaire, quand la ligne de regard se rend d'une position secondaire à une autre, peut résulter, comme tout mouvement autour d'un point fixe, du roulement d'un cône mobile sur un cône fixe de même sommet, le centre de rotation de l'œil.

Le présent mémoire a pour but d'étudier les propriétés de ces cônes. On y établira d'abord que *dans tout mouvement oculaire, se faisant d'une position secondaire de la ligne de regard à une autre position secondaire, le cône mobile qui entraîne l'œil doit être constamment symétrique du cône fixe par rapport au plan tangent commun aux deux cônes.*

De plus, on verra que la ligne de regard mobile représentée par ON dans la figure 3, reste aussi constamment symétrique par rapport au plan tangent commun aux deux cônes, de la ligne de regard primaire prolongée en arrière à partir du centre de l'œil, ligne droite représentée par OM dans la même figure 3.

On cherchera enfin les formes des cônes quand la ligne de regard, partant d'une position secondaire, se déplace en suivant une ligne droite de l'espace. Ce *cas me semble correspondre à des mouvements réels des yeux,* je veux dire qu'à mon sens, la ligne de regard se rend d'un point de regard à un autre quelconque en s'appuyant constamment sur la droite qui joint les deux points.

PROPOSITION FONDAMENTALE.

Lorsque la ligne de regard passe d'une position secondaire à une autre position secondaire, ces deux positions étant également distantes de la position primaire, le mouvement du globe oculaire peut être remplacé par une rotation d'un certain angle θ de la ligne de regard actuelle autour de sa position primaire et par une deuxième rotation, égale aussi à θ mais inverse de la première, ayant lieu autour de la ligne de regard actuelle elle-même.

Soient $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ (fig. 1), deux arcs de cercles égaux tracés sur la sphère (S) de projection du champ de regard. Le point A est la trace de la ligne primaire de regard, B et C sont les traces de deux lignes secondaires de regard équidistantes du point A. Supposons que la ligne de regard se porte de B en C et cherchons le mouvement correspondant du globe oculaire.

Pour cela, imaginons que la ligne de regard se porte de A en C, ce parcours étant fait une première fois directement de A en C ; une deuxième fois indirectement, de A en B puis de B en C. Dans les deux cas, l'angle final de torsion autour de la ligne de regard doit être le même (loi de Donders).

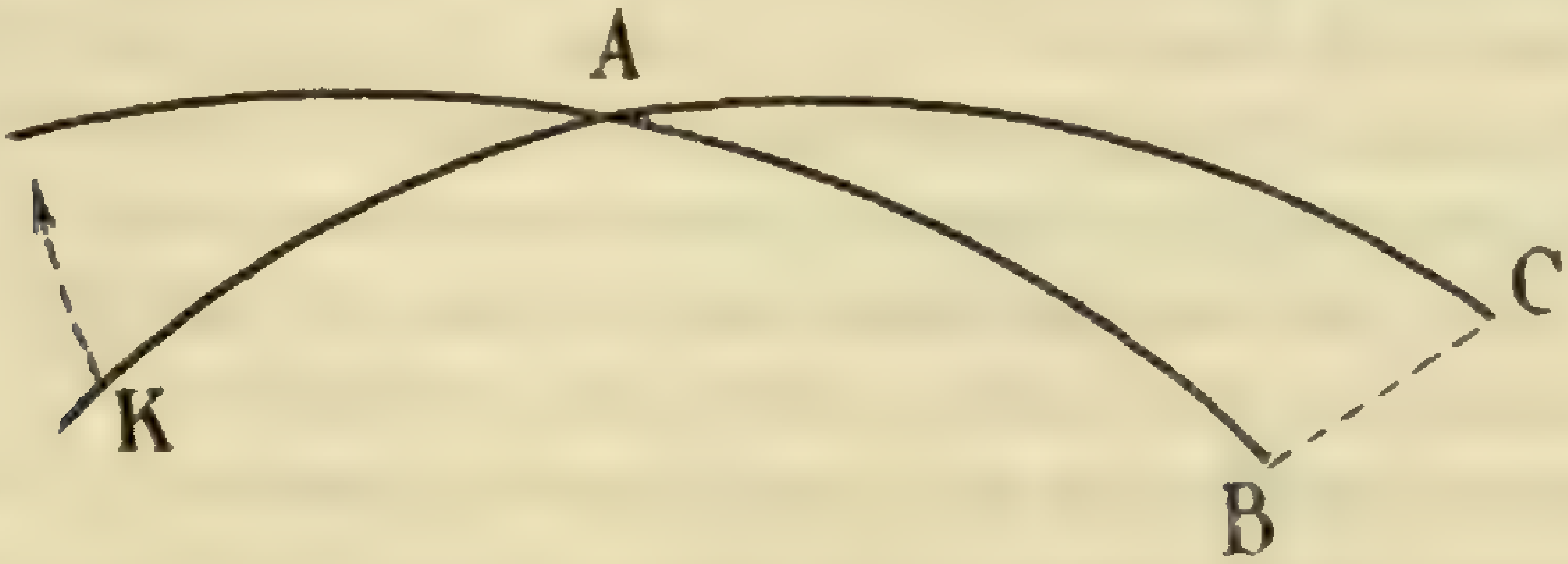


Fig. 1.

Or, dans le cas du chemin direct, le méridien de l'œil représenté par l'arc $\overline{AC}$ glisse simplement sur lui même. Le point K qui se trouve initialement sur l'arc de circonférence AC y reste après le déplacement (loi de Listing).

D'autre part, quand le regard se porte de A en B, l'arc $\overline{AB}$ glisse sur lui même (loi de Listing), mais l'arc AK se déplace en continuant à faire l'angle θ avec BA. Le point de cet arc, coïncidant initialement avec A et que je désignerai par A_1 arrive en B.

Supposons qu'alors, la ligne de regard se porte de B en C en tournant simplement d'un angle θ autour de la position primaire représentée par le point A. Le point A_1 arrive en C, mais à ce moment l'arc $\overline{A_1K}$ fait avec CA l'angle θ qu'il faisait avec $\overline{BA}$ avant ce déplacement.

Pour que cet arc $\overline{A_1K}$ coïncide en direction avec $\overline{CA}$ comme cela se serait produit après le déplacement par chemin direct AC, il faut que A_1K tourne autour de la ligne de regard actuelle correspondant au point C d'un angle égal à θ dans le sens de la petite flèche de la figure. Cette rotation est donc égale et contraire à celle qui a eu lieu autour de la ligne primaire de regard ; ceci démontre notre théorème.

FORMES DES CÔNES DÉFINISSANT LE MOUVEMENT OCULAIRE DANS UN CAS SIMPLE.

Quand les points B et C sont infiniment voisins comme cela se trouve dans la figure 2 pour les points B et C′, et que la ligne de regard va de B en C′, les deux rotations égales et contraires deviennent infiniment petites. L'une, d'angle $\delta\theta$ qui a lieu autour de la droite OA (V fig. 2) peut, étant donné son sens, être représentée par le vecteur $\overline{\mathrm{OM}}$ (1). La rotation inverse, d'angle égal aussi à $\delta\theta$, sera représentée par un vecteur ON égalant $\overline{\mathrm{OM}}$, vecteur porté dans le sens indiqué suivant la ligne de regard actuelle.

Ces vecteurs $\overline{\mathrm{OM}}$ et $\overline{\mathrm{ON}}$ se composent en un vecteur résultant dirigé suivant la bissectrice de leur angle. Si l'on appelle ρ l'angle que fait la droite $\overline{\mathrm{ON}}$ avec $\overline{\mathrm{OA}}$, ce vecteur résultant égalera

$$2\,\overline{\mathrm{OM}}\sin\frac{\rho}{2}\cdot$$

La direction de ce vecteur est celle de l'axe instantané de rotation dans le mouvement total du globe oculaire dû à l'ensemble des deux rotations élémentaires $\delta\theta$. Si la ligne de regard se déplace uniformément sur la circonférence dont fait partie l'arc BC′, il est évident que les axes instantanés de rotation successifs feront tous le même angle avec $\overline{\mathrm{OM}}$, et l'on pourra énoncer la proposition.

Théorème. — Quand la ligne de regard $\overline{\mathrm{OB}}$ décrit autour de sa position primaire $\overline{\mathrm{OA}}$ un cône circulaire de demi-angle au sommet ρ, le mouvement du globe oculaire s'obtient par le roulement sans glissement sur un cône circulaire fixe d'axe OM et de demi-angle au sommet $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\rho}{2}\right)$, d'un autre cône circulaire identique.

---

(1) On rappelle que la valeur numérique d'un vecteur représentant une rotation est la *vitesse de rotation*. Pour le vecteur OM par exemple, c'est $\lim\cdot\frac{\delta\theta}{\delta t}\cdot$

III

RELATIONS DE SYMÉTRIE ENTRE LE CÔNE BASE ET LE CÔNE ROULANT POUR UN MOUVEMENT QUELCONQUE DU GLOBE OCULAIRE CONFORME A LA LOI DE LISTING.

Quand la ligne de regard a un déplacement quelconque dans le champ de regard, le mouvement du globe oculaire reste celui d'un solide qui a un point fixe. Il peut toujours résulter du roulement sans glissement d'un cône mobile sur un cône fixe. Nous allons établir les *propriétés de symétrie qui existent entre ces cônes.*

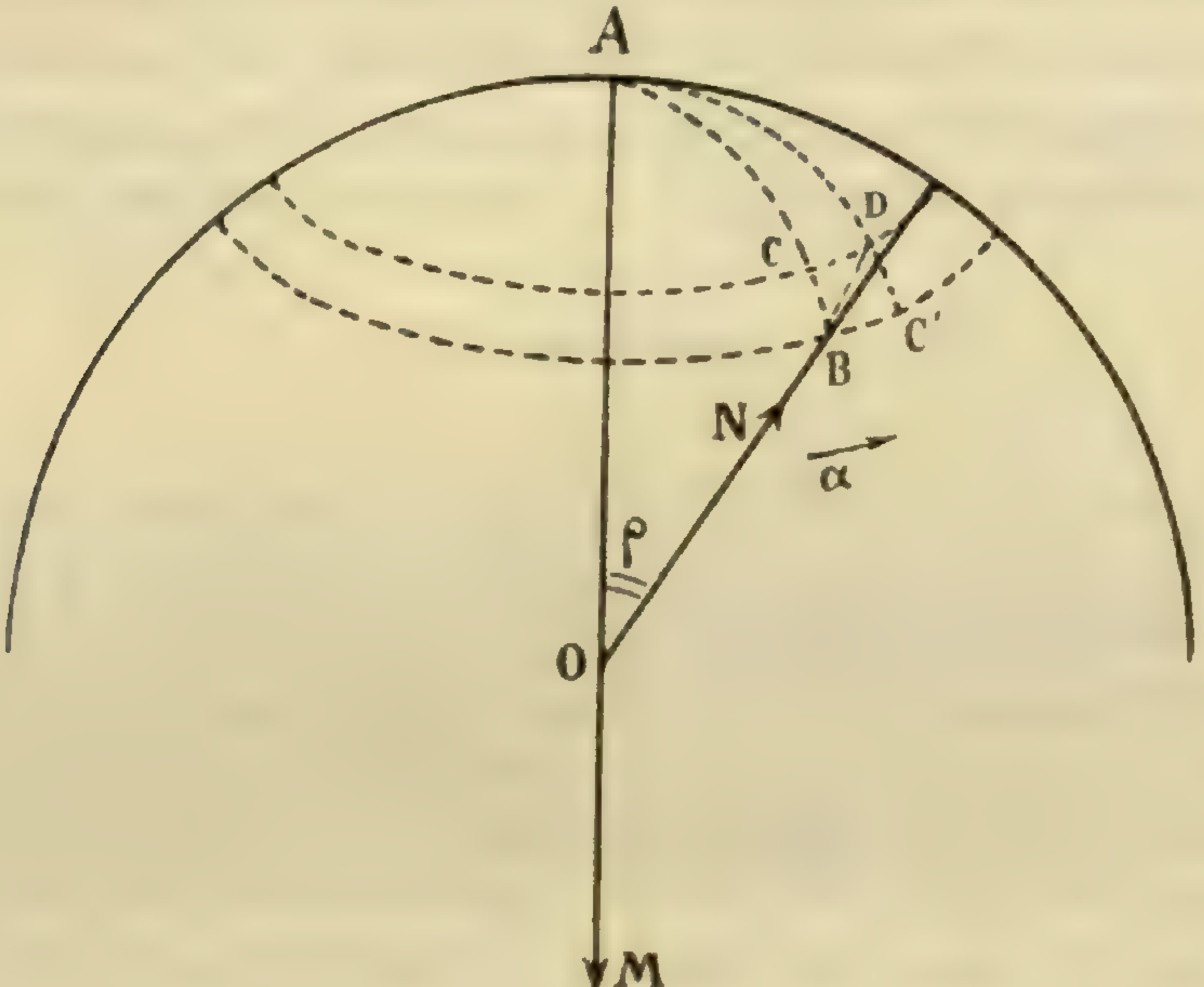


FIG. 2.

1° Recherchons l'axe de la rotation instantanée dans un déplacement élémentaire quelconque du globe oculaire. Servons-nous encore de la sphère (S) de projection du champ de regard. *On a essayé de représenter cette sphère (S) dans la figure 2.*

Quand la ligne de regard va de B en D points voisins sur la sphère (S) (fig. 2), ce mouvement se décompose en deux autres, de B en C′ et de C′ en D. Le globe oculaire doit obéir dans chacun de ces déplacements à la loi de Listing.

Or, on a vu que le déplacement élémentaire de B en C′ résulte pour le globe de deux rotations numériquement égales entre elles et représentées par les vecteurs $\overline{OM}$ et $\overline{ON}$; n'oublions pas que la rotation représentée par le vecteur $\overline{OM}$ a lieu dans le sens de la flèche de la figure 2 (¹). Le déplacement $\overline{C'D}$ (fig. 2) provient d'une rotation représentée par un vecteur $\overline{OP}$ perpendiculaire au plan MON (fig. 3).

Le mouvement élémentaire correspondant au déplacement $\overline{BD}$ de la ligne de regard résulte donc des trois rotations $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ et OP (fig. 3). La première OM peut être considérée comme une rotation d'entraînement, les deux autres sont des rotations relatives.

Cherchons la résultante des trois vecteurs $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ et $\overline{OP}$. $\overline{OM}$ et $\overline{ON}$ se composent suivant la diagonale OS du losange ONSM. $\overline{OS}$ et $\overline{OP}$ se composent ensuite suivant un vecteur résultant OV. Ce vecteur est *l'axe de la rotation instantanée du mouvement absolu élémentaire du globe oculaire.*

Ce vecteur $\overline{OV}$ est dans le plan bissecteur de l'angle dièdre $\widehat{NOPM}$, il nous reste à préciser son orientation.

2° Nous allons donc rechercher l'orientation exacte du vecteur $\overline{OV}$ d'une part dans l'espace fixe et d'autre part par rapport au corps entraîné.

Supposons un observateur couché sur l'axe de rotation $\overline{OM}$ (fig. 3) dans le sens de O vers M, ayant *le dos exactement étendu* sur le plan POM et regardant l'intérieur de l'angle dièdre $\widehat{NOPM}$. L'axe de la rotation instantanée $\overline{OV}$ partant des pieds de notre observateur sera dirigé vers sa droite dans une orientation rigoureusement déterminée.

Pour préciser de même l'orientation du vecteur $\overline{OV}$ par rapport au corps entraîné, considérons un second observateur que nous désignerons par le chiffre 2, l'observateur déjà considéré étant nommé 1. L'observateur 2 sera couché suivant la ligne de regard

---

(¹) J'ai choisi dans toutes les figures les mêmes sens de rotation, ceux qui m'ont paru se prêter le mieux à la représentation intuitive du phénomène étudié.

mobile ON', de O vers N' et sera supposé de plus entraîné avec le mouvement du globe oculaire mobile, ayant à l'instant considéré du mouvement le dos appuyé sur le plan OP'N' et regardant dans l'intérieur du dièdre $\widehat{N'OP'M'}$.

Remarquons qu'à l'instant considéré, le *mouvement relatif* de l'espace fixe par rapport à l'observateur 2 entraîné avec le corps mobile, est le mouvement inverse de celui de ce corps. Il est donc une rotation résultante des trois vecteurs $\overline{OM'}$ $\overline{ON'}$ et $\overline{OP'}$ égaux et opposés aux vecteurs $\overline{OM}$ ON et OP. Désignons par $\overline{OV'}$ cette rotation résultante, elle est évidemment égale et opposée à $\overline{OV}$ et par conséquent dans le plan $\widehat{POSP'}$, bissecteur du dièdre $\widehat{N'OP'M'}$. Ce vecteur $\overline{OV'}$ est dirigé des pieds vers la droite de l'observateur 2 et a d'ailleurs, par rapport à cet observateur, exactement même orientation que le vecteur OV par rapport à l'observateur 1.

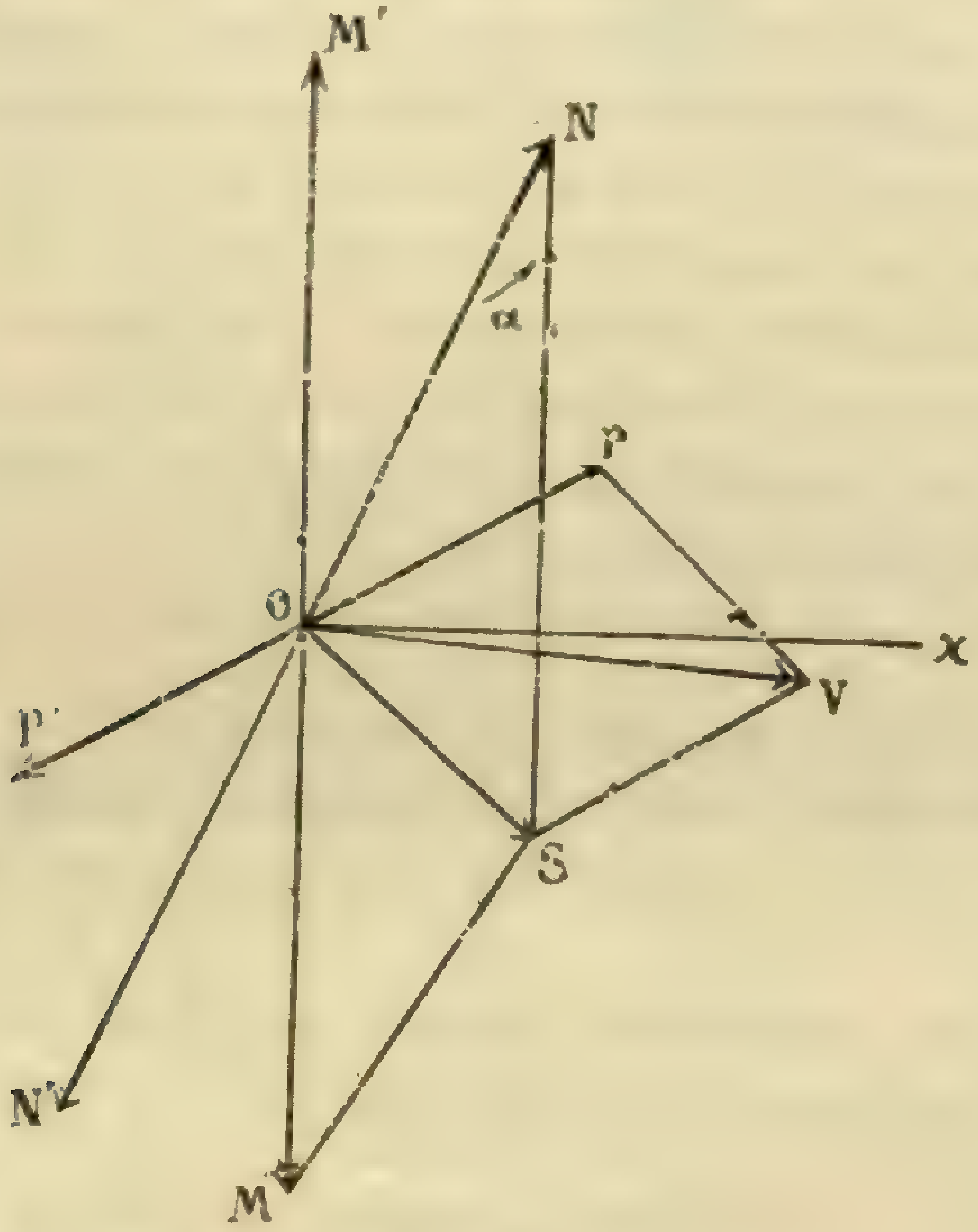


Fig. 3.

Cette importante propriété ne résulte que de l'égalité numérique des vecteurs $\overline{OM}$ et $\overline{ON}$ qui entraîne celle de OM' et ON'.

De ce fait des orientations correspondantes des vecteurs $\overline{OV'}$ et

$\overline{OV}$, on peut déduire la proposition suivante applicable à tout mouvement autour d'un point fixe conforme à la loi de Listing.

THÉORÈME. — *Le cône mobile dans tous les genres de mouvements considérés ici, est constamment symétrique du cône fixe par rapport au plan tangent commun aux deux cônes.*

Nous venons de voir que, à l'instant considéré du mouvement, époque t, les deux portions de l'axe instantané $\overline{OV}$ et $\overline{OV'}$ ont exactement la même orientation, l'une par rapport à l'observateur fixe, l'autre par rapport à l'observateur mobile. Démontrons que, au bout d'un espace de temps très court δt, les deux moitiés du nouvel axe instantané auront encore par rapport à nos deux mêmes observateurs des orientations respectivement identiques.

1° Appelons $\overline{OV_1}$ le vecteur qui remplace $\overline{OV}$ à l'époque $t + \delta t$, et supposons construite pour cette époque $t + \delta t$ une figure exactement analogue à la figure 3 qui a été construite pour l'époque t. Imaginons un observateur que nous appellerons 1bis, couché comme l'observateur 1 suivant $\overline{OM}$ et adossé au plan P_1OM, plan qui remplace le plan POM de la figure 3. Nous pourrons rapporter à cet observateur l'orientation du vecteur $\overline{OV_1}$.

De même *dans cette figure relative à l'époque* $t + \delta t$, on peut considérer un observateur 2 bis couché suivant la nouvelle position de la ligne de regard (sens $\overline{ON'}$) et placé à tous points de vue d'une manière exactement correspondante à celle de l'observateur 2 par rapport à la figure 3. L'orientation du vecteur $\overline{OV'_1}$ égal et contraire au vecteur $\overline{OV_1}$ sera rapportée à ce nouvel observateur 2 bis.

Il est clair que l'axe instantané $\overline{OV_1}$ de l'époque $t + \delta t$ et son prolongement en sens inverse auront par rapport aux deux observateurs 1 bis et 2 bis des orientations respectivement identiques. On le prouve en répétant pour OV_1 et OV'_1 le raisonnement fait ci-dessus pour $\overline{OV}$ et OV'.

2° Nous pouvons déduire de là que l'orientation de $\overline{OV_1}$ par rapport à l'observateur 1 et celle de $\overline{OV'_1}$ par rapport à l'observateur 2 sont aussi identiques.

En effet, nous venons de raisonner sur les lignes d'une figure qui remplace la figure 3 à l'époque $t + \delta t$. Or la relation entre cette figure et la figure 3 est aisée à voir. L'axe OM reste le même dans les deux figures, le plan MON des axes de rotation égaux

$\overline{OM}$ et $\overline{ON}$ se trouve après le temps δt avoir tourné dans l'espace d'un angle $\delta\theta$ autour de $\overline{OM}$, comme s'il avait été entraîné avec le corps mobile. Le mouvement absolu de l'axe $\overline{ON}$ qui est fixe dans le corps mobile ne peut en effet dépendre que de la rotation d'entraînement autour de $\overline{OM}$ et de la rotation relative autour de $\overline{OP}$. Or cette dernière rotation normale au plan MON ne peut déplacer $\overline{ON}$ que dans le plan, elle ne contribue donc pas à modifier la position du plan lui-même.

Rappelons que le sens de la rotation du plan MON est le sens de la flèche α (fig. 3). D'après cela, l'observateur 1bis viendra se confondre avec l'observateur 1 en tournant autour de $\overline{OM}$ d'un d'un angle $\delta\theta$ vers la gauche. Autrement dit, étant précisée l'orientation de l'axe instantané $\overline{OV_1}$ par rapport à l'observateur 1bis, on passe de cette orientation à celle du même vecteur $\overline{OV_1}$ par rapport à l'observateur 1 en faisant tourner $\overline{OV_1}$ d'un angle $\delta\theta$ vers la droite de l'observateur 1bis.

De même, si on se place dans le corps mobile, on considérera le vecteur $\overline{OV'_1}$ égal et opposé à $\overline{OV_1}$. On pourra, par un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire, passer de l'orientation relative de ce vecteur par rapport à l'observateur 2bis à son orientation par rapport à l'observateur 2. On considérera le vecteur $\overline{OV'_1}$ par rapport à l'observateur 2bis, on le fera tourner de $\delta\,\theta$ vers la droite et on obtiendra l'orientation véritable de $\overline{OV'_1}$ dans le corps mobile par rapport à l'observateur 2.

De tout ceci il résulte que $\overline{OV'_1}$ *possède par rapport à l'observateur 2 une orientation identique à celle de* $\overline{OV_1}$ *par rapport à l'observateur 1.*

3° Pour conclure, imaginons que l'observateur 2 suivant $\overline{ON'}$ tourne de 180° autour de OP (fig. 3) de façon à être dirigé suivant ON, adossé au plan PON et regardant dans le dièdre $\widehat{MOPM}$; désignons alors cet observateur par le chiffre 3.

D'après tout ce qui précède, l'axe instantané OV a par rapport aux observateurs 1 et 3 des positions symétriques. $\overline{OV}$ est également éloigné des têtes des observateurs et des plans médians de leurs corps, mais il est à droite de 1 et à gauche de 3.

Non seulement la droite $\overline{OV}$, mais les deux droites, l'une de l'espace fixe et l'autre du corps mobile qui se confondront à l'époque $t + \delta t$ pour former le nouvel axe instantané de rotation, ont aussi des *positions symétriques* l'une par rapport à l'observateur 1, l'autre par rapport à l'observateur 3.

La propriété de symétrie des orientations de l'axe instantané par rapport aux observateurs 1 et 3 subsiste donc à l'époque $t + \delta t$ et évidemment à toutes les époques successives. — Le cône des axes instantanés dans le corps mobile a donc évidemment par rapport à l'observateur 3 une forme symétrique de celle du cône des axes instantanés dans l'espace fixe rapporté à l'observateur 1. Il est évident aussi d'après ce qui précède que ces cônes roulent l'un sur l'autre, en restant constamment symétriques l'un de l'autre par rapport au plan tangent commun. La droite mobile $\overline{OX}$ et la droite fixe $\overline{OM}$, *comme on l'avait indiqué* au début du N° 11, restent aussi toujours symétriques l'une de l'autre par rapport à ce plan tangent.

IV

DÉTERMINATION ANALYTIQUE DU CÔNE FIXE QUAND L'EXTRÉMITÉ DE LA LIGNE DE REGARD PARCOURT UNE LIGNE DROITE.

Soit toujours $\overline{OZ}$ (fig. 4) la position primaire de la ligne de regard. Représentons la sphère de projection du champ de regard et la droite D que doit parcourir l'extrémité de la ligne de regard.

Pour simplifier le calcul sans rien charger d'ailleurs à la généralité des résultats, supposons la droite D de direction perpendiculaire à la ligne de regard primaire $\overline{OZ}$. Rapportons les positions diverses de la ligne de regard mobile à un plan OZK mené par la droite OZ normalement à la droite D (V la fig. 4).

Employons les coordonnées polaires, θ désignant l'angle du plan azimutal de la ligne de regard mobile OX et du plan fixe OZK et ρ l'angle de cette ligne de regard avec l'axe OZ.

Soit ρ_0 la valeur initiale de ρ, quand la ligne de regard mobile $\overline{OX}$ se trouve dans la position $\overline{OK}$, on aura (fig. 4)

$$\text{tang } \rho_0 = \text{tang } \rho \cos \theta \qquad (1)$$

ce qui donne entre les variations élémentaires de ρ et de θ la relation

$$d\rho = \frac{d\theta}{2} \sin 2\rho \operatorname{tang} \theta. \qquad (2)$$

Ceci posé, il est très facile d'exprimer en fonction de $d\rho$ et $d\theta$, par conséquent pour chaque valeur de θ, la direction de l'axe de la rotation instantanée du globe, lorsque la ligne mobile ON fait un petit déplacement le long de la droite D.

Continuons à rapporter les droites de la figure au plan ZOK, mais pour repérer commodément l'orientation de l'axe instantané, nous choisirons dans ce plan pour axe des Z la droite $\overline{OZ_1}$ dirigée du point O vers le bas et la droite Ox perpendiculaire à $\overline{OZ_1}$ (fig. 5).

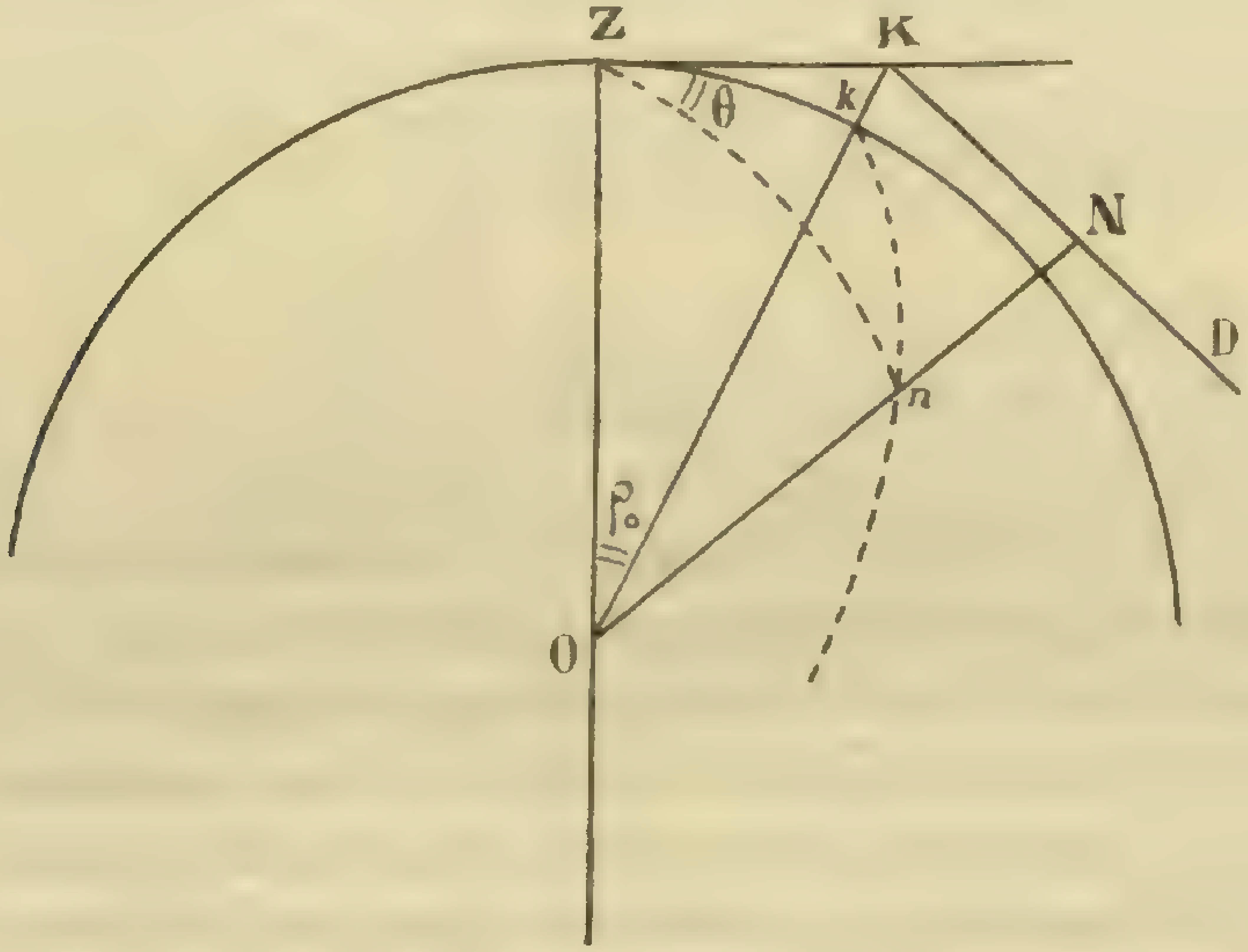


Fig. 4.

Appelons 1° ϵ l'angle azimutal par rapport au plan xOZ_1, du plan contenant l'axe instantané et passant par OZ_1 ;

2° σ l'angle complémentaire de celui que fait l'axe instantané avec OZ_1.

On peut déterminer aisement ϵ et σ.

Considérons en effet (fig. 5) à une époque quelconque du mouvement les vecteurs $\overline{OM}$ et $\overline{ON}$ définis déjà à propos de la figure 3. Ils représentent les rotations simultanées à l'époque t autour de la ligne de symétrie $\overline{OZ}$ et de la ligne de regard mobile. D'après la convention faite ci-dessus, l'angle du plan NOM azimutal de la ligne de regard, par rapport au plan xOZ_1 est θ ; l'angle de $\overline{ON}$ et de $\overline{OZ}$ est ρ.

De plus, les angles des rotations élémentaires autour de $\overline{OM}$ et $\overline{ON}$ sont tous deux $\delta\theta$ en valeur absolue, il en résulte que l'angle de la rotation autour du vecteur $\overline{OS}$ résultant de $\overline{OM}$ et de $\overline{ON}$ sera

$$2\delta\theta \sin\frac{\rho}{2}$$

valeur numérique égalant celle du vecteur $\overline{OS}$ lui même au facteur $\frac{\delta t}{1}$ près.

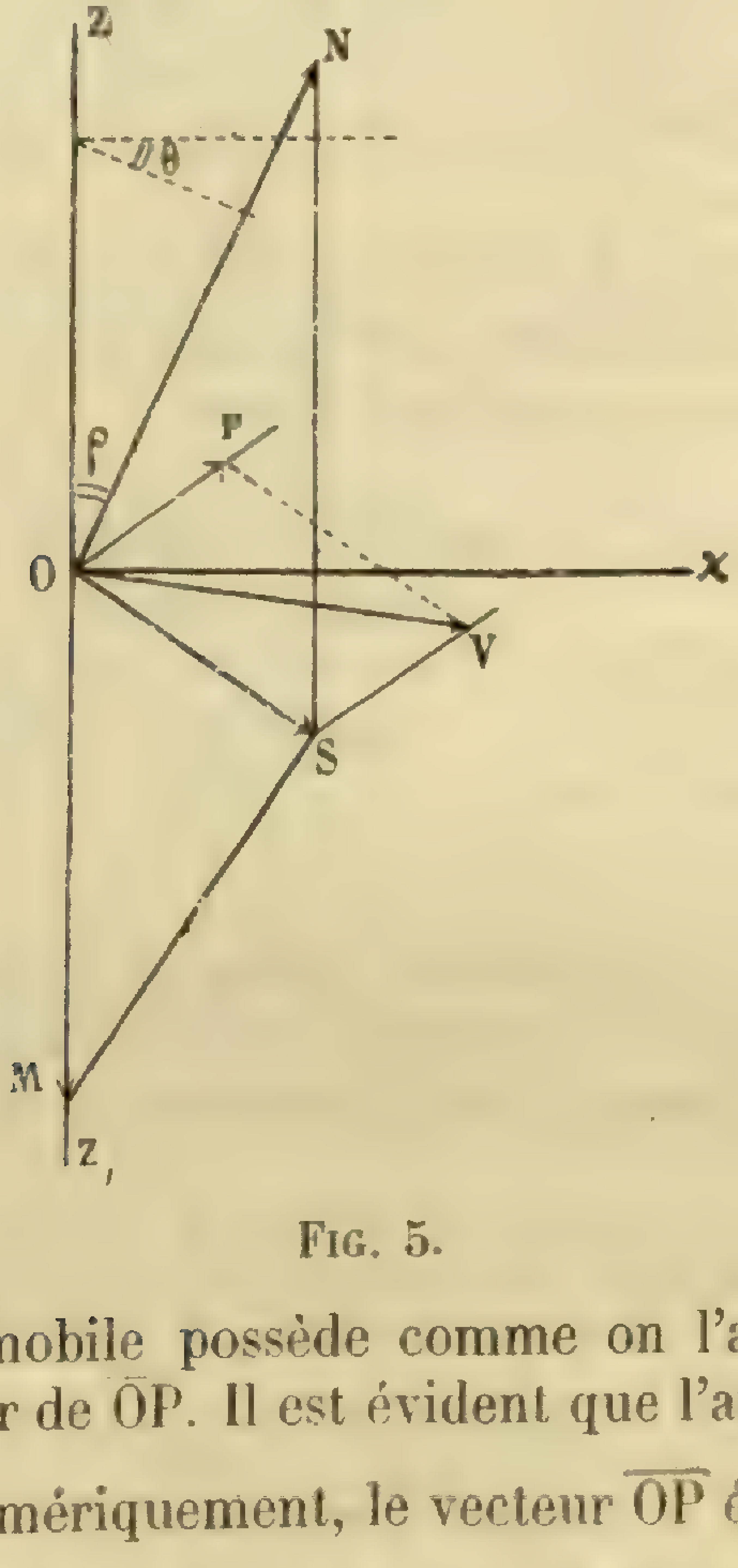


Fig. 5.

Enfin le corps mobile possède comme on l'a vu, une rotation élémentaire autour de $\overline{OP}$. Il est évident que l'angle de cette rotation est $\delta\rho$; et numériquement, le vecteur $\overline{OP}$ égale lim $\frac{\delta\rho}{\delta t}$.

Le vecteur $\overline{OV}$ qui est l'axe instantané de rotation du mouvement total du corps mobile résulte de la composition des vecteurs $\overline{OS}$ et $\overline{OP}$ ou bien des vecteurs proportionnels à ceux-là, à savoir :

$$2\delta\theta \sin\frac{\rho}{2}$$

suivant $\overline{OS}$, et $\delta\rho$ suivant $\overline{OP}$.

On trouve aussitôt la tangente de l'angle $\widehat{POV}$ que ce vecteur OV fait avec l'axe $\overline{OP}$ dans le plan POS ;

$$\operatorname{tang} \widehat{POV} = 2 \frac{\delta\theta}{\delta\rho} \sin \frac{\rho}{2}$$

et en remplaçant $\delta\rho$ par sa valeur tirée de (2)

$$\operatorname{tang} \widehat{POV} = \frac{1}{\cos \frac{\rho}{2} \cos \rho \operatorname{tang} \theta} .$$

Si l'on observe enfin que ce plan POS fait avec le plan horizontal POx l'angle $\frac{\rho}{2}$ (V. la fig. 5), on peut déterminer les angles ϵ et σ, coordonnées polaires de l'axe instantané OV. Un calcul simple de trigonométrie sphérique donne :

$$\operatorname{tang} \epsilon = \frac{\operatorname{tang} \theta (1 - \cos \rho)}{1 + \cos \rho \operatorname{tang}^2 \theta} \qquad (3)$$

et

$$\operatorname{tang} \sigma = \frac{\operatorname{tang} \frac{\rho}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \theta \cos^2 \rho}} . \qquad (4)$$

Éliminons ρ de ces équations à l'aide de l'équation (1). Nous aurons ainsi, en fonction de θ seul, les coordonnées polaires des génératrices successives du cône base du mouvement

$$\operatorname{tang} \epsilon = \operatorname{tang} \theta \frac{\sqrt{\operatorname{tang}^2 \rho_0 + \cos^2 \theta} - \cos\theta}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 \rho_0 + \cos^2 \theta} + \sin\theta \operatorname{tang} \theta} \qquad (5)$$

$$\operatorname{tang} \sigma = \frac{\cos^2\theta + \operatorname{tang}^2 \rho_0 - \cos\theta \sqrt{\cos^2 \theta + \operatorname{tang}^2 \rho_0}}{\operatorname{tang} \rho_0 \sqrt{\operatorname{tang}^2 \rho_0 + 1}} . \qquad (6)$$

Ces équations sont en somme celles du cône base dont nous cherchons la forme.

Ce cône admet évidemment comme plan de symétrie le plan xOZ_1, les génératrices successives en avant du plan de symétrie peuvent s'obtenir en y donnant successivement à θ toutes les valeurs de 0 à 90°. Ces équations donnent des indications importantes sur la forme du cône.

Discussion des équations (5) et (6).

1° Cherchons d'abord la position exacte de la génératrice moyenne.

Pour $\theta = 0$ et $\rho = \rho_0$ conformément aux conditions posées, on obtient

$$\operatorname{tang} \epsilon = 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang} \sigma = \operatorname{tang} \frac{\rho_0}{2}$$

$$\epsilon = 0 \qquad\qquad \sigma = \frac{\rho_0}{2}$$

l'axe instantané est alors dans le plan xOZ_1, c'est évidemment la génératrice moyenne du cône.

2° Faisons croître θ à partir de 0 et voyons comment varient ϵ et σ.

Posons pour simplifier l'écriture $\operatorname{tang} \rho_0 = \alpha$ et dérivons l'équation (5)

$$\frac{1}{\cos^2 \epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \cos^2 \theta} - \cos \theta}{\sqrt{\alpha^2 + \cos^2 \theta} + \sin \theta \operatorname{tang} \theta} + \operatorname{tang} \theta \times K,$$

K désigne une somme de termes *non infinie pour* $\theta = 0$; il est inutile de développer cette somme.

Pour $\theta = 0$, on a $\epsilon = 0$ et $\cos^2 \epsilon = 1$, d'où

$$\frac{d\epsilon}{d\theta} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}, \text{ dérivée positive.}$$

Dérivons aussi l'équation (6)

$$\frac{1}{\cos^2 \sigma} \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha^2 + 1}} \left(- \sin 2\theta + \sin \theta \sqrt{\cos^2 \theta + \alpha^2} + \frac{\sin 2\theta \cos \theta}{2\sqrt{\cos^2 \theta + \alpha^2}} \right), \tag{7}$$

pour $\theta = 0$, on a $\frac{d\sigma}{d\theta} = 0$.

Il résulte des valeurs simultanées de ces dérivées que le plan tangent au cône fixe à l'endroit de la génératrice moyenne est perpendiculaire au plan xOZ_1 et comme

$$\left(\frac{d\epsilon}{d\theta}\right)_0 > 0$$

ϵ croît à partir de 0 en même temps que θ, c'est-à-dire que quand la ligne de regard se déplace en avant du plan xOZ_1 la portion du cône fixe sur laquelle a lieu le roulement est aussi en avant de ce plan.

3° Le cône mobile devant être symétrique du cône fixe pendant le roulement, il paraît nécessaire *à priori* que le cône fixe tourne sa convexité vers le plan horizontal POx, à l'endroit de la génératrice moyenne.

Le calcul confirme ce fait, dérivons en effet l'équation (7) et nous obtiendrons :

$$(8) \qquad \frac{1}{\cos^2\sigma}\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \frac{2\sin\sigma}{\cos^3\sigma}\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha^2+1}}\Bigg(-2\cos 2\theta + \cos\theta\sqrt{\cos^2\theta+\alpha^2} + \frac{\cos\theta\cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\alpha^2}} - \frac{\sin\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\alpha^2}} + \frac{\sin^2\theta\cos^3\theta}{(\cos^2\theta+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg)$$

En faisant $\theta = 0$ dans cette équation, et observant que $\frac{d\sigma}{d\theta} = 0$ on obtient

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}\right)_0 = \left(-2 + \sqrt{1+\alpha^2} + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\frac{\alpha}{2(1+\alpha^2)\left(\sqrt{1+\alpha^2}-1\right)}$$

Cette dérivée est positive quel que soit α ; en observant que les variations de θ et de ϵ sont de même sens et de même ordre au voisinage de 0, on trouverait que la dérivée

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\epsilon^2}\right)_{\epsilon=0}$$

est aussi positive, ce qui signifie, étant donné le sens positif de σ

que la concavité du cône est opposée au plan POx ; elle est donc tournée vers les Z_1.

4° Cherchons la position de la génératrice extrême en faisant $\theta = 90°$.

On a

$$\operatorname{tang} \epsilon = \operatorname{tang} \rho_0 \qquad \epsilon = \rho_0$$
$$\operatorname{tang} \sigma = \sin \rho_0$$

Cette équation montre que pour $\theta = 90°$, σ est plus petit que ρ_0, mais que quel que soit ρ_0, σ est toujours plus grand que $\frac{\rho_0}{2}$ (valeur de σ pour $\epsilon = 0$). Ceci est bien conforme à ce qu'on vient de voir, que le cône tourne sa convexité vers le plan POx.

Remarque. — Il y aurait lieu de chercher comment varie la forme du cône base quand on fait varier ρ_0, c'est-à-dire en rapprochant ou en éloignant de la ligne primaire de regard, la droite D que doit suivre la ligne de regard mobile.

On trouve en se rapportant à l'équation (8) que la dérivée seconde $\left(\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}\right)_{\theta=0}$ conserve toujours, quel que soit ρ_0 le signe plus, ce qui indique que la courbure du cône est toujours de même sens.

Quand $\rho_0 = 90°$, la dérivée seconde est

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} = 0;$$

la dérivée première $\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_{90°}$ est nulle aussi. Le cône base est alors un cône circulaire droit d'axe $\overline{OZ_1}$ et de demi-angle au sommet 45°. Ce résultat pouvait être prévu et rentre d'ailleurs dans le cas particulier vu en commençant où la ligne de regard reste à distance angulaire constante de sa position primaire.

Si l'on fait $\rho_0 = 0$, la dérivée seconde

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = 0.$$

Or en ce cas, la courbure doit être infinie, les cônes se réduisent à la droite Ox de la figure 5. Ce fait peut-il s'accorder avec l'annulation de la dérivée seconde $\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}$. Il n'y a pas contradiction entre ces résultats car ce n'est pas la dérivée $\left(\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}\right)_{\theta=0}$ mais $\left(\frac{d^2\sigma}{d\epsilon^2}\right)_{\epsilon=0}$ qui marque la courbure. Or dans ce cas particulier, il est évident qu'aux environs de $\theta=0$, les variations de θ et celles de ϵ ne sont plus d'un ordre comparable. La dérivée en ϵ peut très bien être infinie, alors que l'autre est nulle.

V

Conclusion. — On a vu plus haut que quelque soit le mouvement de la ligne de regard, le mouvement correspondant du globe oculaire est dû au roulement d'un cône sur un autre cône symétrique du premier par rapport au plan tangent commun. Il est impossible d'imaginer une autre loi que la loi de Listing, conduisant à des roulements coniques présentant tous un élément aussi important de symétrie. Et ceci montre à mon sens une fois de plus combien la loi de Listing est conforme au principe de symétrie et de simplicité.

M. Boussinesq fait remarquer dans un mémoire des COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES [1] la tendance que possède l'esprit humain dans la recherche de l'explication des faits scientifiques, à adopter comme bases de ses inductions, certaines hypothèses fondamentales qui semblent évidentes par leur simplicité. Dans l'étude de la gravitation par exemple, les astronomes ont considéré dès le début les trajectoires des planètes comme des courbes fermées. Et le savant professeur fait remarquer quelle importance a eu pour le développement de l'astronomie, cette hypothèse si simple et si naturelle regardée comme évidente, mais qui n'était pourtant pas prouvée *à priori*.

M. Boussinesq voit dans l'application du principe de simplicité, une sorte de criterium qui nous guide dans nos inductions. Or, l'application de ce principe aux phénomènes qui nous occupent me semble rendre nécessaire la loi de Listing. Et d'abord, la simplicité de cette loi est saisissable dans son énoncé même quand on ne considère que les mouvements oculaires s'effectuant à partir de la position primaire de la ligne de regard. Le présent travail montre quels nouveaux caractères de simplicité découlent de la loi de Listing pour tous les autres mouvements oculaires absolument quelconques.

---

[1] COMPTES RENDUS, tome L.

D'ailleurs les mouvements oculaires conformes aux lois de Donders et de Listing sont aussi conformes au principe que Helmholtz appelle « principe de la facile orientation ». Toutefois, pour démontrer la nécessité de la loi de Listing en partant de ce dernier principe, il faut de terribles calculs, et encore, la démonstration ne se fait-elle qu'en admettant une hypothèse restrictive sur la forme du champ de regard.

Nouveaux Bethylides et Dryinides exotiques du British Museum de Londres

par **J. J. KIEFFER**, Doct. phil. nat.

avec 10 figures dans le texte.

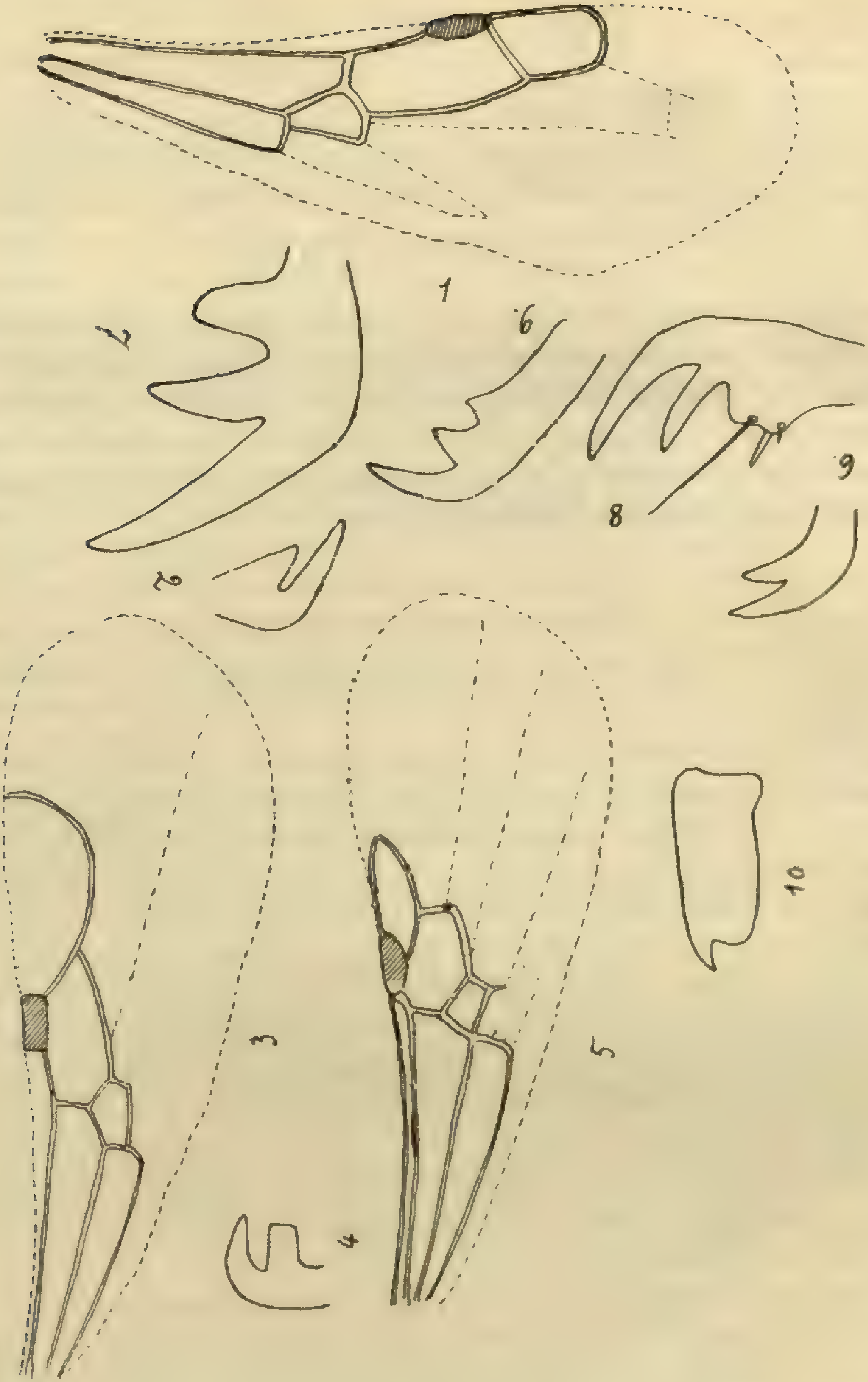
I. — BETHYLIDES.

Le genre *Eupsenella* Westw. se distingue des autres Bethylides par le nombre des cellules aux ailes antérieures ; on y voit, outre les cellules basales, une radiale, une cubitale et une discoïdale fermées. Ce genre ne comprenait qu'une espèce, *E. agilis* Westw. J'ai décrit récemment, sous le nom de *Eupsenella Herbsti*, un insecte provenant du Chili ; je l'ai placé dans le genre *Eupsenella*, à cause de sa nervation alaire, mais ce fut à tort. En effet, parmi les Bethylides exotiques conservés au British Museum de Londres se trouvaient deux autres insectes offrant le même nombre de cellules que *Eupsenella* Westw., mais différant génériquement aussi bien entre eux qu'avec mon *Eupsenella Herbsti* Kieff. ; dans l'un d'eux j'ai reconnu le véritable *Eupsenella,* de sorte que *E. Herbsti* doit former un nouveau genre que j'appelle *Lytopsenella* n. g.

Ces trois genres se distinguent comme il suit :

1. Nervure costale nulle, basale éloignée du stigma, crochets tarsaux bifides et conformés comme chez *Bethylus*, dont l'insecte à le port. . . . . 2.

— Nervure costale bien marquée, basale aboutissant à l'extrémité de la sous-costale, crochets tarsaux simples, port de *Scleroderma* . . . . 3. CLYSTOPSENELLA n. g.



2. Cellule radiale fermée à la marge . . . . 1. EUPSENELLA Westw.
-- Cellule radiale ouverte à la marge . . . . 2. LYTOPSENELLA n. g.

1. GENUS EUPSENELLA Westw.

D'après le dessin de Westwood, la cellule radiale de *Eupsenella* est fermée non seulement à l'extrémité, mais encore au bord, la basale est éloignée du stigma, et, d'après le texte, les crochets tarsaux sont très arqués et dilatés à la base. Ces caractères suffisent pour distinguer ce genre de *Lytopsenella* et de *Clystopsenella*. Nous y ajoutons l'espèce suivante :

EUPSENELLA PROXIMA n. sp.

Fig. 1, aile ; fig. 2, crochet tarsal.

♀ Noir ; antennes testacées, tibias antérieurs et tous les tarses jaune clair, fémurs brun noir. Corps conformé comme *E. agilis* Westw., c'est-à-dire, comme *Bethylus*. Tête et thorax mats, finement chagrinés et parsemés de points superficiels. Tête presque carrée, sauf en avant où elle est graduellement amincie, front tronqué en avant, yeux glabres, distants du bord occipital des 2/3 de leur longueur, clypeus enfoncé et traversé par une carène longitudinale qui se prolonge sur le front jusque vis-à-vis du milieu des yeux, mandibules noires, ocelles postérieurs deux fois plus distants des yeux que l'un de l'autre, situés contre le bord occipital qui est tronqué. Antennes de 13 articles, scape élargi, deux fois aussi large que les articles suivants, un peu plus long que large, articles suivants à peine aussi longs que gros et pubescents. Pronotum graduellement élargi en arrière, plus long que le mesonotum, qui est égal au scutellum ; sillons parapsidaux percurrents, minces et parallèles, scutellum séparé du mesonotum par une suture, une suture oblique sépare le scutellum de chaque axille, segment médian à peine transversal, plan, horizontal, non marginé, mat et finement chagriné, sans aire enfoncée comme chez

E. agilis, avec une arête percurrente, côtés et angles postérieurs arrondis, partie déclive verticale, lisse et brillante. Ailes (Fig. 1) subhyalines, comme chez *Bethylus* la costale manque et la sous-costale est d'abord très rapprochée du bord, s'en éloigne ensuite et aboutit à un point blanc situé à la base du stigma ; le radius sort de l'extrémité du stigma, qui est allongé et d'un brun noir ; cellule radiale fermée non seulement à l'extrémité, mais encore au bord, dont elle n'est pas séparée, largement arrondie à l'extrémité distale ; basale brisée en angle, sa partie antérieure est distante du stigma de presque deux fois sa longueur, cellule cubitale double de la radiale. Ailes inférieures à 4 crochets frénaux. Fémurs antérieurs très élargis et grossis, les postérieurs plus faiblement grossis, crochets tarsaux bifides (Fig. 2), très fortement arqués, lobe inférieur pointu comme le supérieur, mais plus court. Abdomen convexe, égal au thorax, graduellement aminci en arrière, tarière sortant d'un petit stylet. Taille : 3 mm. — Australie : Victoria.

2. GENUS LYTOPSENELLA n. g.

Fig. 3, aile antérieure, fig. 4, crochet tarsal.

Caractères et port de *Bethylus* ou de *Goniozus,* sauf la nervation alaire. Aile antérieure (fig. 3) sans nervure costale, cellule radiale ouverte à la marge, presque deux fois aussi longue que la cubitale, non séparée du bord, nervure sous-costale d'abord très rapprochée du bord, s'en éloignant ensuite, radius sortant de l'extrémité distale du stigma, basale brisée en angle, sa partie antérieure distante du stigma de plus de sa longueur, stigma rectangulaire. Crochets tarsaux bifides et très arqués, les deux dents d'égale longueur, la supérieure pointue, l'inférieure plus large, tronquée à l'extrémité (fig. 4). *Lytopsenella* est un *Goniozus* dont la cellule discoïdale est reliée au radius par une nervure faiblement arquée et dont le radius atteint le bord.

Le type de ce genre est *Eupsenella Herbsti* Kieff. ; il faut y joindre encore *Eupsenella testaceicornis* Kieff. ; tous deux du Chili.

3. GENUS CLYSTOPSENELLA n. g.

Fig. 5, aile antérieure.

♀. Tête subarrondie, yeux allongés et glabres. Front bilobé en avant, chaque lobe porte une antenne, celle-ci composée de 13 articles. Pronotum transversal, retombant perpendiculairement sur le col, à peine arqué postérieurement. Mesonotum transversal, sans sillons parapsidaux. Scutellum sans impression, séparé du mesonotum par une suture. Segment médian non marginé, presque aussi long que large, arrondi graduellement en arrière. Ailes antérieures (Fig. 5) avec une nervure costale, sous-costale également distante du bord sur toute sa longueur, stigma en ellipse, à base blanche, cellule radiale fermée aussi au bord, pointue, son extrémité distante du bord alaire, radius sortant du milieu du stigma, nervure basale non brisée en angle, aboutissant à l'extrémité de la sous-costale, la nervure qui rejoint l'aréole au radius n'est pas arquée comme chez les deux genres précédents, mais brisée en angle, l'aréole est fermée postérieurement par la prolongation de la nervure médiane, tandis que dans les genres précédents, l'aréole est située en partie plus bas que la cellule médiane. Ailes inférieures lobées, sans nervure. Fémur des pattes antérieures et postérieures très grossi, crochets tarsaux simples, un peu dilatés à la base. Abdomen plus large que le thorax, et plus long que le reste du corps, déprimé, linéaire, sauf le segment anal qui est en cône pointu. Corps grêle, allongé, ayant le port de *Scleroderma domesticum* Latr. Le type est :

C. LONGIVENTRIS n. sp.

♀ Tête jaune rougeâtre ou jaune blanchâtre, occiput avec trois bandes longitudinales et brunes, l'une partant du bord postérieur de chaque œil, l'autre ayant son origine aux ocelles, toutes trois atteignent le bord occipital ou s'arrêtent un peu avant le bord occipital ; thorax et abdomen fauves ou brun noir, incisions de l'abdomen plus claires, flagellum brun noir, deux premiers articles antennaires, hanches et pattes jaune clair. Tête lisse et brillante, yeux deux fois aussi longs que leur distance du bord occipital, joues presque nulles. Scape comprimé ; deux fois aussi long et deux fois aussi haut que le deuxième article, celui-ci plus long que gros, 2-12 presque transversaux, 13^e allongé. Thorax lisse et brillant ; col grêle et allongé ; pronotum plus court que le mesonotum. Ailes antérieures faiblement brunâtres, stigma situé un peu avant le milieu, ailes postérieures hyalines. Tibia et tarse des pattes intermédiaires et postérieures munis en dehors de poils très longs, métatarse antérieur à peine deux fois aussi long que gros, articles 2-4 transversaux, métatarse postérieur six fois aussi long que gros, articles 2-4 au moins aussi longs que gros. Abdomen à poils épars et longs, le tiers postérieur à poils fauves, dressés et assez denses. Taille : 7-8 mm. — S^t-Paul ; Villa nova.

Godfrinia n. g.

Ce genre, que je dédie à mon collègue M. l'abbé Léon Godfrin, professeur de physique, offre les caractères suivants.

Tête vue d'en haut rectangulaire, deux fois aussi large que longue, vue de devant à peine transversale, yeux glabres, bord occipital tronqué et marginé, clypeus caréné, mandibules linéaires, assez longues, terminées par deux dents inégales. Palpes maxillaires de 5 articles proéminents, les labiaux de 3 articles proéminents. Antennes insérées de chaque côté de la carène du clypeus dans la partie déclive du front, composées de 13 articles ; scape à peu près égal aux deux articles suivants réunis, 2^e article transversal chez le mâle, allongé chez la femelle, 3^e article allongé, 4-12 pas plus longs ou à peine plus longs que gros, subcylindriques. Thorax trois fois aussi long que haut ; col ou prosternum très transversal, plus large que le pronotum, vers lequel il remonte graduellement et aussi long que lui ; pronotum presque carré, avec un profond sillon longitudinal et médian, qui n'atteint pas le bord antérieur, un sillon transversal longe le bord postérieur ; mesonotum un peu transversal, aussi long que le prosternum et le pronotum réunis, avec quatre sillons parallèles et à peu près également distants l'un de l'autre ; scutellum tronqué postérieurement, aussi long que large, sans impression en avant ; segment médian à peine transversal, angles postérieurs armés d'une dent obtuse plus longue que grosse, bord postérieur non aigu, mais arrondi, partie déclive presque perpendiculaire. Stigma lancéolé ; sous-costale rapprochée de la costale qui ne dépasse pas le stigma, basale touchant le nervulus, très oblique et aboutissant à l'extrémité de la sous-costale, radius sortant du milieu du stigma, arqué, aussi long que la basale et prolongé par une fausse nervure qui n'atteint pas le bord, médiane prolongée au delà des cellules basales et formant une cellule sous-médiane externe qui est fermée distalement, mais ouverte en partie inférieurement, l'anale qui sort de cette cellule est bien marquée et percurrente ; des fausses nervures visibles par transparence indiquent un cubitus bifurqué au milieu et une cellule discoïdale ne dépassant pas la sous-médiane externe ; ailes inférieures lobées, sans nervure, à 5 crochets frénaux. Fémurs peu grossis, crochets tarsaux bifides. Abdomen faiblement déprimé dans les deux sexes, les quatre premiers tergites subégaux en longueur, le dernier en stylet.

Le type est *G. viridiceps*.

1. Tête d'un vert métallique, ponctuée en dé. . . . . 1. *G. viridiceps* n. sp.
— Tête noire, front rugueux . . . 2. *G. nigrocincta* n. sp.

1. G. VIRIDICEPS n. sp.

♀. Roux clair, à poils dressés, blancs et assez longs ; tête d'un vert métallique, à reflet violacé, huit derniers articles antennaires, clypeus, écaillettes et moitié ou deux tiers postérieurs de l'abdomen noirs, mandibules roux brun, tarses brun noir, sauf le métatarse antérieur. Tête ponctuée en dé, yeux 4-5 fois aussi longs que leur distance du bord occipital, ocelles en triangle, plus distants des yeux que l'un de l'autre, joues subnulles. Antennes assez grosses, scape plus long que les articles 2 et 3 réunis, 2^e article presque deux fois aussi long que gros, le 3^e plus long que les deux suivants réunis et cylindrique comme eux, 4-12 pas plus longs que gros, 13^e un peu aminci, guère plus long que le 12^e, pubescence à peine perceptible. Pronotum, mesonotum et scutellum avec une ponctuation grosse et assez dense, intervalles lisses et brillants ; metanotum lisse et brillant ; segment médian entièrement divisé par des arêtes en des aires irrégulières, lisses et brillantes sauf celles du dessus qui sont rugueuses, mésopleures densément ponctuées, métapleures lisses et brillantes. Ailes hyalines, les antérieures avec une bande transversale brunâtre et percurrente, située sous le stigma. Métatarse antérieur égal aux 4 articles suivants réunis, 2-4 graduellement raccourcis, 4^e pas plus long que gros. Abdomen ellipsoïdal, un peu plus court que le thorax, 1er tergite campanulé et lisse, les suivants finement pointillés. Taille : 7-8 mm. — Mexique, Guerrero : Chilpancingo, en juin, à une altitude de 1533 m. (H. H. Smith).

2. G. NIGROCINCTA n. sp.

Fig. 6, crochet tarsal.

♂. Roux ; tête noire avec un très faible reflet violacé, antennes graduellement assombries distalement, quatre hanches postérieures, partie renflée des fémurs et des tibias de toutes les pattes d'un brun noir, trois ou quatre derniers articles tarsaux sombres, abdomen d'un roux plus clair, moitié postérieure du 2^e segment et moitié antérieure du 3^e noires. Front rugueux au-dessus des antennes. Tête graduellement arrondie en arrière. Scape à peine égal aux deux articles suivants réunis, 2^e article transversal, 3^e cylindrique, deux fois aussi long que gros, les suivants à peine plus longs que gros. Métapleures et haut des mésopleures ridés longitudinalement, bas des mésopleures ponctué. Ailes jaunâtres. Pour le reste, semblable au précédent. Taille : 8 mm. — Mexique, Tabasco : Teapa, en janvier (H. H. Smith).

GENRE PARASIEROLA, Cam.

1. Segment médian avec une arête médiane et deux arêtes arquées.	1. *P. xanthoneura* n. sp.
— Segment médian sans arête, avec une carène médiane	2. *P. arcuata* n. sp.

1. P. XANTHONEURA n. sp.

♀. Noir ; mandibules, antennes, hanches et pattes jaune pâle. Tête à peine transversale, tronquée en arrière, mate, à points denses et superficiels, intervalles chagrinés, le clypeus s'avance en une pointe triangulaire entre les mandibules et porte une carène qui s'étend jusque vis-à-vis du milieu des yeux, de là elle se prolonge en une ligne peu distincte jusqu'à l'ocelle antérieur, yeux glabres, trois fois aussi longs que leur distance du bord occipital, ocelles postérieurs distants du bord occipital de leur diamètre seulement. Scape deux fois aussi long que gros, articles 2-13 un peu plus longs que gros, sauf le 3e, qui est presque deux fois aussi long que gros. Pronotum, mesonotum et scutellum luisants, à ponctuation moins dense que la tête ; mesonotum aussi long que le pronotum, ayant de chaque côté un sillon qui aboutit en dehors de la petite fossette qui termine le sillon transversal du scutellum ; segment médian transversal, mat, marginé latéralement et postérieurement, traversé par une arète médiane percurrente et, de chaque côté, par une arète arquée en dehors et non percurrente. Ailes hyalines, nervures, prostigma et stigma d'un jaune très pâle, prostigma plus court que le stigma, radius faiblement arqué. Articles 2-4 des quatre tarses antérieurs à peine aussi longs que gros, aux tarses postérieurs le 2e article est un peu plus long que gros, crochets tarsaux noirs, bifides, à dent proximale plus large et tronquée. Taille : 5 mm. — Queensland : Townsville, 27, II, 1903 (F. P. Dodd).

2. P. ARCUATA n. sp.

♀. Noir ; antennes, genoux, tibias et tarses jaunes, fémurs brun-noir. La carène frontale ne se prolonge pas en ligne jusqu'aux ocelles, la ponctuation de la tête et du thorax est très éparse, mesonotum plus court que le pronotum, ayant de chaque côté un sillon arqué en dehors et aboutissant à la fossette ponctiforme du scutellum, segment médian marginé latéralement et postérieurement, sans arête, mat, sauf la carène médiane qui est lisse, obtuse et percurrente. Ailes hyalines, stigma plus long que le prostigma, tous deux brun-noir, nervures jaune brunâtre, 2e partie de la basale beaucoup plus courte que la 1re, aboutissant au tiers distal de l'aréole. Pour le reste, semblable au précédent. Taille : 4 mm. — Mexique, Vera Cruz : Atoyac, en avril (H. H. Smith).

MANGESIA n. g.

Ce genre, dédié à mon collègue M. l'abbé Henri Manges, offre les caractères suivants : corps assez fortement déprimé. Tète à peine plus longue que large, faiblement convexe, graduellement arrondie en arrière, yeux glabres, mandibules graduellement élargies, terminées par trois ou quatre dents, dont l'externe est un peu plus longue. Palpes longs et grèles, les maxillaires de cinq ou six articles. Antennes composées de 13 articles, insérées à la déclivité du front, de chaque còté de la carène du clypeus. Pronotum graduellement élargi en arrière, plus long que le mesonotum, qui est tronqué en avant, sillons parapsidaux nuls. Scutellum graduellement aminci en arrière, un peu allongé, muni à sa base, d'un sillon transversal très mince et un peu élargi aux deux bouts. Segment médian non marginé, mais arrondi latéralement et postérieurement, aussi long que large. Ailes avec une cellule sous-médiane externe fermée, nervure sous-costale rapprochée de la costale, stigma lancéolé, radiale sortant du milieu du stigma, arquée chez le type et prolongée par une fausse nervure brunâtre, qui est arquée en sens inverse et atteint presque la pointe alaire, la nervure anale sort de la cellule sous-médiane externe et atteint le bord. Ailes inférieures avec deux courtes nervures noires situées près du bord antérieur, qui se réunissent à peu de distance de la base alaire et forment une nervure sous-costale aboutissant au milieu du bord, peu avant les crochets frénaux, un radius brun sort à cet endroit et atteint le bord postérieur de l'aile, peu en-dessous de la pointe alaire. Fémurs médiocrement renflés, éperons 1, 2, 2, l'antérieur droit et simple, les deux intermédiaires courts et égaux, les deux postérieurs inégaux, l'un presque double de l'autre, crochets tarsaux trifides (Fig. 7). Le type est *fuscipennis*.

1. Antennes et tarses d'un roux jaune, ailes brun sombre . . . 1. *M. fuscipennis* n. sp.
— Corps noir sauf les mandibules, ailes faiblement brunâtres . . 2. *M. atra* n. sp.

1. M. FUSCIPENNIS n. sp.

♂. Noir ; mandibules, palpes, antennes et tarses roux jaune. Tête aussi large que le thorax, grossièrement ponctuée en dé, les points ombiliqués, vertex lisse et brillant en arrière des yeux, clypeus caréné, mandibules à quatre petites dents, joues subnulles, yeux d'un tiers plus longs que leur distance du bord occipital, ocelles en triangle, les postérieurs situés à peine en arrière de la ligne qui passe par le bord postérieur des yeux, dont ils sont 2-3 fois plus distants que l'un de l'autre, encore plus distants du bord occipital que des yeux. Antennes amincies distalement, scape arqué, brillant, un peu plus long que les articles 2 et 3 réunis, 2ᵉ article pas plus long que gros, les suivants avec une pubescence jaune, un peu plus longs que gros, cylindriques, les derniers deux fois aussi longs que gros, le 13ᵉ trois fois. Dessous de la tête et prosternum à gros points épars, intervalles lisses et brillants, mesosternum ponctué en dé, sa partie médiane profondément creusée en gouttière ; pronotum ridé transversalement et grossièrement ponctué ; mesonotum deux fois aussi large que long, ponctué en dé comme le scutellum, les points ombiliqués ; segment médian grossièrement ridé en travers, comme la partie déclive et les métapleures, deux rides longitudinales s'arrêtent un peu avant la partie déclive, mésopleures lisses et brillantes, avec quelques points ombiliqués et épars. Ailes brun sombre à faible reflet violacé, stigma et nervures noirs ; des fausses nervures brunâtres et d'autres d'un blanc de lait forment deux cellules cubitales et deux discoïdales, une ligne transversale blanche va du bord antérieur à travers la base du stigma jusque près du cubitus qui est indiqué par une ligne brunâtre, la 1ʳᵉ cellule cubitale est fermée distalement par une ligne brune qui sort du quart basal du radius, la 2ᵉ par une ligne blanche sortant du radius avant le quart distal, la 1ʳᵉ cellule discoïdale est fermée distalement par une ligne brune, la 2ᵐᵉ est fermée supérieurement et distalement par des lignes blanches, une tache blanche se voit encore à l'extrémité distale de la sous-médiane externe, le cubitus se bifurque avant le milieu de la 2ᵐᵉ cellule cubitale. Ailes inférieures avec 9 crochets frénaux ; deux lignes longitudinales blanches sortent de la base alaire et aboutissent l'une à l'extrémité du lobe alaire, l'autre vis-à-vis des crochets frénaux sans atteindre le bord, entre ces deux lignes se trouve une trace longitudinale brunâtre. Dessous des fémurs à longs poils blancs, articles tarsaux 1-4 graduellement raccourcis, le 4^e pas plus long que gros aux tarses antérieurs, crochets arqués, les trois lobes graduellement allongés. Pétiole avec un sillon large et profond, abdomen très déprimé, plus long que le thorax, brillant et presque glabre. Taille : 14,5 mm. — Afrique, Obuasi, Ashanti (Dr. W. M. Graham).

2. M. ATRA n. sp.

♀. Noir en entier, les mandibules seules d'un roux brun. Forme et sculpture du précédent, dont il diffère par les yeux qui ne sont pas plus longs que leur distance du bord occipital, les mandibules à trois grosses dents, le scape égalant les trois articles suivants réunis, 12^{me} article seulement de moitié plus long que gros, segment médian réticulé en avant, avec trois rides longitudinales. Ailes faiblement brunâtres, nervation du précédent sauf que le radius est presque droit, prolongé par une fausse nervure qui continue sa direction, stigma séparé de la sous-costale par une callosité blanche, toutes les fausses nervures sont blanches sauf celle qui ferme distalement la 1^e cubitale et la 1^e discoïdale, 2^e cubitale atteignant l'extrémité du radius, ailes inférieures à dix crochets frénaux. Abdomen moins déprimé, ellipsoïdal, à peine aussi long que le thorax, dernier tergite grossièrement ponctué, segment anal muni de deux appendices. Taille : 12 mm. — Natal : Malvern (J. P. Cregoc).

DISSOMPHALUS OCELLATUS n. sp.

♂. Noir ; mandibules et clypeus roux, antennes sauf le tiers distal qui est bruni, bord postérieur du pronotum, écaillettes, hanches et pattes jaunes, fémurs postérieurs un peu brunis. Tête et thorax faiblement luisants, très finement chagrinés, à points superficiels petits et assez denses ; yeux glabres, deux fois aussi longs que leur distance du bord occipital, ocelles postérieurs deux fois aussi distants des yeux que l'un de l'autre, un peu plus distants du bord occipital que l'un de l'autre, joues nulles, clypeus caréné. Scape grêle, égal aux trois articles suivants réunis, articles 2-13 cylindriques et un peu plus longs que gros. Pronotum tronqué en arrière, mesonotum à peine plus long que le pronotum, transversal, avec quatre sillons, base du scutellum avec un mince sillon transversal, segment médian non marginé, rugueux, avec une arête médiane et longitudinale, angles postérieurs arrondis ; métapleures finement chagrinées. Ailes hyalines, stigma linéaire, égal à la partie distale de la sous-costale, basale distante du stigma de presque toute sa longueur, radius gros, arqué, trois fois aussi long que la basale, une callosité blanche sépare le stigma de la sous-costale, cellule sous-médiane externe bien fermée, la nervure inférieure de cette cellule se prolonge jusqu'au bord alaire. Abdomen déprimé, ellipsoïdal, base du 2e tergite ayant de chaque côté un enfoncement transversal en forme d'œil. Taille : 4 mm.—Mexique, Tabasco : Teapa, en mars (H. H. Smith).

GENRE PRISTOCERA Klug.

1.	Aptère ; femelle	1. *P. numidica* n. sp.
—	Ailé ; mâle	2.
2.	Yeux glabres	3.
—	Yeux longuement velus . . .	2. *P. alticola* n. sp.
3.	Tête et thorax très finement chagrinés et parsemés de points très petits et superficiels	3. *P. microchela* n. sp.
—	Tête à gros points qui se touchent et dont les bords forment rides, pronotum ridé, mesonotum et scutellum à points épars.	4. *P. oriplana* n. sp.

1. P. NUMIDICA n. sp.

♀. Noir ; mandibules, antennes, hanches, pattes et abdomen sauf la moitié antérieure des tergites, roux clair. Tête et pronotum avec une ponctuation dense et assez grosse. Article 3e des antennes égal au 4ᵉ, celui-ci pas plus long que gros. Pour le reste, semblable à *P. depressa*. Taille : 4-6 mm. — Tanger.

2. P. (?) ALTICOLA n. sp.

Fig. 8, crochet tarsal.

♂. Noir ; tarses d'un brun noir. Corps à poils dressés, blanchâtres et assez denses. Tête à peine plus longue que large, brillante, à ponctuation grosse et médiocrement dense, mandibules grandes, graduellement élargies, terminées par quatre dents, joues subnulles, clypeus enfoncé et caréné, yeux à longs poils, presque circulaires, distants de leur longueur du bord occipidal, front retombant perpendiculairement sur le clypeus ; ocelles externes situés en arrière de la ligne qui passe par le bord postérieur des yeux, deux fois plus distants du bord occipital que l'un de l'autre, plus distants des yeux que du bord occipital. Antennes insérées à la partie déclive du front, de chaque côté de la carène du clypeus, scape comprimé, faiblement courbé, égal au 3ᵉ article, 2ᵉ article annuliforme, 3ᵉ et 4ᵉ deux fois aussi longs que gros, 3-13 mats, avec une pubescence dense, appliquée et blanchâtre, 4-13 graduellement allongés, le 12ᵉ est 4-5 fois aussi long que gros. Pronotum graduellement élargi en arrière, aussi long que le mesonotum, retombant perpendiculairement sur le col en avant, avec un sillon transversal avant le bord postérieur, ponctué grossièrement et densément. Mesonotum traversé par quatre sillons parallèles, à ponctuation éparse comme le scutellum, qui est muni d'un sillon transversal à sa base. Segment médian pas plus long que large, non marginé mais arrondi sur les bords, grossièrement ridé en travers, la partie déclive moins fortement ridée et parsemée de gros points. Propleures sauf le milieu et mésopleures peu densément ponctuées, métapleures finement striées. Ailes subhyalines, stigma lancéolé, blanc à la base, sous-costale à peine séparée de la costale, basale aboutissant près de l'extrémité de la sous-costale, radius presque droit, de moitié plus long que la basale, prolongé par un vestige qui aboutit à la pointe alaire, cellule sous-médiane externe fermée, à nervures jaunes, sa partie distale émet à chaque angle une trace de nervure, dont la supérieure ou cubitale est bifurquée, son rameau antérieur est relié à l'extrémité du radius par une transversale blanche, son rameau inférieur est relié à la nervure inférieure par une autre transversale blanche. Fémurs peu grossis, tibias non spinuleux, articles 1-4 des tarses antérieurs graduellement raccourcis, le 4e à peine plus long que gros, crochets tarsaux (Fig. 8) bifides et munis en outre, au-dessus de la base, d'une dent grande, transversale et subtronquée. Abdomen déprimé et allongé. Taille : 9,5 mm. — Mexique, Guerrero : Xucumanatlan, en juillet, à une altitude de 2333 m. (H. H. Smith).

3. P. MICROCHELA n. sp.

♂. Noir ; mandibules, antennes, écaillettes, hanches et pattes jaune paille, bord postérieur du tergite campanulé roux marron. Tête et thorax brillants, très finement chagrinés, parsemés de points très petits et superficiels ; tête aussi longue que large, yeux glabres, à peine plus longs que leur distance du bord occipital, qui est tronqué, ocelles postérieurs deux fois plus distants des yeux que du bord occipital, dont ils sont à peine plus éloignés que l'un de l'autre, joues subnulles, clypeus caréné, mandibules égalant la moitié de la tête, graduellement élargies, tronquées obliquement et terminées par cinq dents, dont l'externe est longue, les quatre autres triangulaires et plus petites. Antennes subfiliformes, amincies distalement, à poils dressés et courts, scape égalant les articles 2 et 3 réunis, 2e article pas plus long que gros, 3e égal au 4e, deux fois aussi long que gros, 12e trois fois aussi long que gros, égal au 13e. Thorax au moins trois fois aussi long que haut ; pronotum graduellement élargi en arrière, mesonotum plus court que le pronotum, égal au scutellum, avec deux sillons parapsidaux très minces ; base du scutellum avec deux petites fossettes distantes et probablement reliées par un mince sillon ; segment médian à peine plus long que large, non marginé, réticulé, avec une arête médiane et longitudinale, sa partie déclive et les métapleures sont chagrinées. Ailes faiblement assombries, sous-costale peu distante de la costale, basale oblique, aboutissant près de l'extrémité de la sous-costale, stigma presque linéaire, trois fois aussi long que large, émettant peu avant le bout distal, une nervure radiale qui est triple de la basale, postmarginale égale à la moitié de la radiale, cellule sous-médiane externe fermée, son angle distal supérieur émet une nervure jaune, parallèle à la basale. Fémurs peu renflés, éperons intermédiaires égaux, les postérieurs inégaux, crochets tarsaux petits, avec une petite dent au milieu. Abdomen très déprimé, en ellipse allongé. Taille : 5 mm. — Mexique, Tabasco : Teapa, en mars (H. H. Smith).

4. P. ORIPLANA n. sp.

♂. Noir brillant, y compris les mandibules, tarses brun roux. Tête un peu plus longue que large, à gros points qui se touchent et dont les bords forment rides, yeux glabres, un peu plus courts que leur distance du bord occipital, ocelle antérieur situé vis-à-vis du bord postérieur des yeux, les postérieurs deux fois plus distants du bord occipital que l'un de l'autre, trois fois plus distants des yeux que l'un de l'autre, clypeus caréné, réuni à l'ocelle antérieur par un sillon peu délimité, joues très courtes, mandibules égalant presque la moitié de la tête, graduellement élargies, terminées par cinq dents, dont l'externe est plus longue. Palpes maxillaires longs, de 5 ou 6 articles. Antennes subfiliformes, aussi longues que le corps, amincies distalement, à poils dressés et courts ; scape égal au 4^e article, 2^e article pas plus long que gros, 3^e trois fois aussi long que gros, un peu plus long que le 4^e, 12^e 3-4 fois aussi long que gros, égal au 13^e. Pronotum graduellement élargi en arrière, un peu plus court que le mesonotum, ridé transversalement, avec un sillon transversal près du bord postérieur. Mesonotum et scutellum à points épars et peu gros, sillons parapsidaux parallèles, sillons externes distincts, base du scutellum, à sillon transversal et peu large. Segment médian allongé, faiblement marginé latéralement, non marginé postérieurement, ridé transversalement, avec une arête médiane longitudinale. Ailes hyalines, sous-costale peu distante de la costale, stigma ellipsoïdal, à base blanche, postmarginale égale à la moitié du radius, qui est de moitié plus long que la basale, celle-ci oblique, distante proximalement du nervulus, aboutissant près de l'extrémité de la sous-costale, cellule sous-médiane externe fermée, à peine plus longue que haute, son angle distal inférieur émet une nervure anale qui atteint le bord, l'angle distal supérieur émet une nervure dirigée vers le radius ; ailes inférieures à 5 crochets frénaux. Pattes poilues, fémurs peu grossis, articles 2-4 des tarses antérieurs plus longs que gros, crochets tarsaux avec une forte dent au milieu. Abdomen fortement déprimé, ellipsoïdal, sternite anal bilobé. Taille : 5-6 mm. — Mexique, Guerrero : Omilteme, en août, à une altitude de 2666 m. ; Tepetlapra, en juin, à une altitude de 1000 m. ; Amula, à une altitude de 2000 m. (H. H. Smith).

Saphobethylus n. g.

Tête plus large que le thorax, transversale et pentagonale vue d'en haut ; yeux glabres, ocelles nuls ; clypeus grand et convexe. *Antennes composées de 12 articles,* flagellum graduellement aminci. Thorax subcylindrique, faiblement comprimé ; pronotum deux fois aussi long que le mesonotum et le scutellum réunis, un peu plus long que large ; mesonotum et scutellum également petits, peu distinctement séparés, sans sillon et sans fossette ; segment médian subcylindrique, égalant le prothorax, non marginé ni sculpté, son bord postérieur armé de chaque côté, en arrière, d'une dent aiguë, partie déclive presque perpendiculaire, faiblement excavée. Ailes raccourcies, atteignant la base de l'abdomen, sans nervure et sans stigma. Fémurs antérieurs fortement grossis, crochets tarsaux avec une petite dent près de l'extrémité. Abdomen fusiforme, de moitié plus long que le reste du corps, à peine plus haut que large, 1er tergite transversal, 2e tergite crénelé au bord antérieur, plus de deux fois aussi long que le 1er, 3e un peu plus court que le 2e, 4-8 plus courts ; le *dernier segment porte une longue pince* qui est formée par deux branches filiformes, parallèles et arquées par en haut, stylet atteignant le milieu des articles de la pince.

S. pallidus n. sp.

♂. Jaune roussâtre ; antennes et pattes plus claires, moitié distale des antennes graduellement assombrie. Corps à peine luisant, presque lisse, glabre. Yeux allongés, atteignant presque le bord occipital, deux fois aussi longs que les joues ; une arête noire unit la base de l'œil à la mandibule, qui est arquée, pointue et sans dent ; palpes maxillaires ayant au moins 4 articles. Antennes un peu plus courtes que le corps, scape un peu grossi, deux fois aussi long que gros, articles 2-12 graduellement raccourcis, le 2e de moitié plus long que le 3e, qui est 4-5 fois aussi long que gros, 11e, 4 fois aussi long que gros, plus long que le 12e. Métatarse antérieur plus long que les deux articles suivants réunis, articles 2-4 graduellement raccourcis, le 4e encore plus long que gros, grand éperon du tibia postérieur égal à la moitié du métatarse. Taille : 5 mm. — Mexique, Tabasco : Teapa.

ARYSEPYRIS PEDESTRIS Kieff.

♀. Ne diffère du type, qui est de Corfou, que par la taille de 5 mm., les ocelles indiqués par des vestiges, le pronotum deux fois aussi long que le mesonotum et le scutellum réunis, le scutellum égal au mesonotum. — Tanger.

ARYSEPYRIS LEVIS n. sp.

♀. Noir ; mandibules, antennes et pattes rousses, scape et fémurs bruns. Tête et thorax lisses et brillants, tête plus large que le thorax, un peu plus longue que large. Pour le reste, semblable à *A. pedestris*. Taille : 2 mm. — Tanger ; 2 exemplaires.

HOMOGLENUS PUNCTATUS Kieff. var. tibialis n. var.

♀. Diffère du type par la coloration et la taille. Noir ; mandibules, antennes, genoux, tibias, tarses, bord postérieur du 4e tergite et les tergites suivants en entier roux. Clypeus fortement caréné ; mandibules graduellement élargies, avec 3-4 dents, dont l'externe est longue et pointue et les autres graduellement raccourcies. Taille : 6 mm. — Tanger ; 2 exemplaires.

GENRE HOLEPYRIS Kieff.

1. Nervure basale distante du stigma de toute sa longueur . . .	1. *H. remotus* n. sp.
— Nervure basale aboutissant à l'extrémité de la sous-costale .	2. *H. multidentatus* n. sp.

1. H. REMOTUS n. sp.

♀. Noir mat ; mandibules, antennes, écaillettes et pattes roux testacé, avant-dernier segment abdominal jaune roux, hanches et fémurs brun noir, scape un peu bruni. Tête et thorax chagrinés ; tête allongée, yeux velus, deux fois aussi longs que les joues, un peu plus courts que leur distance du bord occipital, ocelles postérieurs distants du bord occipital de leur diamètre seulement, front bilobé au bord antérieur. Scape arqué, égal au trois articles suivants réunis, articles 2-13 aussi gros que longs. Pronotum graduellement élargi en arrière, aussi long que le mesonotum et le scutellum réunis ; mesonotum avec un enfoncement transversal de chaque côté ; scutellum aussi long que le mesonotum, sillon basal large ; segment médian allongé, marginé, avec cinq arètes longitudinales, dont les quatre externes s'arrêtent un peu avant l'extrémité, sont rapprochées les unes des autres et parallèles, intervalle entre les arètes et le bord latéral strié transversalement ; pleures chagrinées. Ailes hyalines, stigma très petit, presque linéaire, deux fois aussi long que large, postmarginale nulle, radius plus de trois fois aussi long que la basale. celle-ci oblique comme le nervulus et pas plus longue que lui, *distante du stigma de toute sa longueur.* Fémurs épaissis. Abdomen aussi long que le thorax. Taille : 3 mm. — Mexique : Vera Cruz : Atoyac, en mai (H. H. Smith) ; 2 exemplaires.

2. H. MULTIDENTATUS n. sp.

♀. Noir brillant ; mandibules, trois premiers articles antennaires, pattes et les quatre hanches postérieures roux. Tête un peu transversale, plus large en avant qu'en arrière, à ponctuation petite et assez dense, mandibules graduellement élargies, terminées par sept dents ; yeux faiblement pubescents, trois fois aussi longs que les joues, à peine plus longs que leur distance du bord occipital, ocelles postérieurs un peu plus distants du bord occipital que l'un de l'autre, trois fois plus distants des yeux que l'un de l'autre. Scape arqué, un peu plus long que les deux articles suivants réunis, ceux-ci de moitié plus longs que gros, les suivants à peine plus longs que gros. Thorax moins large que la tête, pronotum graduellement élargi, aussi long que le mesonotum et le scutellum réunis, à ponctuation éparse et peu distincte, mesonotum plus long que le scutellum, sans sillons parapsidaux mais avec un vestige des sillons externes, scutellum avec un sillon arqué à sa base, segment médian subcarré, avec trois arêtes parallèles, ridé irrégulièrement, angles inermes. Ailes brunes, avec une bande transversale hyaline située sous le stigma, qui est presque linéaire ; radius 3-4 fois aussi long que la basale, celle-ci oblique et aboutissant à l'extrémité de la sous-costale, nervulus plus long que la basale, anguleux au milieu. Tibias non spinuleux. Abdomen convexe, conformé comme d'ordinaire. Taille : 5 mm. — Maroc : Chichaoua.

GENRE RHABDEPYRIS Kieff.

1. Nervulus émettant au tiers antérieur un rameau brun, tête allongée, yeux velus . . . . . . 1. *R. dimorphus* n. sp.
— Nervulus simple, tête pas plus longue que large, yeux glabres . 2.
2. Yeux d'un tiers plus longs que leur distance du bord occipital . 2. *R. australiensis* n. sp.
— Yeux trois fois aussi longs que leur distance du bord occipital . 3. *R. origenus* n. sp.

1. R. DIMORPHUS n. sp.

♂ ♀. Noir ; mandibules, antennes de la femelle, tarses et articulations des pattes roux, reste des pattes brun ou roux brun ; le mâle a les antennes brunes et les fémurs presque noirs. Tête et thorax avec une ponctuation dense et assez grosse, mesonotum et scutellum lisses et brillants. Tête de la femelle de moitié plus longue que large, moins large que le thorax, bords latéraux subparallèles, yeux velus, deux fois aussi longs que les joues, aussi longs que leur distance du bord occipital, ocelle antérieur situé vis-à-vis du bord postérieur des yeux, ocelles postérieurs deux fois plus distants du bord occipital que l'un de l'autre, guère plus éloignés des yeux que du bord occipital, clypeus caréné, mandibules graduellement élargies, avec 3 ou 4 dents, dont l'externe est longue et pointue. Scape arqué, égal aux trois articles suivants réunis, 2ᵉ article de moitié plus long que gros, les suivants à peine plus longs que gros. Tête du mâle guère plus longue que large, aussi large que le thorax, article 2ᵉ des antennes de moitié plus long que gros, les suivants deux fois, leur pilosité dressée et courte. Pronotum graduellement élargi en arrière, aussi long que le mesonotum et le scutellum réunis, ceux-ci subégaux, sillons parapsidaux divergents, sillon basal du scutellum mince et un peu arqué, segment médian un peu plus long que large, marginé, ridé, avec trois arêtes parallèles et percurrentes, angles postérieurs aigus. Ailes du mâle normales, brunâtres, stigma sublinéaire, blanc à la base, radius sortant de l'extrémité du stigma, 3-4 fois aussi long que la basale, celle-ci peu oblique, plus courte que le nervulus et aboutissant à l'extrémité de la sous-costale, nervulus arqué, *émettant au tiers antérieur un rameau brun ;* une nervure blanche continue la direction de la médiane et se ramifie sous l'extrémité du radius. Ailes de la femelle ne dépassant pas le segment médian, sans nervures distinctes. Pattes poilues, fémurs grossis, surtout chez la femelle, articles 2-4 des tarses antérieurs de la femelle un peu plus longs que gros, crochets tarsaux avec une dent petite et peu distincte. Abdomen convexe et conique dans les deux sexes. Taille : 3,5 mm. — Tanger ; 5 ♀ et 2 ♂.

2. R. AUSTRALIENSIS n. sp.

♀. Noir ; dessous du flagellum et écaillettes roux, quatre tibias postérieurs et tous les tarses roux brun. Tête pas plus longue que large, tronquée en arrière, à points gros et peu denses, bords latéraux parallèles en arrière des yeux, joues subnulles, yeux glabres, d'un tiers plus longs que leur distance du bord occipital, ocelles postérieurs situés sur le bord occipital, front bilobé, mandibules graduellement élargies, pluridentées au bout. Palpes peu longs, les maxillaires, de 5-6 articles, les labiaux de 2 ou 3. Scape gros, arqué, égal aux trois articles suivants réunis, 2ᵉ article le plus mince, les suivants aussi gros que longs, graduellement amincis et allongés, les derniers distinctement plus longs que gros. Thorax lisse et brillant, avec quelques points épars ; pronotum graduellement élargi en arrière, presque deux fois aussi long que le mesonotum, sillons parapsidaux parallèles et percurrents, sillons externes plus minces ; scutellum à sillon basal peu large, légèrement arqué, un peu élargi aux deux bouts ; segment médian transversal et marginé, avec cinq arêtes percurrentes, dont l'externe est un peu arquée, angles postérieurs tronqués, partie postérieure déclive un peu excavée, lisse, faiblement rugeuse le long de l'arête médiane, métapleures finement striées en long, mésopleures avec un sillon longitudinal et oblique. Ailes brunâtres, nervures et stigma brun clair, stigma obtus, un peu plus long que large, blanc à la base, sous-costale peu distante de la costale, radius sortant du milieu du stigma, 2 1/2 fois aussi long que la basale, celle-ci oblique et aboutissant à l'extrémité de la sous-costale, nervulus aussi long et aussi oblique que la basale ; des lignes blanches indiquent un cubitus bifurqué, une transversale unissant l'extrémité du radius au rameau antérieur du cubitus, deux autres transversales unissant l'une le rameau inférieur, l'autre la tige du cubitus à la ligne blanche qui indique la discoïdale ou l'anale ; ailes inférieures avec cinq crochets frénaux. Fémurs fortement élargis, surtout les quatre antérieurs, tibias intermédiaires densément spinuleux sur toute leur étendue, tibias postérieurs spinuleux dessous, articles 1-4 de tous les tarses spinuleux, ceux des tarses antérieurs graduellement raccourcis, le 4ᵉ aussi long que gros, crochets tarsaux avec une dent au milieu. Abdomen allongé, convexe, graduellement aminci, terminé par un stylet tronqué. Taille : 8,5 mm. — Australie.

3. R. origenus n. sp.

♀. Noir ; mandibules, antennes, écaillettes et pattes sauf les hanches, rousses. Tète et thorax brillants, à points denses et peu gros. Tète un peu transversale, tronquée en arrière, amincie en avant, yeux glabres, trois fois aussi longs que leur distance du bord occipital, ocelles postérieurs situés contre le bord occipital, joues très petites, front bilobé au bord antérieur, mandibules peu longues, avec une dent distincte ; palpes maxillaires de 4-5 articles. Antennes insérées aux lobes du front, l'une contre l'autre, scape arqué, un peu plus gros que le flagellum, égal aux trois ou quatre articles suivants réunis, 2e et 3e articles à peine aussi longs que gros, les suivants un peu plus longs que gros. Pronotum graduellement élargi en arrière, aussi long que le mesonotum et le scutellum réunis, sillons parapsidaux percurrents, sillon basal du scutellum arqué, segment médian un peu transversal, marginé, chagriné, avec cinq arêtes percurrentes, dont l'externe est un peu oblique, intervalles entre les arêtes ridés transversalement, partie déclive excavée, striée transversalement, métapleures mates et sublisses. Ailes presque hyalines, stigma trois fois aussi long que large, sublinéaire, blanc à la base, basale oblique, égale au nervulus qui est perpendiculaire, radius double de la basale, postmarginale nulle. Fémurs antérieurs très élargis et comprimés, presque ellipsoïdaux, articles 2-4 des tarses antérieurs transversaux et cordiformes, tibias intermédiaires spinuleux en dehors, crochets tarsaux avec une dent au milieu. Abdomen de conformation ordinaire, tarière proéminente. Taille : 5 mm. — Mexique, Guerrero : Chilpancingo, à une altitude de 1533 m., en juin (H. H. Smith).

Genus Epyris Westw.

1. Tête et thorax d'un vert métallique ; pronotum subcarré ; crochets tarsaux trilobés . . . . 2.
— Tête et thorax noirs ; pronotum graduellement élargi en arrière ; crochets bilobés ou avec une dent. . . . . 4.

2. Tibias intermédiaires spinuleux, sillons parapsidaux presque parallèles. . . . . 3.
— Tibias intermédiaires non spinuleux, sillons parapsidaux très divergents. . . . . 3. *E. subviridis* n. sp.
3. Ailes brunes avec une bande transversale hyaline, tibias intermédiaires comprimés et fortement élargis . . . . 1. *E. viridis* n. sp.
— Ailes brunes sans bande hyaline, tibias intermédiaires non élargis. 2. *E. viridissimus* n. sp.
4. Fossettes du scutellum rapprochées l'une de l'autre, abdomen roux sauf les deux premiers segments . . . . 4. *E. laticrus* n. sp.
— Fossettes du scutellum à fossettes petites et très distantes l'une de l'autre, abdomen noir en entier. 5.
5. Yeux glabres, deux fois aussi longs que leur distance du bord occipital . . . . 5. *E. valens* n. sp.
— Yeux velus, un peu plus courts que leur distance du bord occipital . . . . 6. *E. oriplanus* n. sp.

1. E. VIRIDIS n. sp.

Fig. 9, crochet tarsal.

♀. Tête et thorax d'un vert métallique et très brillants, segment médian, métapleures et metasternum d'un noir bleuâtre métallique, abdomen noir, sauf la moitié postérieure qui est jaune roussâtre comme les palpes, les pattes et les antennes, hanches noires dessus, rousses dessous, mandibules roux brun. Tête à peine transversale, à ponctuation dense et assez grosse, yeux glabres, trois tois aussi longs que leur distance du bord occipital, ocelles postérieurs aussi distants du bord occipital que l'un de l'autre, deux fois plus distants des yeux, occiput tronqué, front non bilobé, mais déclive perpendiculairement au clypeus qui est enfoncé et caréné, mandibules d'égale largeur, tronquées au bout qui est armé de cinq dents très petites, l'externe un peu plus longue. Palpes longs, les maxillaires de cinq articles, les labiaux de trois articles proéminents. Antennes insérées à la déclivité du front, de chaque côté de la carène du clypeus, à pubescence appliquée et à peine perceptible, scape arqué, comprimé, élargi, plus long que les trois articles suivants réunis, articles 2-12 transversaux, 13^e ovoïdal. Pronotum, mesonotum et scutellum avec une ponctuation plus éparse, pronotum presque carré, presque deux fois aussi long que le mesonotum ; sillons parapsidaux élargis en arrière, où ils sont distants de deux fois leur largeur, percurrents, à peine divergents en avant, lobes latéraux du mesonotum avec un sillon près des écaillettes ; scutellum aussi long que le mesonotum, graduellement aminci en arrière, les deux fossettes basales très distantes et réunies par un mince sillon transversal ; segment médian carré, marginé, avec cinq arêtes percurrentes, parallèles et rapprochées, espace entre les arêtes ridé transversalement, espace entre elles et le bord latéral lisse et brillant, une large gouttière longe le bord latéral, angles postérieurs tronqués, partie déclive perpendiculaire, très finement striée en travers, à arête médiane et percurrente, métapleures perpendiculaires, lisses ou très finement striées, mésopleures avec quelques points épars. Ailes antérieures enfumées, avec une large bande transversale hyaline, qui a comme limite proximale le nervulus et la basale et atteint distalement le tiers du radius ; nervure sous-costale adjacente à la costale, stigma petit, ellipsoïdal, deux fois aussi long que large, blanc à la base, basale pas plus longue que le nervulus, oblique et sinueuse, aboutissant à l'extrémité de la sous-costale, radius presque droit, trois fois aussi long que la basale, distante de la pointe alaire de presque toute sa longueur ; une ligne blanche sort de la base de la nervure basale et se divise en trois rameaux, vis-à-vis de l'extrémité du radius, qui est reliée au rameau supérieur par une transversale blanche ; ailes inférieures presque hyalines, avec cinq crochets frénaux. Fémurs de toutes les pattes et tibias intermédiaires comprimés et fortement élargis, les fémurs intermédiaires à peine plus longs que larges, tibias intermédiaires spinuleux en dehors, éperons 1, 2, 2, articles 2-4 des tarses antérieurs pas plus longs que gros, aux tarses postérieurs ils sont graduellement raccourcis, le 1er égal aux deux suivants réunis, le 4^{e} encore plus long que gros, crochets tarsaux (Fig. 9) avec trois dents, dont la terminale ou l'extrémité du crochet est la plus longue, aux pattes postérieures, le fémur est inséré non à l'extrémité, mais au côté du trochanter. Abdomen allongé, convexe, graduellement aminci en un cône pointu, tarière rousse. Taille : 7-8 mm. — Mexique, Tabasco : Teapa, en mars (H. H. Smith).

2. E. VIRIDISSIMUS n. sp.

♂. Couleur du précédent, sauf que le scape est noir, le dessus des 5 ou 6 articles suivants assombri, les mandibules, les pattes et seulement le tiers postérieur de l'abdomen sont roux. Scape de moitié plus long que gros, non arqué, 2^{e} article très petit, 3^{e} beaucoup plus grand que le 2^{e}, mais encore transversal, les suivants graduellement allongés, 10-13 deux fois aussi longs que gros. Mesonotum aussi long que le pronotum, sillons parapsidaux subparallèles, très élargis en arrière, où ils sont distants de moins de leur largeur, n'atteignant pas le bord antérieur. Scutellum plus court que le mesonotum. Métapleures grossièrement ridées ou striées en long. Ailes antérieures enfumées, sans bande hyaline, radius double de la basale. Tibias intermédiaires spinuleux, mais non élargis, les fémurs intermédiaires moins fortement élargis que chez le précédent. Abdomen et autres caractères comme chez le précédent. Taille : 7 mm. — Mexique, Tabasco : Teapa, 5 ♂ en mars.

3. E. SUBVIRIDIS n. sp.

♂. Ne diffère de *E. viridissimus* que par les caractères suivants : la couleur verte est moins brillante, l'abdomen n'a que le segment anal roux jaune, la ponctuation de la tête est très fine et éparse, les antennes ont des poils dressés, aussi longs que la moitié de l'épaisseur des articles, les sillons parapsidaux sont percurrents et très divergents, le mesonotum un peu plus court que le pronotum, les tibias intermédiaires non spinuleux. Taille : 5 mm. — Mexique, Tabasco : Teapa.

4. E. LATICRUS n. sp.

♀. Noir ; tarses et abdomen sauf les deux premiers segments et le stylet, roux. Tête subcarrée, un peu plus longue que large, à pubescence appliquée et blanchâtre, brillante, ponctuée assez densément et assez grossièrement, yeux glabres, d'un tiers plus longs que leur distance du bord occipital, ocelles postérieurs aussi distants du bord occipital que l'un de l'autre, deux fois plus distants des yeux, front bilobé, mandibules graduellement élargies, terminées par 3 ou 4 dents petites et obtuses. Palpes courts, atteignant le milieu de la tête, les maxillaires ayant au moins quatre articles. Antennes insérées aux lobes frontaux, scape gros, arqué, déprimé, égal aux trois articles suivants réunis, 2^e et 3^e articles petits, les suivants plus gros, aussi gros que longs, les derniers graduellement allongés et amincis, 12^e de moitié plus long que gros, plus court que le 13^e. Pronotum graduellement élargi en arrière, allongé, plus de deux fois aussi long que le mesonotum, ponctué, mais moins fortement que la tête ; mesonotum lisse, sauf les alentours de la partie élargie des sillons parapsidaux, qui sont finement pointillés, sillons parapsidaux très divergents en avant, fortement élargis au tiers postérieur, où ils sont séparés seulement de leur largeur, sillons externes rapprochés des écaillettes. Scutellum lisse et brillant, sauf les côtés qui sont finement pointillés. Segment médian carré, avec cinq arêtes rapprochées, parallèles et percurrentes, tout le dessus finement strié en travers, angles postérieurs tronqués, un sillon longe les bords latéraux, partie déclive perpendiculaire, striée finement en travers, avec une arête percurrente, métapleures perpendiculaires et finement striées en long, mésopleures ponctuées. Ailes hyalines, sous-costale à peine séparée de la costale, basale oblique, aboutissant à l'extrémité de la sous-costale, stigma lancéolé, à base blanche, radius sortant après le milieu du stigma, de moitié plus long que la basale, nervulus aussi oblique que la basale ; des lignes blanches indiquent un cubitus bifurqué, dont le rameau supérieur est uni au tiers distal du radius par une transversale, et le rameau inférieur à une nervure anale par une autre transversale un peu oblique ; ailes inférieures sans nervure, à 4 crochets frénaux. Fémurs très larges, surtout les quatre premiers, tibias antérieurs faiblement grossis, les intermédiaires spinuleux, articles 2-4 des tarses antérieurs pas plus longs que gros, cordiformes, crochets tarsaux bifides, la dent proximale plus courte ; tous les articles tarsaux sont spinuleux au bout. Abdomen convexe, graduellement aminci en arrière stylet obtus, tarière proéminente. Taille : 8-9 mm. — Ceylan : Colombo, 2 exemplaires.

5. E. VALENS n. sp.

♀. Noir ; mandibules, palpes, antennes, écaillettes, hanches et pattes roux jaune. Tête rectangulaire en arrière, graduellement amincie en avant, à peine plus longue que large, lisse, brillante, avec une ponctuation peu dense et peu grosse, yeux glabres, deux fois aussi longs que leur distance du bord occipital, front bilobé, mandibules graduellement élargies, pluridentées au bout. Scape déprimé, arqué, très large, égal aux trois articles suivants réunis, ceux-ci d'abord aussi gros que longs, puis allongés. Pronotum graduellement élargi en arrière, trois fois aussi long que le mesonotum, ponctué comme la tête ; mesonotum plus court que le scutellum, avec quatre sillons percurrents ; scutellum avec une très petite fossette de chaque côté de sa base ; segment médian aussi long que large, avec cinq arêtes rapprochées et percurrentes, ridé transversalement entre les arêtes, espace entre les arêtes et le bord latéral lisse et brillant, un mince sillon longe le bord latéral, partie déclive un peu excavée, avec une arête médiane, à stries transversales et à peine perceptibles, angles tronqués, métapleures chagrinées finement, mesopleures brillantes. Ailes jaunâtres, nervures et stigma brun clair à base blanche, sous-costale proche de la costale, stigma obtus, elliptique, radius double de la basale, celle-ci très oblique et aboutissant à l'extrémité de la sous-costale, nervulus aussi oblique et aussi long que la basale ; des lignes blanches indiquent un cubitus bifurqué, dont le rameau supérieur est réuni au tiers distal du radius par une transversale et le rameau inférieur uni, dès son origine, par une transversale à la nervure anale ; ailes postérieures avec 4 crochets frénaux.

Fémurs très élargis, surtout les quatre antérieurs, tibias intermédiaires densément spinuleux, articles 2-4 des tarses antérieurs transversaux et cordiformes, crochets avec une petite dent au milieu. Abdomen convexe, allongé, graduellement aminci en arrière, sans stylet, tarière proéminente. Taille : 7 mm. — Pundaloya.

6. E. ORIPLANUS n. sp.

♀. Noir ; mandibules, antennes, col, écaillettes, pattes et quatre hanches postérieures roux jaune. Tête et thorax brillants, à ponctuation petite, assez dense, intervalles lisses. Tête allongée, amincie en avant, tronquée en arrière, yeux velus, un peu plus courts que leur distance du bord occipital, ocelles postérieurs situés contre le bord occipital, front bilobé, mandibules étroites, avec une dent pointue et quelques autres très petites et peu distinctes. Palpes maxillaires de 4 ou 5 articles. Antennes insérées l'une contre l'autre aux lobes frontaux, scape un peu plus gros que le flagellum, arqué, égal aux 3 ou 4 articles suivants réunis, 2^{e} et 3^{e} articles à peine aussi longs que gros, les suivants un peu allongés. Thorax plus mince que la tête ; pronotum allongé, plus long que le mesonotum et le scutellum réunis, sillons parapsidaux parallèles ; fossettes du scutellum très distantes et petites ; segment médian mat, un peu allongé, marginé, avec une arête médiane et, de chaque côté d'elle, une arête plus faible s'arrêtant au milieu, partie déclive excavée, brillante, sublisse, avec une arête ; métapleures finement striées en long, mésopleures lisses. Ailes hyalines, stigma trois fois aussi long que large, sublinéaire, blanc à la base, postmarginale nulle, sous-costale située contre la costale, radiale triple de la basale, nervulus et basale obliques et d'égale longueur, la basale aboutit à l'extrémité de la sous-costale. Fémurs antérieurs comprimés et très élargis, articles 2-4 des tarses antérieurs pas plus longs que gros, crochets avec une petite dent au milieu. Abdomen comme d'ordinaire, tarière proéminente. Taille : 4-5 mm. — Mexique, Guerrero : Chilpancingo, en juin à une altitude de 1533 m.

Epyris bipartitus Kieff.

Fig. 10, mandibule.

♀. Mandibules allongées, armées d'une dent unique à leur extrémité (Fig. 10). Palpes maxillaires composés de 6 articles, les labiaux de trois. Dent des crochets tarsaux très petite et visible seulement au microscope. Taille : 2,5-4 mm. — Tanger, 16 exemplaires.

Epyris bipartitus var. maroccanus n. var.

♀. Noir ; antennes, hanches et pattes rousses. Tète et thorax lisses, sauf le segment médian, métapleures fortement striées en long. Mandibules conformées comme chez le type. Taille : 5 mm. — Tanger.

Genre Bradepyris, Kieff.

1. Angles postérieurs du segment médian avec une courte spinule. 1. *B. armatus* n. sp.
— Angles postérieurs du segment médian inermes. . . . . . 2. *B. squamifer* n. sp.

1. B. armatus n. sp.

♀. Noir ; pattes brun noir, antennes, genoux, tarses et écaillettes roussâtres, bord postérieur du pronotum et du scutellum roux brun. Tète allongée, à bords parallèles en arrière des yeux, luisante, avec une ponctuation fine et éparse, yeux pubescents, à peine plus longs que leur distance du bord occipital, ocelles postérieurs à peine plus distants du bord occipital que l'un de l'autre, un peu plus loin des yeux que du bord occipital, joues égalant la moitié des yeux. Pronotum à ponctuation éparse, quatre fois aussi long que le mesonotum qui est beaucoup plus court que le scutellum, tous deux lisses, sillons parapsidaux distincts, segment médian convexe, lisse et brillant, avec un sillon médian étroit et percurrent, angles postérieurs avec une courte spinule, partie déclive chagrinée, avec une trace d'arête percurrente. Ailes nulles. Abdomen allongé, un peu déprimé, brièvement poilu. Taille : 3, 5-4 mm. — Tanger, en février et mars.

2. B. SQUAMIFER n. sp.

♀. Noir ; quatre premiers articles antennaires, écaillettes, genoux et tarses roux brun. Mesonotum au moins aussi long que le scutellum, sillons parapsidaux profonds, convergents en arrière. Ailes en écaille, atteignant l'extrémité du scutellum. Sillon du segment médian très large et ridé transversalement, angles postérieurs inermes. Taille : 4 mm. Pour tout le reste, semblable au précédent. — Tanger, en février.

TRACHEPYRIS HAEMORRHOIDALIS n. sp.

♀. Noir ; mandibules, antennes, hanches sauf les antérieures, pattes et tiers postérieur de l'abdomen roux clair. Tête et thorax lisses et brillants, avec quelques points épars. Tête à peine transversale, arquée au bord occipital, yeux glabres, d'un tiers plus longs que leur distance du bord occipital, ocelles postérieurs deux fois aussi distants des yeux que l'un de l'autre, situés contre le bord occipital. Antennes composées de 13 articles, scape déprimé, 2-3 fois aussi large que les articles suivants et aussi long que les 3 ou 4 articles suivants réunis, avec des soies dressées, un peu plus courtes que sa largeur, les articles suivants à peine aussi longs que gros, 2^e et 3^e brièvement spinuleux. Pronotum plus long que le mesonotum et le scutellum réunis, segment médian un peu transversal, marginé, rectangulaire, avec trois arêtes, dont les externes convergent postérieurement et atteignent la médiane, intervalles entre ces arêtes mats et ridés transversalement, le reste lisse et brillant, ainsi que la partie déclive, qui est traversée par une arête. Ailes hyalines, nervures jaunes, stigma brun, ovalaire, bord antérieur cilié jusqu'au stigma, costale subnulle, basale très oblique, aboutissant à l'extrémité de la sous-costale, radius sortant du tiers distal du stigma, brun, égal à la basale et conformé comme chez le type, nervulus arqué, plus court que la basale. Fémurs médiocrement grossis, sauf aux pattes antérieures, dont le fémur et le tibia sont fortement élargis, articles 2-4 des tarses antérieurs armés d'appendices en lamelles linéaires, aux quatre autres tarses les articles sont grêles, graduellement raccourcis, le 4ᵉ encore plus de deux fois aussi long que gros, crochets avec une dent au milieu, tibias intérmédiaires spinuleux. Abdomen déprimé, graduellement aminci en arrière, tarière proéminente. Taille : 4 mm. — Indes Orientales, Karachi, en juillet 1909 (E. Comber) ; capturé traînant une chenille longue de 8 mm., sur le sable d'un ruisseau à sec.

SCLERODERMA DOMESTICUM Latr.

Environs de Tanger ; 2 femelles.

SCLERODERMA UNICOLOR Westw.

Une femelle capturée aux environs de Tanger.

APENESIA AMAZONICA Westw.

Deux femelles capturées à Damma.

II. — DRYINIDES.

ANTEON HIRTICORNIS n. sp.

♂. Noir ; mandibules, clypeus, antennes, palpes, tibias antérieurs et tous les tarses sauf le 5ᵉ article roux jaune. Tête mate, grossièrement ridée-réticulée, avec deux arêtes parallèles qui vont du clypeus à chacun des ocelles externes ; deux autres arêtes vont des mêmes ocelles en divergeant jusqu'au bord occipital, qui est presque tronqué et marginé ; tempes lisses et brillantes au milieu, à gros points alignés le long du bord postérieur et le long des yeux ; joues avec une arête qui relie l'œil à la mandibule ; palpes maxillaires très longs, atteignant les hanches antérieures, avec quatre articles après la flexion, palpes labiaux avec deux articles après la flexion ; mandibules à quatre dents égales. Antennes hérissées de poils dressés, denses, plus longs que la grosseur des articles, aux deux premiers articles, ces poils se trouvent seulement sur la partie ventrale ; scape deux fois aussi long que le 2^e article, celui-ci de moitié plus long que gros, 3^e double du 2^e, plus long que le 4^e, 4-9 un peu plus de deux fois aussi longs que gros, 10^e un peu plus long que le 9^e. *Pronotum non visible d'en haut,* sauf sur les côtés ; mesonotum graduellement aminci en avant, lisse et brillant comme le scutellum ; *sillons parapsidaux percurrents,* profonds, divergents en avant ; segment médian graduellement déclive, grossièrement réticulé, sauf le milieu qui est densément ridé en travers, sans aire lisse ; métapleures réticulées grossièrement, mésopleures lisses, brillantes, avec un sillon transversal oblique. Ailes hyalines, stigma brun noir, radius anguleux, ses deux parties égales, une 3^e partie, visible seulement par transparence, est plus longue que la 2^e et atteint le bord. Abdomen petit, plus court que le thorax. Taille : 3 mm. — Mexique, Vera Cruz : Atoyac, en mai (H. H. Smith).

ANTEON DODDI n. sp.

♀. Noir ; mandibules, palpes, antennes sauf les trois derniers articles, extrémité des hanches, pattes sauf la massue des fémurs et le 5^e article des tarses intermédiaires et postérieurs roux. Tête mate, vertex ponctué en dé, front ridé grossièrement et irrégulièrement, joues avec un sillon, lisses et brillantes comme les tempes. Ocelles en triangle, les postérieurs un peu plus distants l'un de l'autre que des yeux, également distants des yeux et du bord occipital, occiput à peine plus long que le 2^e article antennaire, bord occipital marginé et faiblement arqué, mandibules à quatre dents ; palpes maxillaires avec trois longs articles après la flexion. Antennes presque glabres, scape égalant au moins les articles 3 et 4 réunis, 2^e article de moitié plus long que gros, 3^e 2 1/2 fois, 3-10 graduellement et faiblement grossis et raccourcis, 9ᵉ de moitié plus long que gros. *Pronotum quadrangulaire,* un peu transversal, moins large que la tête ou que le mesonotum, densément ponctué ; mesonotum et scutellum lisses et brillants, *sillons parapsidaux nuls ;* segment médian horizontal antérieurement, presque perpendiculaire postérieurement, mat et densément ridé, la partie déclive avec une grande aire qui est lisse au milieu, allongée, arrondie en avant où elle émet, de chaque côté, une courte arête horizontale. Ailes hyalines, avec une grande tache brunâtre sous le stigma, qui est brun et lancéolé, nervures blanchâtres, radius brun, 2ᵉ partie presque ponctiforme, prolongée jusqu'au bord par une fausse nervure. Métatarse antérieur aussi long que le 5ᵉ article, les articles 2-4 courts, branche interne de la pince grosse, subcylindrique, non amincie ni rétrécie, sa partie libre guère plus longue que sa partie basale (qui est le 5ᵉ article tarsal), avec deux rangées de lamelles et de soies, branche externe (qui est le grand crochet tarsal) blanche, arquée, inerme et un peu plus courte que l'interne. Abdomen conformé comme d'ordinaire. Taille : 5 mm. — Queensland : Townsville, 25. VIII. 1902 (F. P. Dodd).

LE CHELLÉEN BELGE

PAR

L'ABBÉ J. CLAERHOUT
Curé de Caster, près Anseghem

BIBLIOGRAPHIE. — Nous groupons ici des indications bibliographiques assez étendues, pour permettre au lecteur de se renseigner et pour justifier tout ce que nous avançons.

British Museum. A Guide to the antiquities of the Stone Age. London, 1902, pp. 29-33. French river-drift Series.

G. Cumont. *Les poignards en silex belges, d'après M. Obermaier.* Dans Bulletins et Mémoires de la Société d'Anthropologie de Bruxelles. Tome XXVII, 1908, pp. xxvii-xliii. — Preuves de la fausseté de l'outillage Chelléen de la région de Binche.

J. Déchelette. *Manuel d'Archéologie, I. Archéologie préhistorique.* Paris, 1908, pp. 35-76. — Faune et chronologie de l'ère quaternaire. Position stratigraphique, outillage et gisements du Chelléen. Bibliographie.

De Loë, E. de Munck. *Essai d'une carte préhistorique et protohistorique des environs de Mons.* Dans Annales de la Soc. d'Archéol. de Brux. Tome IV, 1890.

G. et A. de Mortillet. *La Préhistoire.* Paris, 1910, pp. 131-151 : outillage Chelléen ; pp. 556-596 : distribution du Chelléen.

E. de Munck. *Note préliminaire sur des silex quaternaires découverts dans le Hainaut.* Dans Bull. et Mém. de la Soc. d'Anthropol. de Brux. Tome VI, 1887-1888, pp. 182.

E. de Munck. *Observations nouvelles sur le quaternaire de la région de Mons-Saint-Symphorien-Spiennes.* Ibidem. Tome XI, 1892-1893, pp. 198-203. — L'auteur fournit la même coupe du quaternaire que celle que l'on peut observer dans le tableau exposé dans la salle I (Belgique primitive), du Musée du Cinquantenaire.

E. de Munck. *Observations sur quelques gisements préhistoriques de la région de Mons.* Ibidem. Tome XIX, 1900-1901, pp. cxxvi-cxliv.

E. de Munck. *Note sur les principales découvertes paléolithiques faites en Belgique.* Dans Ann. de la Soc. d'Archéol. de Brux. Tome II, 1888.

M. De Puydt. *Notes et constatations relatives à des gisements de silex taillés découverts sur le territoire des communes de Haine-Saint-Pierre, Ressaix,* *Espinois*. Dans Bull. et Mém. de la Soc. d'Anthrop. de Bruxelles, tome XVII, 1898-1899, pp. 98-122. — Réserves concernant l'outillage de la région de Binche, alors que l'authenticité n'était pas encore mise en doute.

J. Fraipont. *La Belgique préhistorique et protohistorique*. Dans Bulletin de l'Académie royale de Belgique, année 1901, pp. 823-877 ; pp. 829-830 ; industrie Chelléenne.

A. Gaudry. *Sur la similitude des dents de l'Homme et de quelques animaux*. Dans l'Anthropologie, tome XII, 1901 ; pp. 93-102.

S. Müller. *Urgeschichte Europas*. Deutsche Ausgabe von O. L. Jiriczek. Strassburg, 1905, pp. 3-6.

H. Obermaier. *Das geologische Alter des Menschengeschlechts*. Dans Mitteilungen der geologischen Gesellschaft. Wien. III, 1908. — Place du Chelléen dans la chronologie du Pléistocène.

S. Reinach. *Antiquités nationales. Description raisonnée du Musée de St-Germain-en-Laye. I. Époque des Alluvions et des Cavernes*. Paris, 1889. — Bibliographie. Collections du Chelléen.

A. Rutot. *Le préhistorique dans l'Europe centrale*. Dans Annales de la Fédération archéol. et histor. de Belgique. Tome XVII. Congrès de Dinant, pp. 5-268. ; pp. 135-166. Position stratigraphique et collections du Chelléen belge.

A. Rutot. *Les conditions d'existence de l'homme et les traces de sa présence au travers des temps quaternaires et des temps modernes en Belgique*. Dans Bull. et Mém. de la Soc. d'Anthrop. de Brux., tome XVI, 1897-1898, pp. 24-76. — On peut trouver dans cet article la description de l'état physique de la Belgique à l'époque campinienne.

A. Rutot. *Sur l'âge des gisements de silex taillés découverts sur les territoires des communes de Haine-Saint-Pierre, Ressaix, Espinois, etc., canton de Binche, prov. de Hainaut (Belgique)*. Ibidem, tome XVII, 1898-1899, pp. 231-353. — Géologie du Pléistocène et description enthousiaste de l'outillage de la région de Binche.

A. Rutot. *Sur la position du Chelléen dans la chronologie du paléolithique*. Ibidem, tome XIX, 1900-1901, pp. clix-clxii.

A. Rutot. *Sur les nouvelles découvertes faites dans les environs de Ressaix*. Ibidem, tome XXII, 1903. Mémoire V, pp. 1-8.

A. Rutot. *Comparaison du quaternaire de Belgique au Glaciaire de l'Europe centrale*. Dans Bull. de la Soc. belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Tome XIII, 1899. Mémoires, p. 307. — Article très important pour la position stratigraphique du Chelléen belge et la géologie du Pléistocène.

COLLECTIONS. — Voici quelques détails sur certaines collections publiques.

1° Musée d'Histoire naturelle de Bruxelles.

Salle des Vertébrés de la Belgique. Les armoires et les vitrines ne sont pas numérotées. Les vitrines qui abritent le Chelléen portent en dehors l'inscription : Quaternaire paléolithique et en dedans une inscription désignant le gisement Chelléen, dont elles contiennent les récoltes. Il y a une double rangée de 7 vitrines.

Première vitrine. L'industrie Chelléenne à l'Exploitation Helin à Spiennes. Première case : Débitage du silex. Percuteur. Nuclei dont on a détaché des éclats et des lames. Éclats de débitage non utilisés. — 2e case : Éclats et lames intentionnellement débités. Éclats de débitage, portant le bulbe de percussion, non utilisés. Lames de débitage, portant le bulbe de percussion, non utilisées. — 3e case : Coupe de l'exploitation Helin à Spiennes. L'industrie Chelléenne dans la vallée de la Trouille.

2e vitrine. L'industrie Chelléenne à l'Exploitation Helin à Spiennes. Prem. case : Éclats et lames de débitage utilisés. Éclats utilisés, mais peu retouchés. Éclats utilisés pour le raclage et grossièrement retouchés. Lames utilisées et retouchées. Lame-racloir. — 2e case : Instruments dits Écorchoirs. — 3e case : Instruments pour le raclage. — 4e case : Racloirs. Grattoirs.

3e vitrine. L'industrie Chelléenne à l'Exploitation Helin à Spiennes. Prem. case : Racloirs et grattoirs. — 2e case : Pointes-racloirs. Instruments amygdaloïdes, taillés à grands éclats, de forme Chelléenne typique. Éclats craquelés indiquant nettement l'usage du feu. — 3e case : Esquisse géologique. Carte de la distribution de l'industrie Chelléenne en Belgique. Continuation de la notice de la précédente vitrine.

4e vitrine. Gisement de l'Exploitation de L. Hardenpont à Saint-Symphorien. Prem. case : Percuteur. Nuclei d'où des éclats et des lames ont été intentionnellement détachés. Éclats et lames de débitage peu ou point utilisés. — 2e case : Racloirs finement retouchés. Instruments amygdaloïdes de forme Chelléenne typique. — 3e case : Notice sur l'industrie Chelléenne à l'Exploitation Hardenpont. Continuation de la notice sur l'industrie Chelléenne de la vitrine précédente.

5e vitrine. L'industrie Chelléenne dans la vallée de la Haine. Gisement de Leval-Trahegnies. Prem. case : Nuclei d'où l'on a détaché intentionnellement des éclats et des lames. Éclats de débitage. Grands éclats de débitage, dits éclats Levallois. Lames de débitage. — 2e case : Racloirs. Pointes-racloirs. — 3e case : Grattoirs. Notice sur le gisement de Leval-Trahegnies. Continuation de la notice de la vitrine précédente sur l'industrie Chelléenne.

6e vitrine. Gisement de Leval-Trahegnies. Prem. case : Disque pouvant avoir servi de pierre de jet. Lames de débitage, utilisées pour le raclage. Grattoirs. Racloirs de forme à tendance amygdaloïde. Lame-grattoir. — 2e case : Instruments amygdaloïdes, taillés d'un seul côté. Tranchet de forme amygdaloïde. Instruments amygdaloïdes de type Chelléen, de formes diverses. Instrument amygdaloïde, très allongé. Couteau. Pointe de flèche à pédoncule brisé ? — 3e case : Coupe d'une sablière à Leval-Trahegnies. Nucleus de débitage. Racloirs à encoche. Pointe. Grattoirs. Instrument amygdaloïde.

7e vitrine. Gisement du moulin de Haine-Saint-Pierre. Prem. case : Racloirs de formes diverses. Grattoirs de formes diverses. Pointes-racloirs. Hache à tranchant transversal. Tranchet. — 2e case : Instruments amygdaloïdes de type Chelléen, de formes diverses. Poignards. — 3e case : Coupe près du moulin de Haine-Saint-Pierre. Notice sur l'industrie Chelléenne dans la vallée de la Haine.

8e vitrine. L'industrie Chelléenne aux environs de Binche. Prem. case : Nucleus. Éclat Levallois. Percuteurs. Percuteurs à talon, passant à la hache. — 2e case : Grand instrument amygdaloïde, à talon latéral et à base tranchante. Tranchets. Haches à tranchant transversal. Tranchoir travaillé sur les deux faces.

9e vitrine. L'industrie Chelléenne aux environs de Binche. Instruments pour le raclage et le grattage. Prem. case : Lames-racloirs. Racloirs. Grands instruments tendant vers la forme amygdaloïde. Racloirs de forme amygdaloïde. Racloir à manche. — 2e case : Grattoirs de formes diverses. Grattoirs à encoche. Instruments composites.

10e vitrine. L'industrie Chelléenne dans la vallée de la Haine Gisements des environs de Binche. Prem. case : Lames utilisées pour le raclage et le grattage. Grattoirs. Rabots. Racloirs prismatiques Poinçons ou perçoirs. — 2e case : Pointes. Racloirs. Lame. Burin. Instrument avec encoche et pointe. Scies ? Racloirs et grattoirs craquelés par le feu. — 3e case : Coupe dans la gare de Ressaix. Notice sur les gisements des environs de Binche.

11e vitrine. Industrie Chelléenne aux environs de Binche. Prem. case : Disques. Instruments amygdaloïdes, variété ovale surbaissée. — 2e case : Instruments amygdaloïdes, variété surbaissée pointue. Instruments amygdaloïdes, variété ovale pointue. Instruments amygdaloïdes, variété ovale allongée. — 3e case : Suite de la notice de la vitrine précédente. Disques.

12e vitrine. Industrie Chelléenne aux environs de Binche. Prem. case : Instruments amygdaloïdes, type normal. — 2e case : Instruments amygdaloïdes, variété allongée. Instrument en grès landénien. Instruments amygdaloïdes, variété à pointe tronquée tranchante. Instruments amygdaloïdes à talon latéral. — 3e case : Instruments amygdaloïdes.

13e vitrine. L'industrie Chelléenne aux environs de Binche. Prem. case : Évolution et perfectionnement du poignard. — 2e case : Évolution du couteau. Pointes de lances et de javelots. Pointes de flèches.

14e vitrine. L'industrie Chelléenne aux environs de Binche. Prem. case : Évolution du casse-tête. Grand casse-tête. — 2e case : Instrument à étranglement médian. Instrument en spatule, d'usage inconnu. Instrument à contour triangulaire. Racloirs à encoches.

2° MUSÉE DU CINQUANTENAIRE. SECTION DE LA BELGIQUE PRIMITIVE. SALLE I.

Vitrine 1. Série d'amygdales non numérotées, sans indication de provenance, avec l'inscription suivante : « Époque campinienne. Industrie Acheuléenne. Silex taillés suivant un plan préconçu : en forme de pic à talon volumineux ; en amande ; en éclat pointu ; en lame large et en forme de racloir. » — Dans les vitrines du Musée du Cinquantenaire on observe un mélange d'amygdales Chelléennes et Acheuléennes. Toute l'industrie est qualifiée d'Acheuléenne.

Vitrine 4. Au-dessus de cette vitrine on peut voir représentée une coupe, montrant l'allure générale des différents assises du terrain quaternaire, dans la région d'Havré, Saint-Symphorien, Spiennes. Dans la 2e case de la vitrine, on aperçoit des blocs-matrices ou nucleus de l'époque campinienne (Exploitation Helin à Spiennes.)

Vitrine 6. Epoque campinienne. Industrie Acheuléenne. Instruments divers et ossements d'animaux d'espèces éteintes ou émigrées, trouvés associés. (Obourg, Havré, Saint-Symphorien, Spiennes, Mesvin et Baudour. Récoltes De Pauw-de Loë). On aperçoit des ossements d'*Elephas primigenius*, de *Rhinoceros tichorinus*, d'*Ursus spelaeus* et d'*Equus caballus*. Parmi les haches Acheuléennes on observe une douzaine d'amygdales et six racloirs du type Chelléen.

Vitrine 7. Epoque campinienne. Industrie Acheuléenne. Elouges. Hainaut. Récoltes de feu Chs De Bove : un coup de poing Chelléen, long d'environ 15 centimètres. — Spiennes. Saint-Symphorien. Baudour. Raismes. Ciply. Récoltes E. de Munck : deux amygdales, une de six, une autre de dix centimètres de longueur du type de Chelles. — Ottenbourg, Brabant. Récoltes Louis De Pauw : un beau coup de poing taillé à gros éclats en silex brunâtre.

3° Musée archéologique de Liége. Salle des antiquités préhistoriques.

Vitrine 2. Elle abrite plusieurs amygdales Chelléennes. Ce sont des originaux ou des moulages. La plupart de ces coups de poing Chelléens font partie des collections de M. De Puydt et de M. le chanoine Gaillard. Hache Chelléenne, trouvée à Argenteau. Haches Chelléennes, trouvées à Moha, à Ampsin, à Tilff. Quatre amygdales Chelléennes, sans indication du lieu de provenance.

Vitrine 33. Elle contient une riche collection de faux outillage Chelléen, récolté aux environs de Binche.

On donne le nom de Chelléen au stade le plus ancien de l'existence de l'homme en Europe. Ce nom désigne la phase la plus ancienne du Paléolithique ou le Paléolithique inférieur.

Les vestiges de l'époque Chelléenne se voient dans les alluvions anciennes des cours d'eaux. Cette époque est contemporaine de la dernière période interglaciaire du Pleistocène et elle est caractérisée par un outillage très primitif de forme plus ou moins amygdaloïde.

Le Chelléen belge est l'objet de ce mémoire ; nous traiterons successivement de ses caractères, de ses gisements et de sa civilisation.

I

CARACTÈRES.

L'époque Chelléenne est caractérisée par sa place bien déterminée dans la chronologie du quaternaire, sa position stratigraphique, sa faune spéciale et son outillage typique.

Chronologie du Quaternaire. — Nous avons dressé le tableau de la chronologie générale du Pléistocène, d'après les travaux les plus récents de M. Boule (1), M. Déchelette (2) et M. l'Abbé Obermaier (3).

GÉOLOGIE	PALÉONTOLOGIE		ARCHÉOLOGIE
Pléistocène supérieur	Age du Renne	*Rangifer tarandus. — Elephas primigenius.*	Magdalénien solutréen Aurignacien.
Pléistocène moyen Première phase du Postglaciaire. Quatrième période glaciaire (*Würmien*)	Age du Mammouth	*Rangifer tarandus. — Elephas primigenius. — Rhinoceros tichorinus.*	Moustérien. Acheuléen
Pléistocène inférieur Troisième période interglaciaire. Troisième période glaciaire *(Rissien).* Deuxième période interglaciaire. Deuxième période glaciaire *(Mindélien).*	Age de l'Hippopotame	*Hippopotamus major.*	Chelléen.

On peut voir dans cette classification quelle place il convient d'attribuer à l'époque Chelléenne ; d'après les dernières observations, on croit que le Chelléen correspond à la troisième période interglaciaire et qu'il n'est antérieur qu'à la quatrième et dernière période glaciaire.

---

(1) E. Boule. *Les grottes de Grimaldi.* Dans l'ANTHROPOLOGIE, tome XVII, 1906, p. 261.

(2) J. Déchelette. *Op. laudat*, p. 46.

(3) H. Obermaier. *Op. citat.*, p. 312.

Position stratigraphique du Chelléen. — Depuis Paris jusqu'à la Belgique s'étendent des terrains, composés d'une série de couches, d'origine et de nature diverses, toujours superposées dans le même ordre.

Leur base est formée par un lit de gros cailloux roulés, surmonté d'un dépôt de sable grossier argileux.

Au-dessus s'étagent des lits de sables, dont les couches supérieures, dites sables gris, sont mélangées d'un dépôt limoneux.

Viennent ensuite des limons calcaires, appelés *loess* ou *ergeron*, que surmontent des limons non calcifères, d'un rouge brun, dits *terre à brique* ou *lehm* (¹).

C'est dans le gravier et le sable de la base, qui reposent sur le tertiaire, qu'on a rencontré le niveau à faune et à industrie Chelléennes (²).

La position du Chelléen est donc nettement déterminée dans les stratifications quaternaires du Nord de la France.

En Belgique, les phénomènes qui se sont accomplis à l'époque quaternaire, ont amené la surperposition des dépôts suivants, si on les considère en commençant par les plus récents (³) :

1° *Le Flandrien*. L'assise supérieure flandrienne comprend des dépôts marins et des dépôts de crues fluviales. Pour ce qui concerne le dépôt de crues fluviales, il est constitué par un sable limoneux bien stratifié, appelé ergeron.

2° *Le Brabantien*. Ce dépôt est composé d'un limon jaune, friable, pulvérulent, dépourvu de stratification, calcareux dans sa masse et considéré comme ayant une origine éolienne.

3° *Le Hesbayen*. Il est constitué par un limon stratifié très fin, très argileux, souvent plastique, gris-bleu foncé à l'état normal, brun clair lorsqu'il est altéré. Il présente les facies suivants en partant de haut : limon gris, parfois tourbeux, à succinées ; limon fendillé ; limon moucheté avec taches noires et traces végétales ; limon panaché, grisâtre, souvent argileux, avec coquilles.

(¹) J. Déchelette. *Op. citat.*, p. 68.

(²) *Ibidem*, p. 72.

(³) A. Rutot. *Comparaison du Quaternaire de Belgique au Glaciaire de l'Europe Centrale*. Dans BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ BELGE DE GÉOLOGIE, DE PALÉONTOLOGIE ET D'HYDROLOGIE, tome XIII, 1899, p. 307 et suiv.

4° *Le Campinien.* Les dépôts du Campinien comprennent des graviers, des sables à allure fluviatile et des vases argilo-sableuses ou glaises, ces dernières jouant le rôle de dépôts de crues.

Qu'ils soient dans le fond des vallées ou étalés sur la terrasse inférieure, les dépôts campiniens sont très riches en fossiles.

Comme vertébrés, on y rencontre les principaux représentants de la faune du Mammouth. *(Elephas primigenius, Rhinoceros thicorinus, Equus caballus, Hyaena speluea, Cervus tarandus, Cervus elaphus, Cervus megaceros, Bos primigenius, Bos taurus, Sus scrofa.)*

5° *Le Moséen.* Les dépôts moséens comprennent deux facies différents : l'un largement répandu, dans toutes les vallées indistinctement : l'autre très localisé dans le delta de la Meuse.

Les sédiments répandus dans les vallées sont d'origine fluviale ; ils consistent en cailloutis, en sables et en glaises, ces deux derniers termes représentant les dépôts de crue.

Vers le bas, ils apparaissent à un niveau un peu plus élevé que le niveau actuel des eaux, c'est-à-dire sur la terrasse inférieure et de là ils montent le long des versants rapides, pour s'étaler sur la terrasse inclinée, commençant de 25 à 30 mètres au dessus du niveau actuel des eaux. Ils recouvrent entièrement cette terrasse, jusque 60 mètres ils cessent d'apparaître au pied du versant rapide, conduisant aux terrasses supérieures.

Les sédiments du second faciès sont localisés dans la partie Nord de la Campine, d'où ils pénètrent en Hollande ; ils semblent vers le bas d'origine marine ; vers le haut, ils prennent l'aspect de dépôts d'estuaire ; à leur base on aperçoit un gravier, surmonté de sables grisâtres, stratifiés, épais, couverts vers le haut de zones de limon très gris, très argileux, micacé, traversées par des lits tourbeux, avec nombreuses souches d'arbres.

Les couches moséennes constituent les couches quaternaires les plus anciennes ; elles reposent sur les couches tertiaires, secondaires ou primaires et renferment plusieurs formes caractéristiques de la faune de l'*Elephas antiquus.*

L'industrie Chelléenne s'observe à l'époque campinienne, dans un cailloutis du Campinien moyen.

Il est à remarquer que la position stratigraphique du Chelléen ne se présente pas avec la même netteté en Belgique, qu'en France où les assises à instruments purement Chelléens sont surmontés par des niveaux distincts à instruments acheuléens. Il est vrai, que l'ancienne exploitation Hélin, à Spiennes, nous montre dans le Campinien moyen, un cailloutis, attribué par M. Rutot, au Chelléen et un peu plus haut un cailloutis à l'industrie acheuléenne, mais on peut objecter que ce niveau Chelléen ne contient que fort peu d'instruments amygdaloïdes, typiques du Chelléen.

Presque partout les gisements du Campinien nous offrent un mélange d'instruments, qui sont traités, tantôt de Chelléens, tantôt d'Acheuléens.

Faune du Chelléen. — Les assises Chelléennes ont livré la faune suivante : *Elephas antiquus ; Rhinoceros Mercki ; Trogontherium ; Ursus spelaeus ; Hippopotamus major ; Hyaena spelaea.*

On remarque quelquefois la présence de l'*Elephas primigenius* et du *Rhinoceros tichorinus,* caractéristique des assises postérieures et c'est cette dernière faune que l'on relève uniquement dans les gisements Chelléens de la Belgique, où la faune propre au Chelléen est absente. « En Belgique, écrit M. Fraipont, les gisements à instruments Chelléens ne contiennent que la faune du Mammouth (¹). »

Une vitrine du Musée du Cinquantenaire abrite des récoltes Chelléennes et Acheuléennes, accompagnées d'ossements d'*Elephas primigenius*, de *Rhinoceros tichorinus,* d'*Ursus spelaeus* et d'*Equus caballus,* qui ont été recueillis dans divers gisements (²).

Ce même fait est mis en lumière par M. Rutot dans une notice qu'on peut lire dans une des vitrines du Musée d'Histoire naturelle de Bruxelles : « Il faut pénétrer dans les couches Campiniennes, caractérisées par la faune du Mammouth, pour rencontrer l'instrument amygdaloïde typique du Chelléen, accompagnée d'une quantité d'outils du même âge. »

Outillage Chelléen. — L'outil qui prédomine à l'époque Chelléenne est un instrument taillé sur les deux faces, de forme amygdaloïde, que l'on peut appeler *coin, amygdale,* plus improprement

---

(¹) J. Fraipont, *op. citat.*, p. 829.

(²) Belgique primitive, Salle I, Vitrine 6.

hache, et auquel on donne généralement le nom du coup-de-poing (¹), proposé par G. de Mortillet.

La forme de cet instrument typique du Chelléen se modifie beaucoup : l'amande peut être ovale ou allongée ; elle s'arrondit parfois jusqu'à devenir presque discoïde ; elle s'allonge quelquefois jusqu'à prendre l'aspect d'une lame ou d'un gros bâton, mais toujours on peut la ramener au type amygdaloïde.

Cet outil varie aussi beaucoup de dimensions et de poids.

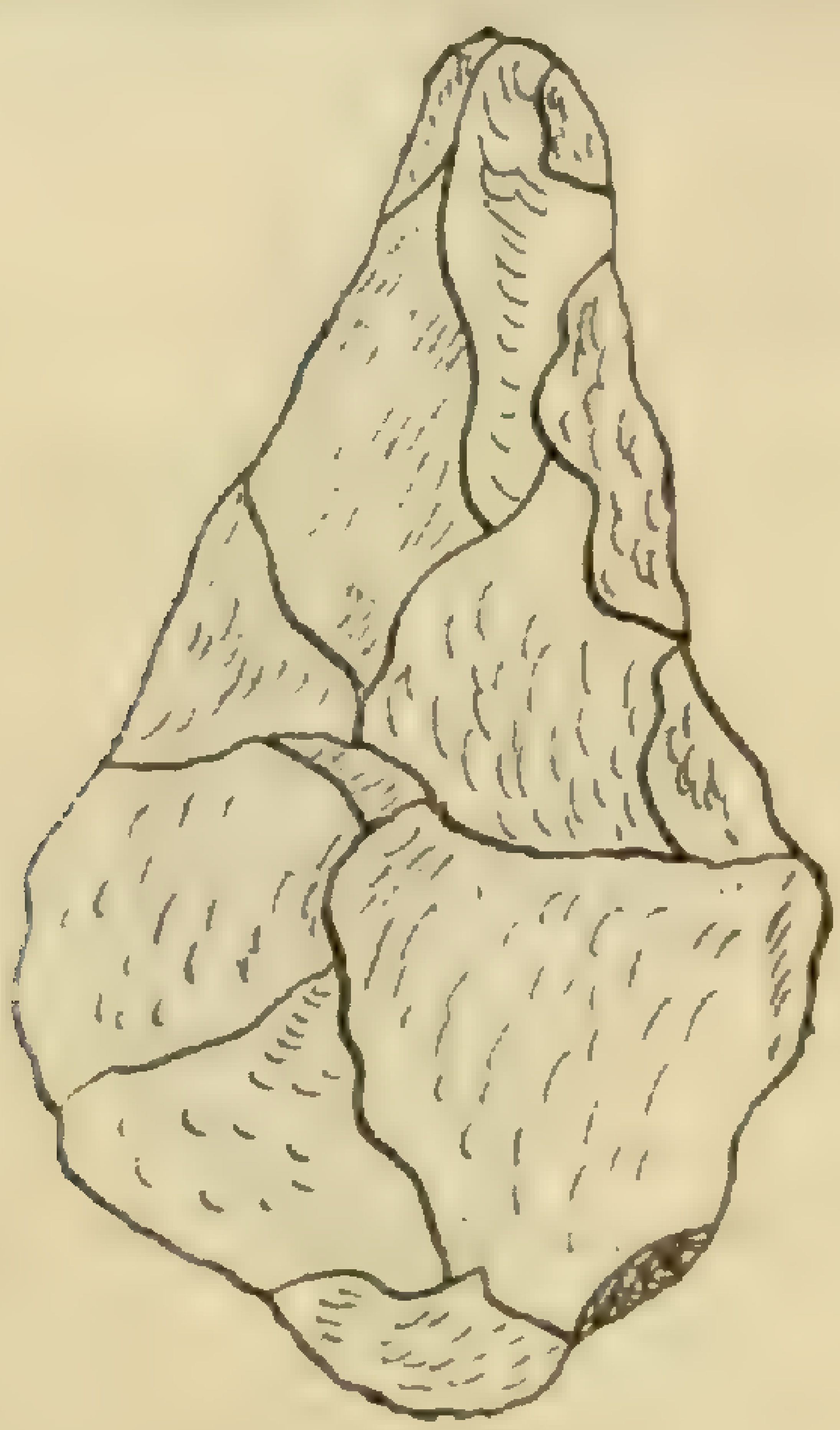


Fig. 1. 1/3 gr.

La matière des amygdales Chelléennes est le silex ou le quartzite.

Cet instrument, pris à la main, — il aurait été difficile de l'emmancher, — pouvait, suivant ses modifications, s'employer comme hache, couperet, couteau, scie, perçoir, ciseau et tranchet.

On a beaucoup discuté la question de savoir si l'amygdale constituait l'unique instrument des tribus Chelléennes. M. d'Acy soutient que dans le gisement de Chelles (Seine-et-Marne), auquel l'époque Chelléenne doit son nom, à côté des haches en forme d'amande, on a recueilli beaucoup d'éclats, qui ont été taillés d'un

---

(¹) La fig. 1 représente un coup-de-poing typique, en silex, provenant des ballastières de Chelles (Seine-et-Marne) et faisant partie de la collection de M. A. de Mortillet. (D'après G. et A. de Mortillet, *Musée préhistorique*, 2ᵉ édition. Paris 1903. Planche V, fig. 28).

seul côté et que l'on peut regarder comme des racloirs, des pointes et des grattoirs (¹).

II

GISEMENTS

Gisement Chelléen de Spiennes. — Dans l'ancienne exploitation Hélin à Spiennes, carrière à ciel ouvert pour l'exploitation du phosphate, apparaît un gisement typique du Chelléen belge ; si nous le faisons connaître, on pourra se représenter le Chelléen belge et l'outillage qu'il a fourni. M. Rutot a effectué des fouilles dans ce fameux gisement et il en expose les résultats dans trois vitrines du Musée d'Histoire naturelle de Bruxelles.

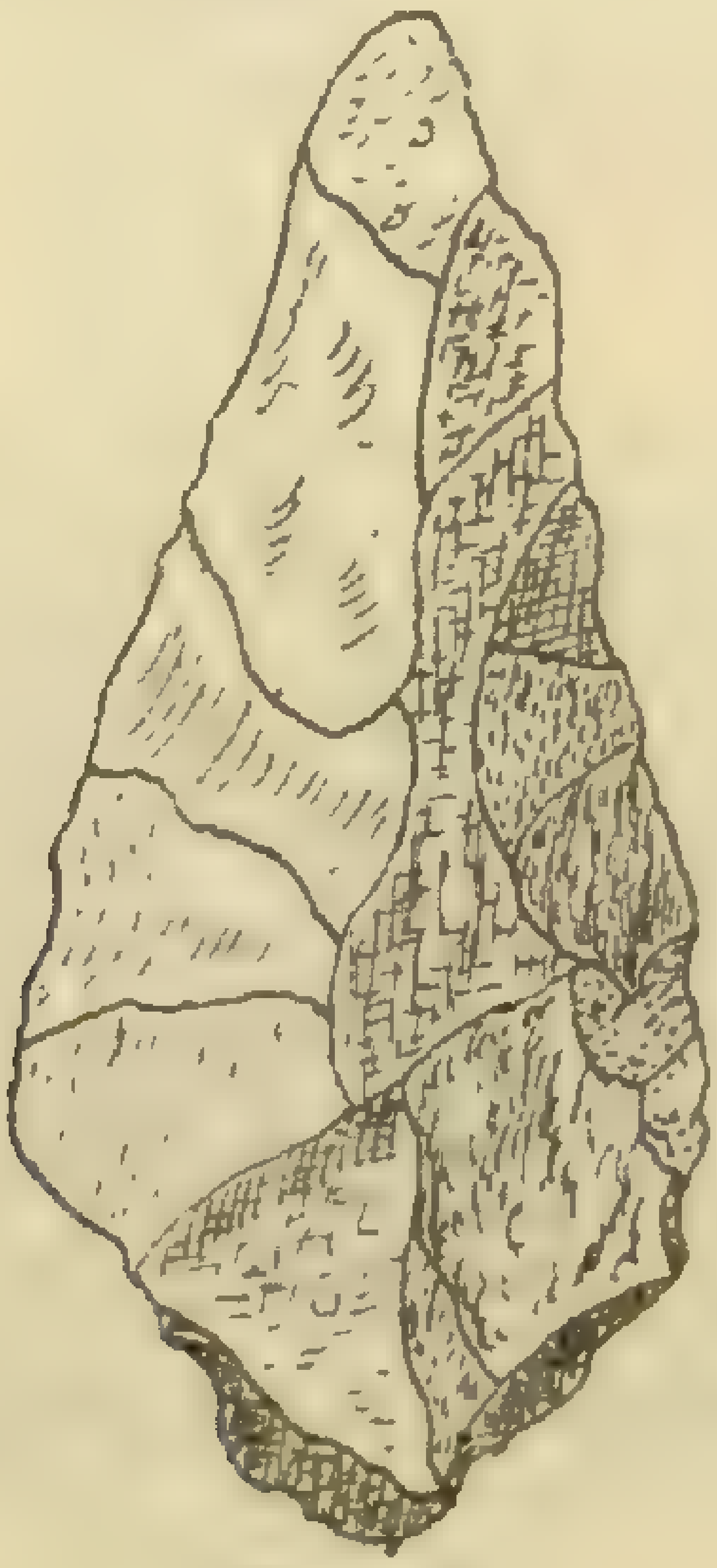


Fig. 2.

Les belles coupes que l'on peut lever dans l'exploitation Hélin, abandonnée actuellement, montrent la superposition des dépôts suivants : la terre à brique et l'ergeron, qui appartiennent au Flandrien, un cailloutis sans industrie et une couche de limon gris, argileux, stratifié du Hesbayen, un cailloutis, une couche de terre glaise, un autre cailloutis, des sables fluviaux reposant sur un troisième cailloutis de l'époque campinienne, un cailloutis, une couche de sable et de terre glaise du Moséen.

(¹) J. Déchelette, *op. citat.*, p. 67.

Dans le Campinien se constatent trois cailloutis et c'est dans le cailloutis moyen que l'industrie Chelléenne se présente.

On peut voir, parmi les récoltes de M. Rutot, deux amygdales, taillées à gros éclats, d'une longueur d'environ 12 centimètres et d'une largeur d'environ 7 centimètres (1) et une hache de moindres dimensions.

M. Rutot a recueilli encore, dans ses fouilles de Spiennes, les séries suivantes :

1° Dix racloirs d'une longueur de 5 à 15 centimètres. Ce sont des éclats allongés, des lames, dont une arète tranchante paraît avoir été retouchée et utilisée pour le raclage.

2° Deux grattoirs assez grands, qui affectent la forme d'un demi-disque.

3° Onze pointes-racloirs. Ce sont des éclats de débitage triangulaires, dont une ou deux arêtes paraissent avoir été utilisées pour le raclage.

4° Quatre éclats peu retouchés, qui paraissent avoir été utilisés.

5° Trois éclats grossièrement retouchés.

6° Quatre lames utilisées et retouchées.

7° Une lame d'une longueur d'environ un décimètre, façonnée en grattoir à l'une de ses extrémités.

8° Neuf instruments que M. Rutot qualifie d'écorchoirs, pouvant avoir servi à détacher des chairs, la peau des animaux. Ce sont des espèces de grands grattoirs, taillés d'un seul côté et qui se rapprochent aussi de la forme amygdaloïde.

9° Quatorze éclats de débitage, qui sont irréguliers et qui présentent une arète longitudinale, tranchante, pouvant avoir été utilisée pour le raclage.

Faux Chelléen. — Plusieurs vitrines du Musée d'Histoire naturelle de Bruxelles abritent des récoltes, attribuées à l'industrie Chelléenne et provenant des environs de Binche. On peut voir une collection analogue à la section préhistorique du Musée archéologique de Liége. Nous y distinguons quelques lames et quelques éclats semblables à ceux que nous avons recueillis dans les stations néolithiques, que nous avons explorées. Pour la plupart des pièces, il faut se rappeler avec M. de Mortillet que souvent les ouvriers façonnent et vendent des pièces fausses. Quand on examine attentivement la collection du réseau de Binche, exposée au Musée d'Histoire naturelle, on se range à l'avis, que M. Déchelette émet en ces termes : « Quelques préhistoriens belges, s'appuyant sur des découvertes des environs de Binche, attribuent à l'industrie Chelléenne, le poignard en silex, la pointe de lance et même la pointe de flèche à pédoncule et barbelure ; mais ces types d'instruments n'ont été rencontrés dans aucun autre des nombreux gisements de cette époque. Nous considérons leur authenticité comme très suspecte, non seulement à cause de l'étrangeté des formes, mais surtout en raison des caractères de la taille (1). »

---

(1) La fig. 2 représente une de ces amygdales.

Ces instruments paraissent fabriqués d'hier ; leur forme révèle la preuve évidente de la supercherie : ceux qui les ont confectionnés connaissent des poignards, des couteaux et des pointes de flèches et l'on se rend parfaitement compte de leur intention d'ébaucher grossièrement ces instruments.

M. l'abbé Obermaier (2), dans une étude approfondie, donne des détails intéressants sur ces prétendues trouvailles :

« Les renseignements stratigraphiques sur ces trouvailles ne sont rien moins que certains... Il ne s'agit que de trouvailles faites à la surface ou transmises simplement à M. Rutot par des ouvriers. On n'a trouvé jamais et nulle part en dehors de la Belgique, des poignards authentiques dans le genre des poignards belges ; mais ils constituent un type de falsification régulier de l'Europe occidentale, notamment du Nord de la France et de la Charente...

» Fabriqués assez facilement et rapidement à l'aide de bulbes longs, excitant naturellement l'intérêt des collectionneurs par leur forme extraordinaire, ils reviennent régulièrement sur le marché préhistorique, comme tout savant quelque peu au courant le sait... Les poignards en question ne sont pas le seul type spécial appartenant aux faussaires de la province de Hainaut : il faut y ranger également les casse-têtes cités par MM. De Puydt et Rutot et surtout les nombreuses pointes de lances, de javelots et de flèches, la plupart du temps ramassées par les ouvriers à la surface du sol... »

---

(1) *Op. citat.*, p. 65.

(2) G. Cumont, *op. citat.*, p. XXVII et suiv.

III

ETHNOGRAPHIE.

Nous ne savons rien de l'homme Chelléen. Aucun gisement n'a révélé la présence d'ossements à l'aide desquels nous pourrions discerner sa conformation physique. Peut-être peut-on lui attribuer la mâchoire, trouvée par M. Schötensack dans la sablière de Mauer, près de Heidelberg : mais cette mâchoire provient-elle d'un être humain ? Elle s'en écarte par ses dimensions énormes et si les dents paraissent humaines, ne peut-on signaler des animaux fossiles et notamment l'*Arctocyon primaevus* de Cernay, dont les dents offrent beaucoup de similitude avec celles de l'homme (¹) ?

M. Rutot écrit dans une notice que l'on peut lire au Musée d'Histoire naturelle de Bruxelles : « Plusieurs éclats et instruments de silex, nettement craquelés par le feu, ont été recueillis dans le cailloutis Chelléen à l'exploitation Hélin. » M. Rutot expose quatre éclats, mais il n'y en a que deux sur lesquels les traces de l'action du feu sont distinctement visibles ; pour les deux autres, de légères craquelures, à peine appréciables nous semblent pouvoir être attribuées à d'autres causes. L'on peut se demander en outre si ces éclats ont été recueillis *in situ*.

Tout ce que l'on peut présumer c'est que les tribus Chelléennes, jouissant d'un climat plus doux que le nôtre, habitaient des huttes formées de branchages, se fixaient à proximité des cours d'eau, où elles trouvaient les galets nécessaires à la confection de leurs instruments et que leur outillage rudimentaire, grâce au milieu favorable dans lequel elles vivaient, suffisait à la conservation de leur existence.

De toutes les considérations relatives à la nature des gisements, à la faune, à la pénurie des instruments amygdaloïdes, il résulte qu'il plane encore une grande incertitude sur le Chelléen de la Belgique et que, si dans notre pays on peut signaler des instruments Chelléens, il faut attendre des découvertes et des explorations ultérieures, pour discerner exactement leur position stratigraphique et pour donner au Chelléen belge l'aspect caractéristique et nettement déterminé du Chelléen français.

(¹) A. Gaudry, *op. citat.*, p. 95 et 96.

L'HABITATION RURALE DE LA WESTFLANDRE

PAR

M. J. CLAERHOUT

Les bâtiments d'une exploitation agricole comprennent l'habitation du cultivateur, l'écurie, l'étable, la grange et le hangar. Ces bâtiments ne sont pas toujours disposés de la même façon ; leur groupement peut se ramener à des types variés et relever de traditions qu'il est intéressant de signaler, et qui ont été étudiées en différents pays.

Certaines formes typiques, qui se maintiennent avec une rare ténacité, peuvent être considérées comme le patrimoine de certaines tribus et peuvent de cette façon nous renseigner sur les migrations et l'aire de dispersion de ces mêmes peuplades ; elles sont susceptibles de nous fournir un document ethnologique de haute valeur.

Il est urgent d'aborder cette étude dans notre pays, où les vieilles formes tendent à disparaître.

Dans un premier chapitre nous ferons connaître les formes typiques que l'habitation rurale paraît affecter dans la Westflandre, et dans un deuxième chapitre nous grouperons les conclusions ethnographiques qui semblent se dégager de l'observation de ces formes typiques (1).

---

(1) « La question d'une étude approfondie des habitations rurales est loin d'être une nouveauté. En Allemagne, l'importance ethnographique des survivances qu'offrent ces constructions a été comprise dès le XVIIIe siècle, et une enquête activement poussée par Virchow, Henning, Meitzen, Heyne, Stephani, Mielke et d'autres a permis d'intéressants travaux d'ensemble ; il en est de même en Autriche et même en Bosnie ; les essais faits en France n'ont pas abouti.

» En Belgique nous sommes également très arriérés à ce point de vue ; de ci de là, il s'est fait quelques enquêtes personnelles, inédites d'ailleurs ; si quelques

Pl. 1.

Pl. 2.

Pl. 3.

I

LES TYPES DE L'HABITATION RURALE DE LA WESTFLANDRE

Nous ramenons aux trois types suivants les formes variées de l'habitation rurale de la Westflandre :

1° Les divers bâtiments de la ferme entourent un cour carrée et fermée.

2° Les bâtiments de la ferme sont aménagés de manière à former des corps séparés, groupés de différentes façons.

3° Les bâtiments de la ferme forment, suivant une disposition traditionnelle, un alignement de corps attenants.

1. — *La ferme à cour carrée et fermée*

Nous avons choisi comme type la ferme de M. Moerman-Velghe, située à Autryve, à l'entrée du village, entre l'ancien Escaut et la chaussée qui mène à Avelghem. (Voir pl. I). Un coup d'œil sur le plan ci-joint permet de se faire une idée de la disposition des bâtiments.

La maison du cultivateur occupe un des côtés du carré ; elle est parallèle à la chaussée et se trouve entre le potager et la cour de la ferme.

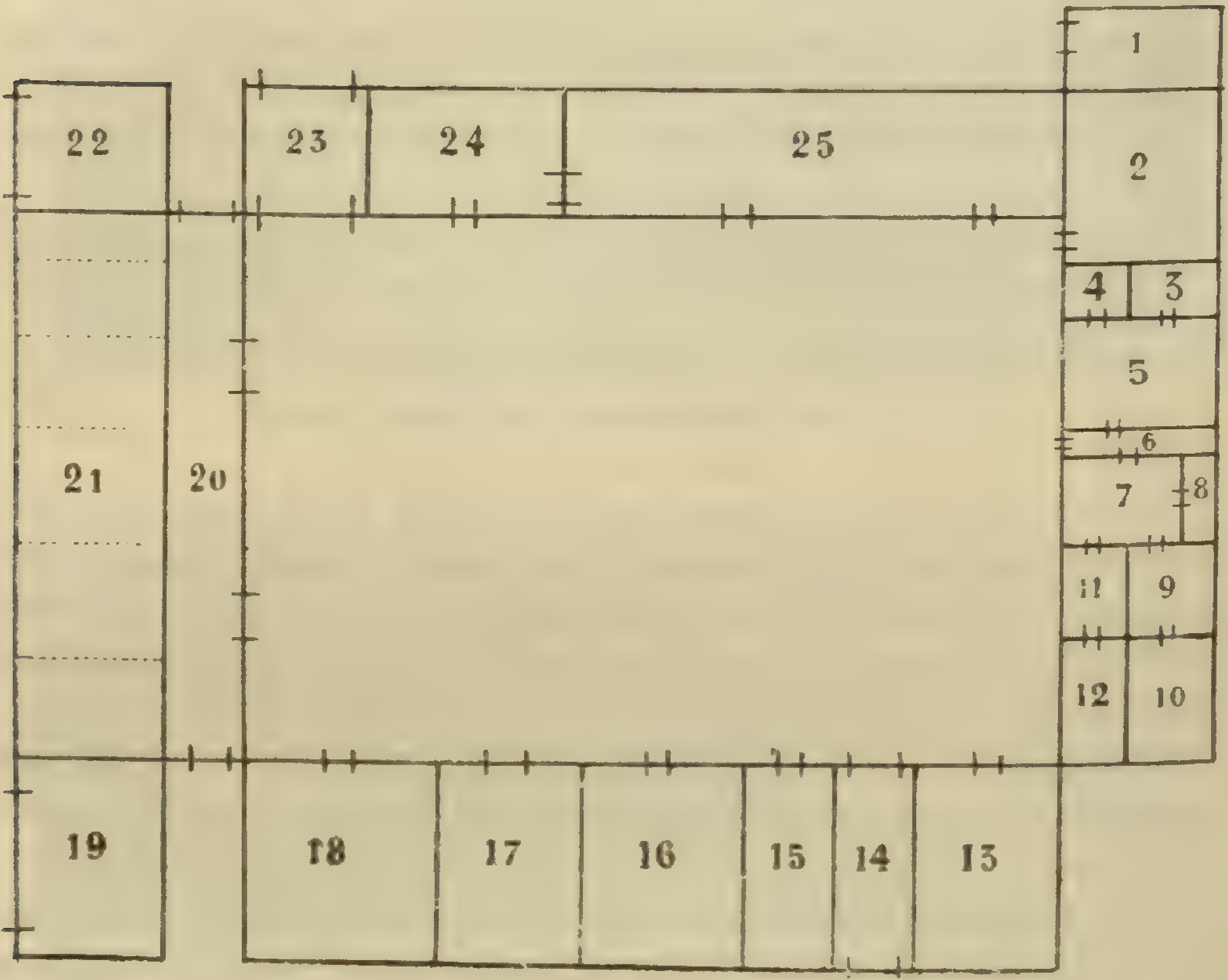
On y pénètre par un corridor et on entre à droite dans la chambre d'habitation, qu'en flamand on désigne sous le nom de « maison » ; on y aperçoit le poêle, surmonté de ce que le peuple appelle une « cheminée française », remplaçant l'antique foyer, qui ne se voit plus que dans quelques vieilles fermes. De là on pénètre par deux portes, qui s'ouvrent de chaque côté de la che-

---

essais d'enquêtes collectives se sont produits, ils l'ont été au point de vue purement pittoresque. Un des premiers qui aient insisté sur le côté ethnographique de la question est notre collègue M. l'abbé Claerhout, qui au sein même de notre société, en septembre 1902, a signalé parmi les survivances frisonnes et franques en Westflandre, l'existence de formes typiques de fermes. » (A. Flebus. *Projet d'Enquête sur l'habitation rurale en Belgique.* BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, tome XXII, 1903-1904, p. CXVII).

minée, dans quatre chambres à coucher. Derrière la chambre d'habitation se trouve le lavoir, qui sert aussi de laiterie. A gauche du corridor on a le salon et au delà de cette chambre, que les Allemands appellent *die beste Stube* et les Flamands *de beste kamer,* encore deux chambres à coucher.

La maison n'a pas d'étage et son toit est couvert de tuiles.



(Fig. 1)

Légende : 1. Annexe : remise pour les voitures. — 2. Écurie. — 3, 4. Chambres à coucher. — 5. Salon. — 6. Corridor de la maison. — 7. Chambre d'habitation, appelée en flam. *huis*, maison. — 8. Lavoir. — 9, 10, 11, 12. Chambres à coucher. — 13. Fournil. — 14. Couloir donnant issue sur les champs. — 15, 16, 17, 18. Ancienne bergerie, convertie en poulailler, porcherie, étable pour les veaux. — 19. Hangar. — 20. Aire de la grange. — 21. Six emplacements, dont deux pour le foin et quatre pour les amas de gerbes. — 22. Hangar. — 23. Porte-charrière : entrée principale de la ferme. — 24. Magasin pour les fourrages, appelé en Westflam. *koeitetenkot*. — 25. Étable.

Quand on est adossé à la façade de la maison, on a à gauche le fournil, une issue qui donne sur les champs de la ferme et quatre étables, qui composaient autrefois la bergerie et qui servent à présent de poulailler, de porcherie et d'étable pour les veaux et les génisses : ces bâtiments occupent un des côtés de la cour rectangulaire.

La grange est située en face de la maison. C'est une grange brabançonne : l'aire, dirigée dans le sens de la longueur de la grange, longe tout le mur de devant, percé de deux portes assez basses, par lesquelles les ouvriers pénètrent dans la grange et par lesquelles les chevaux dételés peuvent sortir.

L'autre partie longitudinale de la grange est divisée en six compartiments, destinés à abriter le foin et quatre tas de gerbes de blé ; ces réduits portent en flamand le nom de *tas*, *schuurwinkel*, *schuurvak ;* on les appelle en wallon *maffes*. Nous ignorons quel nom on leur donne en français. Ces compartiments sont séparés par cinq charpentes, dont nous donnons une esquisse (fig. 2).

Une porte latérale, s'ouvrant dans chaque pignon de la grange, permet aux chariots de s'avancer dans l'aire ; à côté de chacune de ces deux portes d'accès, il y a une annexe qui sert de hangar.

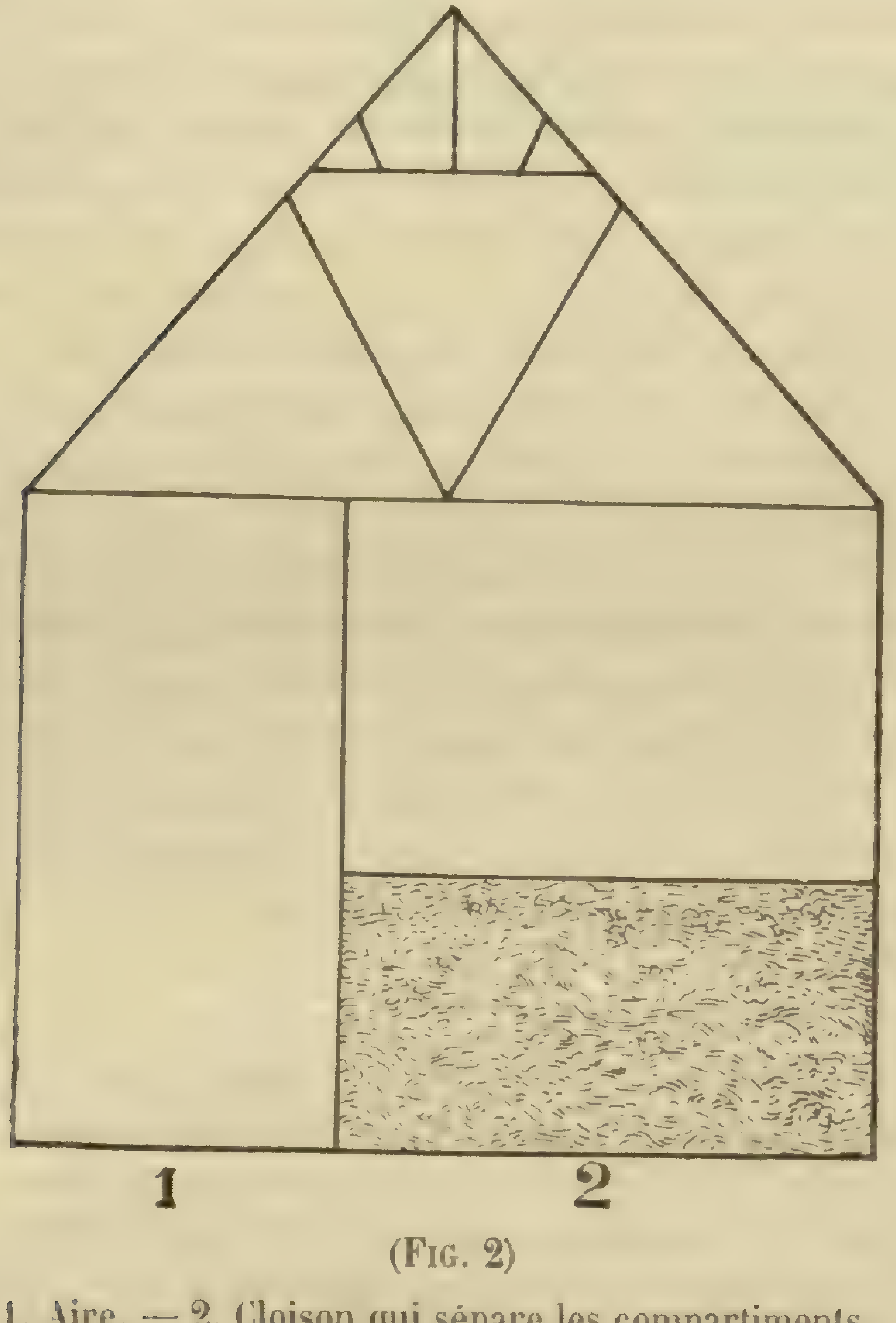
Le quatrième côté du carré comprend la porte d'entrée de la ferme : c'est une porte-charrière, surmontée d'un bâtiment, comprenant un réduit, dans lequel on hache la paille et au-dessus duquel s'élève le colombier. A côté de la porte d'entrée, on voit un réduit, dans lequel on conserve le fourrage et à côté duquel est située l'étable, avec une série de dix-neuf loges pour les vaches ; on leur donne le nom de *sliet* et elles sont adossées au mur extérieur.

L'écurie est au bout de l'étable ; elle fait partie avec la maison, du premier côté du carré ; elle peut contenir cinq chevaux, attachés devant la crèche ; le râtelier est suspendu au-dessus de la tête des chevaux, dans le sens de la longueur de l'écurie ; chaque loge *(paardensliet)* est faite de deux poteaux verticaux *(latierpalen)* et d'une barre horizontale *(latierboom) ;* on cloue des planches sur ces pièces, pour séparer les loges.

Au pignon de l'écurie est adossée une annexe, qui sert de remise pour les voitures du fermier.

Il va sans dire que dans ces fermes carrées et fermées, la position relative de la maison, de l'écurie, de la grange et des étables peut varier beaucoup ; mais quel que soit l'aménagement de ces divers bâtiments, toujours ils entourent et ferment la cour rectangulaire, qui sert souvent d'emplacement au fumier, séparé des bâtiments par un large trottoir en briques : ce trottoir est quelquefois abrité par un auvent.

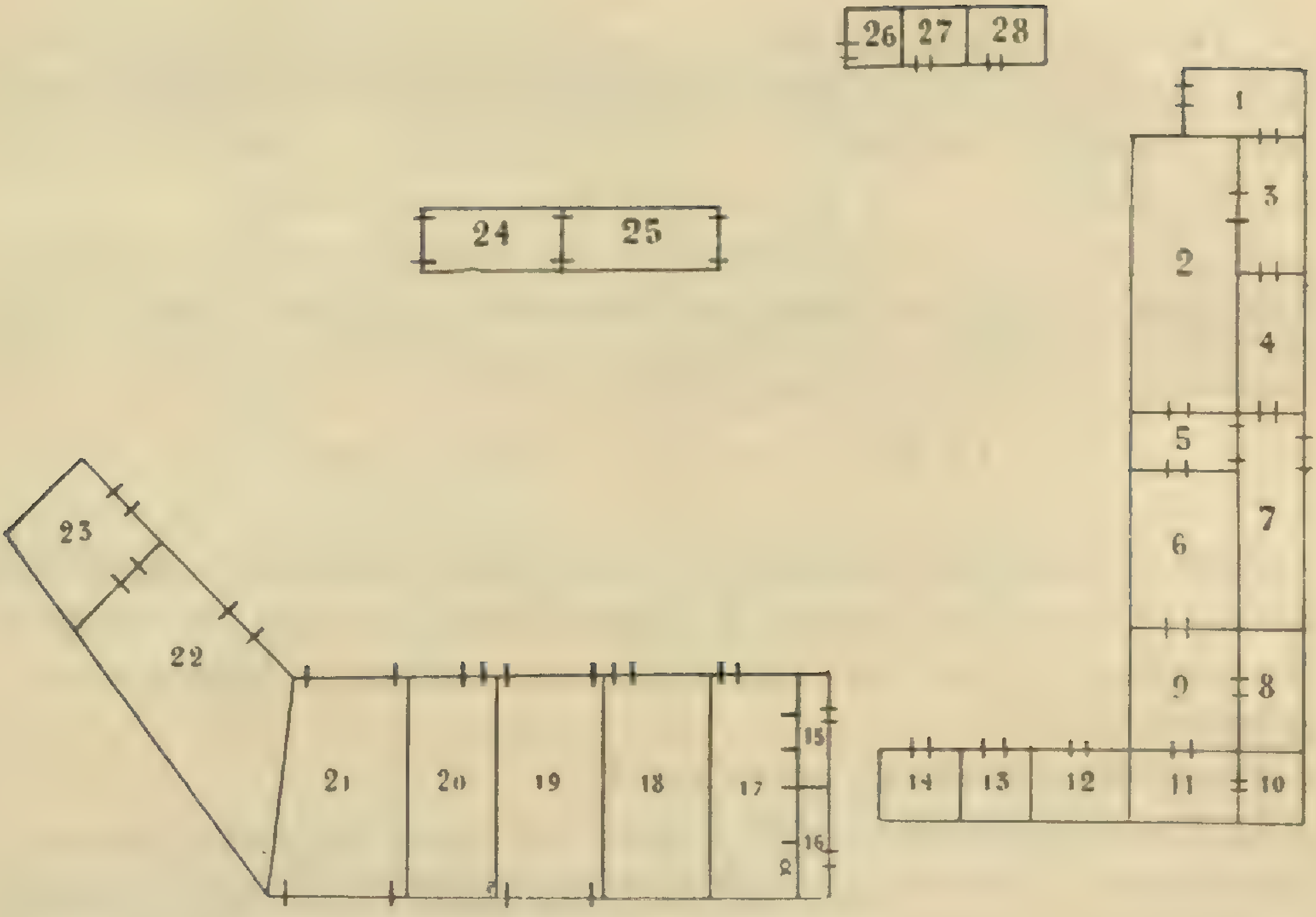
Le plus souvent ces bâtiments sont en briques et les toits couverts de tuiles ; mais on peut constater que ce n'est pas seulement la forme, qui apparaît comme une survivance ethnographique des plus intéressantes, mais que l'usage des vieux matériaux perdure jusqu'à nos jours : la ferme à cour rectangulaire, fermée, d'un type si primitif, est quelquefois construite en clayonnage, revêtu de torchis, et les toits sont couverts de l'antique chaume des siècles d'antan.



(Fig. 2)

Légende : 1. Aire. — 2. Cloison qui sépare les compartiments.

Cette forme est traditionnelle dans la région située sur les bords



(Fig. 3)

Légende : 1. Fournil, dans une annexe adossée au pignon de la maison. — 2. Chambre d'habitation. Elle contient le foyer, surmonté de l'antique cheminée flamande. — 3. Chambre communiquant avec le fournil. — 4. Chambre à coucher des domestiques. — 5. Corridor avec l'escalier du grenier. — 6. Chambre d'habitation pendant l'hiver. — 7. Lavoir et laiterie. — 8. Chambre d'un niveau plus élevé, au-dessus de la cave. On l'appelle en flamand *voute*. M. Blanchard lui donne le même nom dans son livre sur la Flandre (1). — 9. Chambre à coucher. — 10, 11. Chambres à coucher dans une annexe adossée au pignon de la maison. — 12. Cave pour pommes de terre. — 13, 14, 15, 16. Porcheries. — 17. Écurie avec quatre loges pour les chevaux et un réduit *a*, destiné à recevoir le lit du valet d'écurie. — 18. Étable des poulains. Au-dessus le fenil, espèce de magasin à foin et à paille (flam. *dille*, holl. *hilde, hooi- en strooizolder*). Il communique avec l'aire de la grange ; on peut aussi y entasser les gerbes de la moisson. — 19. Aire de la grange. Elle a deux portes à deux battants. — 20. Magasin pour les gerbes, appelé *tas, schuurwinkel*. En-dessous il y a une cave voûtée pour les pommes de terre. Ce magasin communique aussi avec la grange à avoine *(haverschuur)*. — 21. Grange pour l'avoine. — 22. Étable avec voûte en briques et dix loges *(slieten)*, adossées au mur extérieur. — 23. Réduit pour les fourrages. — 24, 25. Hangars, ouverts de deux côtés, construits en bois et couverts d'un toit de chaume. — 26. Écanguerie *(Zwingelkot)*. — 27, 28. Étables des veaux.

---

(1) R. Blanchard. *La Flandre. Étude géographique de la plaine flamande en France, Belgique et Hollande.* Lille, 1906, p. 307 et suiv. et p. 414 et suiv.

de l'Escaut, entre Avelghem et Mouscron. Aux portes de Courtrai et de Menin, on voit déjà les bâtiments de la ferme se rapprocher pour ébaucher le rectangle et l'on a fait à peine quelques kilomètres que l'on voit de toutes parts le carré se fermer.

On observe aussi sporadiquement ces fermes carrées et fermées à Langemarck, aux environs de Warneton et à Ploegsteert.

2. — *La ferme à corps de bâtiments séparés*

Nous avons choisi comme forme typique, une ferme prise au hasard ; elle est habitée par M. Pierre Verhelst et elle est située à Meulebeke, le long de la chaussée qui mène à Ingelmunster (Planche II).

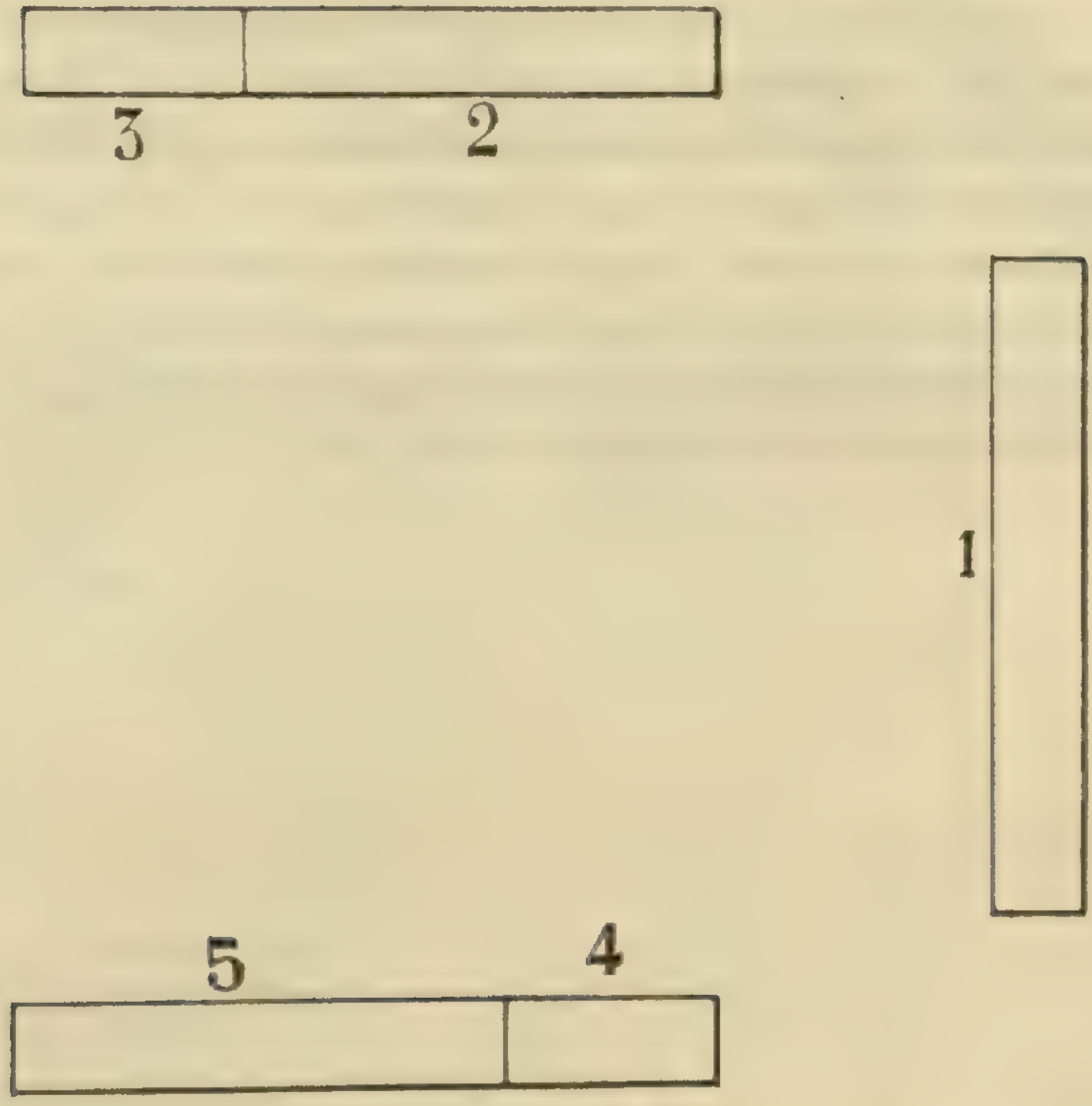
Voici une esquisse du plan (fig. 3).

La ferme est entourée d'un large fossé. Les toits sont couverts de chaume. Un versant du toit de la maison est couvert de tuiles rouges. Nous connaissons une esquisse de cette ferme (¹), datant de 1654. Elle comprenait alors la maison et les bâtiments qui contiennent actuellement l'écurie et la grange.

Dans cette catégorie de fermes, la maison, la grange, l'écurie, l'étable et le hangar se présentent en des groupements si variés, qu'il est presque impossible de les dénombrer. Tous ces corps de bâtiments ne sont pas toujours séparés ; il arrive que deux ou trois d'entre eux sont attenants ; mais la disposition relative de ces bâtiments soit isolés, soit attenants, diffère de ferme à ferme. On peut observer cependant certains aménagements typiques qui prédominent et que l'on rencontre en divers villages. Ce sont les groupements typiques suivants :

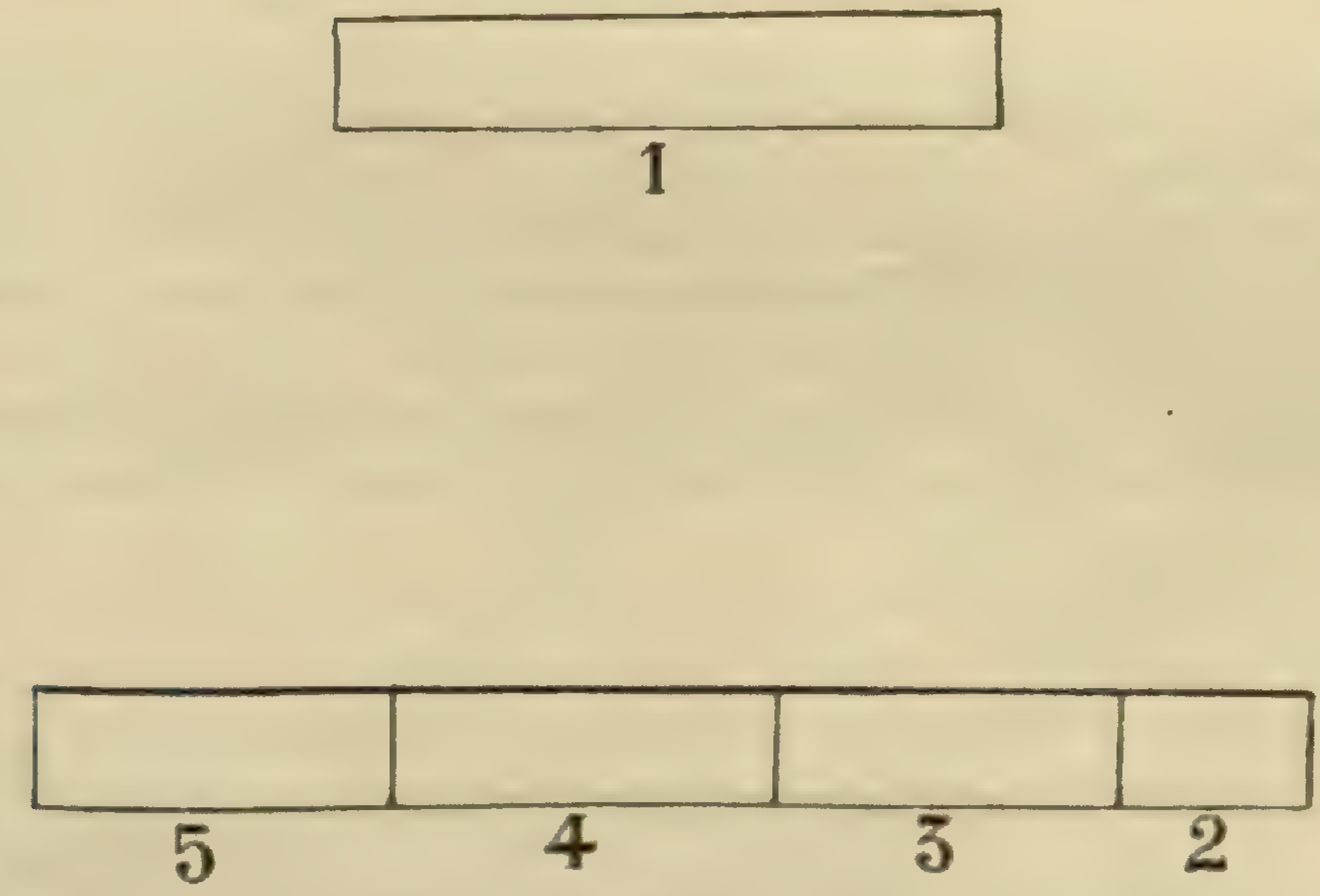
La maison du fermier occupe le fond du verger, qui la sépare de la porte à claire-voie par laquelle on accède à la ferme, entourée d'un fossé ou d'une haie. La cour qui sépare la maison de la porte d'entrée, est flanquée d'un côté de la grange et, de l'autre côté, des étables, qui se trouvent vis-à-vis de la grange. On peut observer cette disposition dans l'esquisse suivante (fig. 4) :

(¹) Terrier appartenant aux archives de Meulebeke et intitulé : *Eerste Bouck der Prochie van Meulebeke*.



(Fig. 4)

Légende : 1. Maison. — 2. Grange. — 3. Hangar. — 4. Écurie. — 5. Étable.

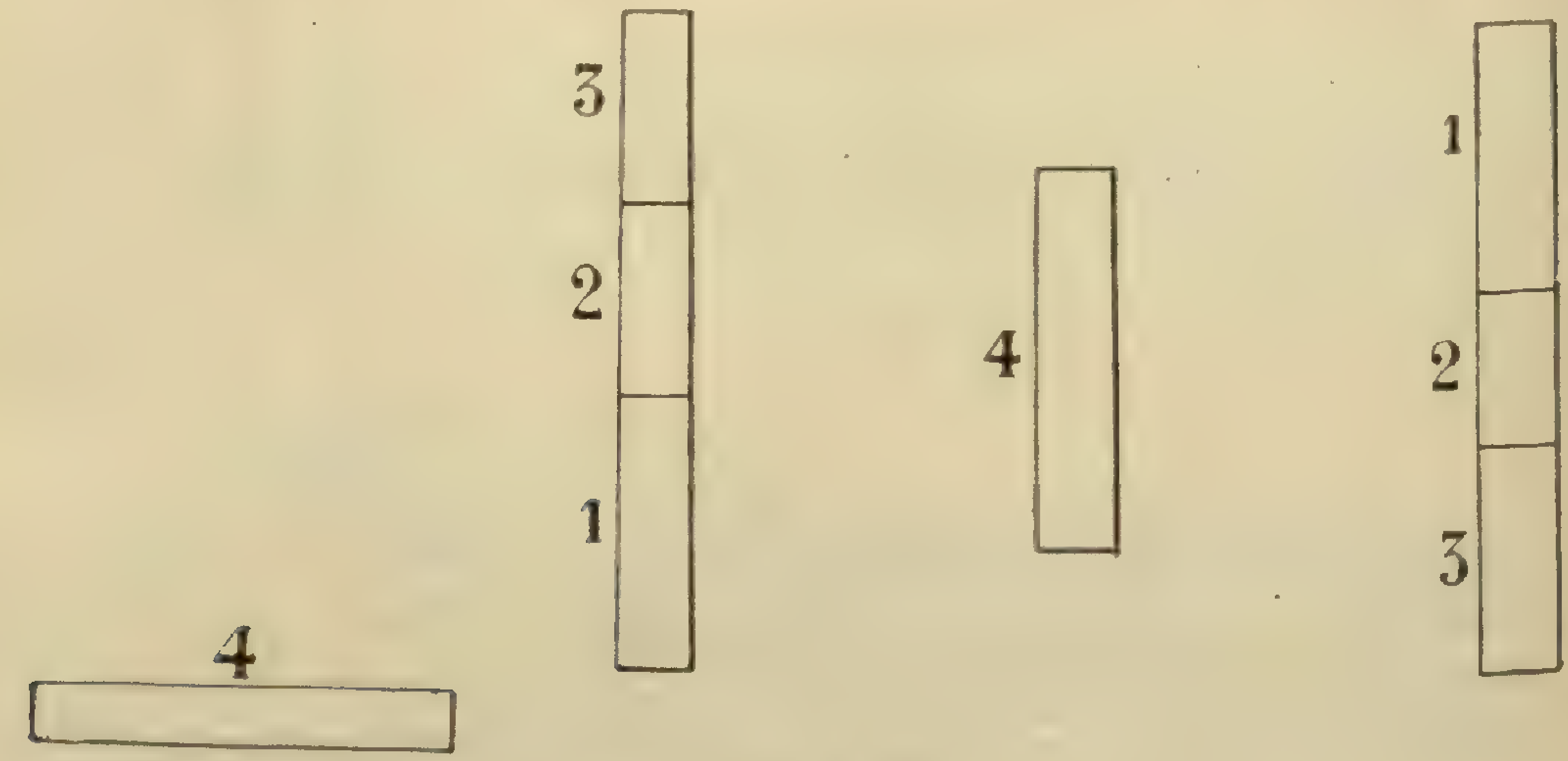


(Fig. 5)

Légende : 1. Maison. — 2. Écurie. — 3. Étable. — 4. Grange. — 5. Hangar.

Il arrive aussi que la maison soit située en face des étables et des granges, qui forment un corps de bâtiment, et ces deux parties de la ferme sont séparées par une portion du verger (fig. 5) :

Une troisième disposition assez fréquente est la suivante : la maison, l'étable et l'écurie sont attenantes tandis que la grange forme un bâtiment séparé ; l'axe de la grange peut être ou parallèle ou perpendiculaire à l'axe des autres bâtiments (fig. 6) :



(Fig. 6)

Légende : 1. Maison. — 2. Écurie. — 3. Étable. — 4. Grange.

Cependant ces dispositions n'ont rien de stable et elles peuvent varier à l'infini.

Le type que nous venons de caractériser et qui affecte cette grande diversité, est propre au centre de la Flandre occidentale, et se propage de là dans toutes les directions.

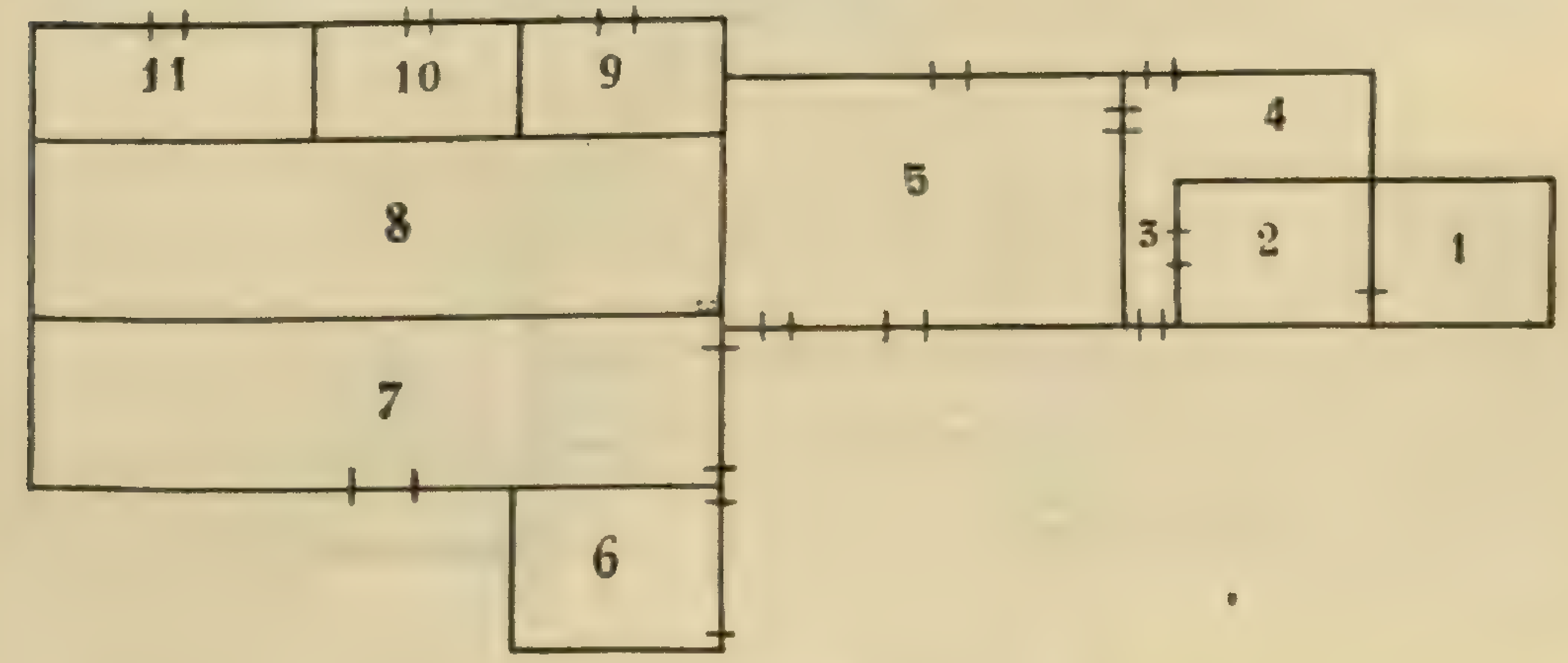
Au midi, il va s'enchevêtrer dans le type que nous avons esquissé au premier paragraphe, et il franchit les bornes de la plaine maritime pour manifester ses formes variées à côté du type de la zone poldérienne.

Détail intéressant à noter : dans les régions de Poperinghe et d'Ypres, depuis Leysele jusqu'à Hollebeke et Boesinghe, le sommet du pignon de la grange est percé de l'*Eulenloch* saxon.

3. — *La ferme à bâtiments attenants et alignés*

Depuis des années nous avons découvert dans la Flandre maritime un type de constructions rurales des plus intéressantes. (Planche III). La photographie ci-jointe permet de se représenter ce type original et de constater de quelle façon les bâtiments sont alignés et sous quelle forme chacun d'eux se présente.

Voici le plan de cette ferme, habitée par M. Pierre Maenhout-Hollemeersch et située sur le territoire d'Oudenbourg, à proximité du village de Snaeskerke (fig. 7) :



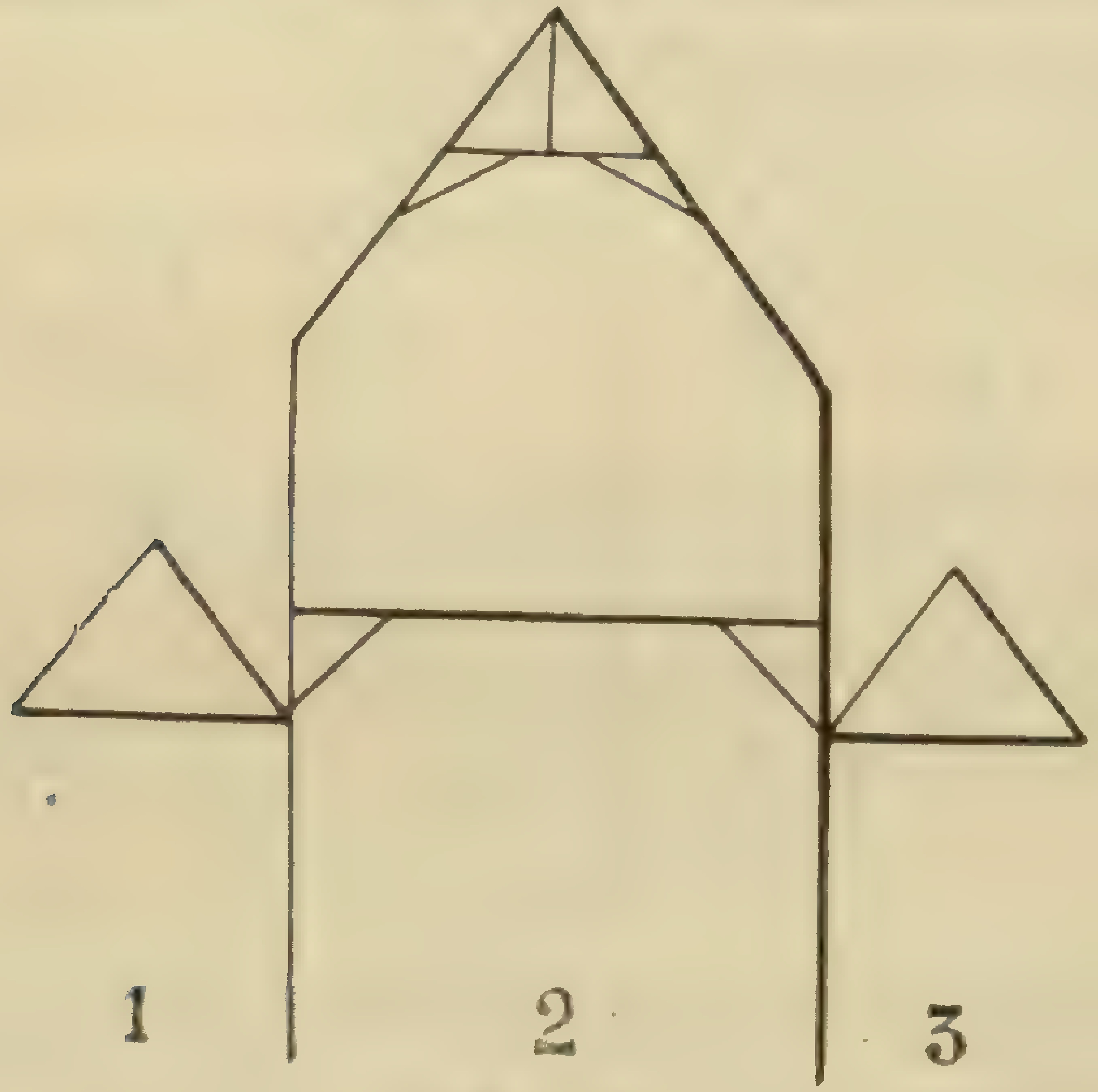
(Fig. 7)

Légende : 1. Salon. — 2. Chambre d'habitation. — 3. Corridor. — 4. Cuisine et lavoir. — 5. Étable. — 6. Remise. — 7. Aire de la grange. — 8. Magasin pour la moisson (flam. *tas*). — 9, 10, 11. Écurie et étables.

Considérons d'abord l'habitation du fermier : la chambre 1, qui est située au-dessus de la cave et qui souvent sert de salon, a un niveau plus élevé que le reste de la maison ; les fenêtres de cet appartement sont percées, dans la façade, à une plus grande hauteur que les autres ; cette disposition figure un étage et très souvent, dans la plaine maritime, cette partie de l'habitation a un étage ou, du moins, un toit plus élevé que le reste de la maison. La chambre 2, à même du sol, sert de chambre d'habitation, mais le plus souvent, la famille du cultivateur occupe la pièce 4, qui sert de cuisine et de lavoir.

De la maison on pénètre dans l'étable, qui constitue la seconde partie ou le milieu de l'alignement ; un mur sépare la maison de l'étable ; aux trois autres murs sont adossées les loges du bétail, pourvues chacune d'une auge.

La troisième partie est une grange immense, qui porte le nom de *bergschuur*—elle a l'apparence d'une montagne —ou de *mikke*, mot qui n'est noté avec ce sens dans aucun des deux grands dictionnaires de notre dialecte (¹). Il était destiné à périr avec ce type de grange. Ce bâtiment si original menace, en effet, de disparaître, et il serait tombé dans l'oubli complet avec la tradition qu'il représente, si nous n'avions eu hâte de le noter et de le conserver par l'image.



(Fig. 8)

Légende : 1. Aire. — 2. Magasin pour les gerbes de la moisson. — 3. Étable.

On voit qu'à cette grange est ajoutée une annexe qui sert de hangar, et on se rend compte que ce bâtiment est constitué par un grand rectangle, aux murs latéraux relativement bas, surmontés d'un toit très élevé à quatre versants. L'intérieur est divisé en trois parties dans le sens de la longueur. La partie attenant au mur de devant est l'aire, à côté de laquelle se trouve le magasin à

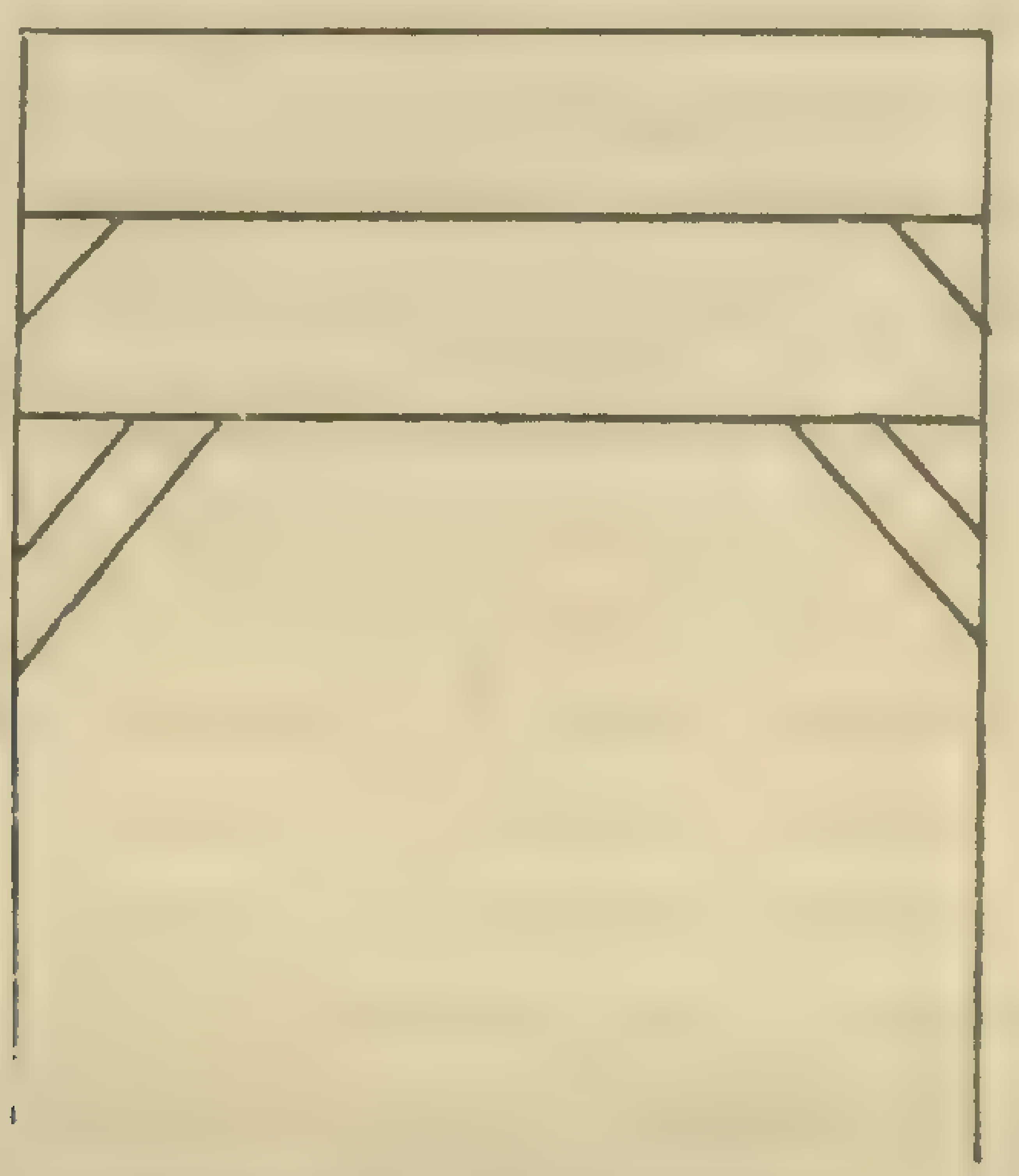
(¹) De Bo, *Westvlaamsch Idioticon* ; Gezelle, *Loquela*.

gerbes, appelé en bas-allemand *Gulf :* les gerbes s'entassent à une telle hauteur que les bras manquent souvent pour les hisser au sommet et c'est un des motifs pour lesquels ces granges disparaissent l'une après l'autre. La troisième partie, contiguë au mur de derrière, est divisée en plusieurs réduits, servant d'écurie, d'étables pour les veaux et de remise.

Voici une coupe transversale de la charpente qui soutient le toit et qui divise cette grange en trois parties (fig. 8) :

Ce système se reproduit cinq fois : il se voit dans le mur qui sépare la grange de l'étable, dans le mur opposé à celui-ci et trois fois entre ces deux murs.

La coupe longitudinale de la charpente se présente comme suit (fig. 9) :



(Fig. 9)

Ce système qui se répète quatre fois, s'observe de chaque côté du magasin dans lequel on entasse les gerbes.

Cette grange a une longueur de 19 mètres, sur une largeur de 14 mètres.

Il nous a été donné de retrouver deux fois encore ce modèle typique, notamment à Dudzeele, dans la ferme appelée *De Goudbloem*, près du pont du canal maritime, et à Jabbeke, à droite du chemin de fer, entre les gares d'Oudenbourg et de Jabbeke.

Si ce modèle n'est pas très fréquent sous cette forme parfaite et caractéristique, ses parties se constatent assez souvent dans la plaine maritime.

Quittez la zone sablonneuse de la province et sur l'extrême bord du terrain alluvionnaire qui recouvre la tourbe, habitée à l'époque néolithique et à l'époque belgo-romaine, vous verrez surgir comme par enchantement la maison du fermier, sous la forme sous laquelle elle se présente ici ; si tous les bâtiments ne sont pas groupés comme dans le type que nous venons de décrire, très souvent ils s'alignent d'une façon plus ou moins complète.

Le modèle de la grange se reproduit aussi assez souvent ; autrefois il était plus fréquent ; mais, maintes fois, cette grange antique et traditionnelle avec son immense toit de chaume à quatre versants, abritant l'aire, la moisson, l'étable et l'écurie, a été remplacée par des bâtisses modernes sans cachet. A Leffinghe, où il y en avait autrefois plus de vingt, il n'en reste plus que trois ou quatre. On peut y signaler la belle grange de la ferme appelée *Vleriskot*, aménagée comme l'antique grange d'Oudenbourg. On en voit encore çà et là dans le Furnes-Ambacht, dans la région d'Ostende et au Nord de Bruges, à Heyst et à Ramscappelle.

II

CONCLUSIONS ETHNOLOGIQUES

A l'exposition du Folklore, ouverte au Palais du Cinquantenaire à Bruxelles, en 1910, on pouvait voir un grand nombre de modèles de fermes de la Westflandre ; mais on n'avait relevé ni les caractères typiques, ni la signification ethnographique de ces vénérables habitations rurales.

M. R. Blanchard, dans la belle monographie qu'il a consacrée à la Flandre, a observé les trois spécimens de fermes que nous avons mentionnés ; il appelle « cense wallonne », la métairie fermée, située dans la zone limoneuse ; l'habitation rurale de la plaine maritime reçoit le nom de « ferme » et celle de la zone sablonneuse, celui d'*hofstede*. L'auteur se contente de les décrire matériellement sans s'attacher à en dégager la signification, à en déterminer les caractères distinctifs (1).

---

(1) Raoul Blanchard. *La Flandre. Étude géographique de la plaine flamande en France, Belgique et Hollande.* Lille, 1906, p. 307 et p. 414.

Essayons d'interpréter les trois spécimens dont nous avons fourni la description.

1. — *La ferme franque*

Avec nombre d'auteurs, nous qualifions de franc l'aménagement des bâtiments de la ferme autour d'une cour carrée et fermée. Mais autant les auteurs sont précis, quand ils attribuent aux Francs le type de l'habitation rurale rectangulaire et fermée, autant ils sont diffus, quand il s'agit de fournir les preuves de cette affirmation.

Voici l'argument sur lequel nous nous appuyons pour justifier notre interprétation ethnographique.

Quand l'histoire nous apprend qu'à la chute de l'empire romain, ou vers le haut moyen âge, une contrée a été occupée ou colonisée par les Francs, on y voit prédominer le type de l'habitat rural rectangulaire. Par contre, quand une contrée a été envahie et peuplée par d'autres tribus germaniques, on n'y trouvera pas le modèle des habitations rurales, que nous attribuons aux Francs.

Envisageons deux contrées en nous plaçant à ce point de vue. D'une part, les fermes du Limbourg, peuplé par les Francs, sont groupées d'après le *Dorfsystem* et chacune reproduit le type auquel nous discernons une origine franque. D'autre part la Zélande, peuplée par les Frisons, ne nous offre pas le modèle des fermes franques.

Ce qui s'observe au Limbourg se vérifie dans toutes les régions occupées par les Francs. Parcourez les contrées franques de l'Allemagne, la Prusse rhénane, pays éminemment franc, certaines parties de la Bavière, colonisées par les Francs, vous y trouverez partout le modèle de la ferme franque, sous les formes les plus intéressantes et les plus variées. Nous avons pu admirer les plus beaux spécimens aux environs de Ratisbonne.

La coutume de grouper les bâtiments de la ferme autour d'une cour rectangulaire appartient-elle aux Francs dès l'origine ?

Nous le présumons sans pouvoir en fournir une preuve péremptoire, parce que nous ne possédons pas de description exacte d'un domaine rural du temps de Clovis ou de Charlemagne.

Jetons encore un coup d'œil sur les fermes du Limbourg et certaines vieilles fermes des environs de Warneton. Il y en a plusieurs qui sont construites en clayonnage revêtu de torchis : ce mode de construction était déjà en vigueur aux temps préhistoriques ; ne nous autorise-t-il pas à conclure que ces fermes représentent un type très ancien, pouvant très bien dater de l'époque de la colonisation franque ? Malheureusement, les textes de la loi salique, qui énumèrent toutes les constructions de la ferme et nous les montrent entourées d'un enclos, ne nous renseignent guère au sujet de leur agencement (1).

2. — *Un type préhistorique*

Quelle est l'origine du type que nous rencontrons au centre de la province ?

Ce type est très commun et il s'observe dans un grand nombre de régions ; nous l'appelons le type préhistorique et nous croyons qu'il n'est que la reproduction et le perfectionnement de la ferme néolithique. Les découvertes archéologiques de ces dernières années nous permettent de le présumer, voire même de l'assurer.

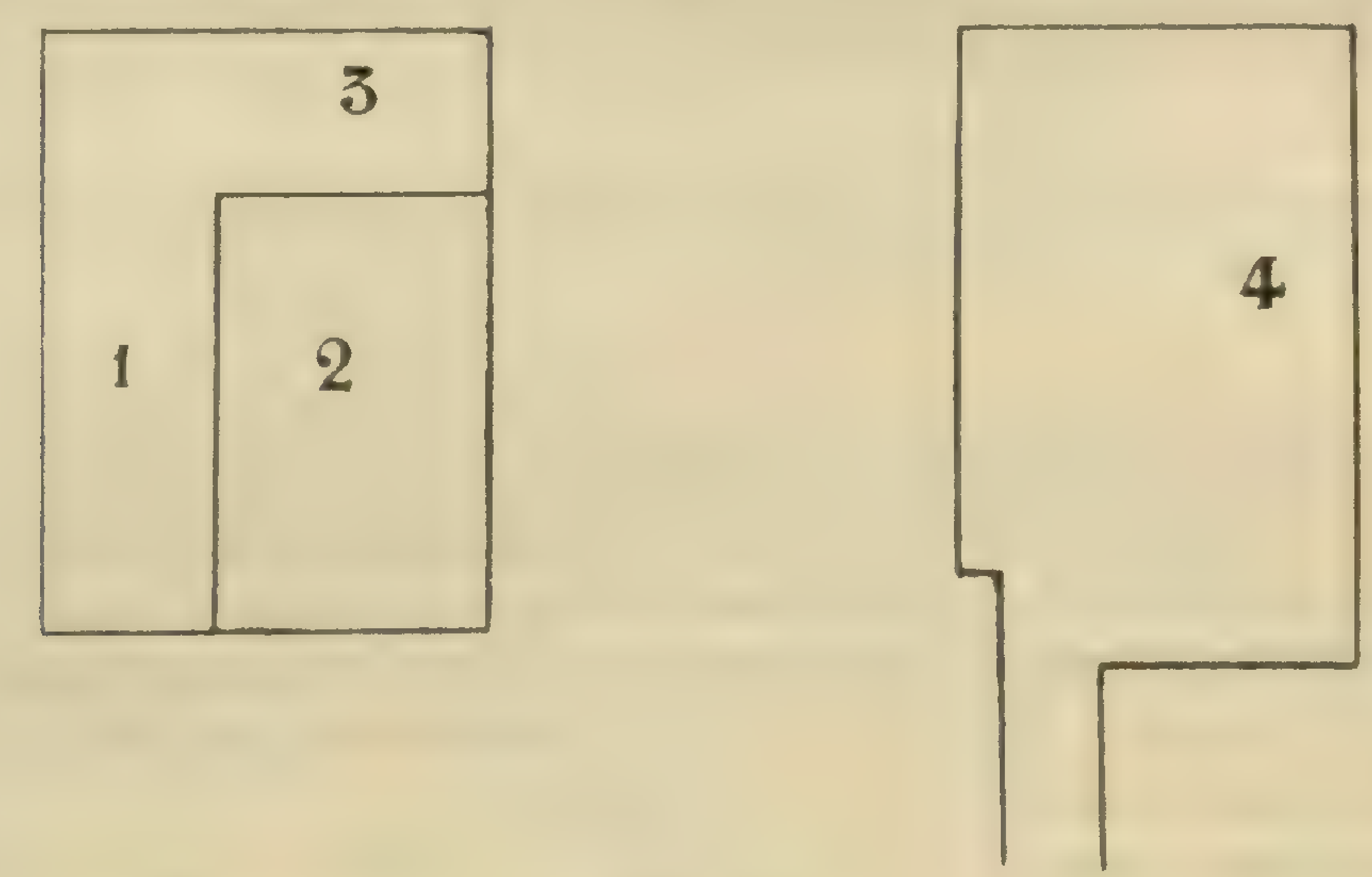
On a amené au jour, dans le célèbre village néolithique de Grossgartach, les vestiges, les substructions, le contour inférieur des huttes préhistoriques qui composent l'habitation rurale des temps néolithiques, de la cabane habitée par le cultivateur et, en face de cette maison primitive, de la construction qui abritait le bétail et la moisson.

Les murs étaient composés d'un double treillis de perches et de branches, maintenu par des pieux, fixés aux coins de la demeure rectangulaire ; l'interstice entre les treillis était rempli d'un mélange de terre glaise et de paille hachée, et les côtés extérieurs du double treillis étaient enduits d'un revêtement composé des mêmes matières.

---

(1) K. G. Stephani, *Der älteste deutsche Wohnbau und seine Einrichtung*. Leipzig, 1902, I Band, p. 259 et suiv. — A consulter aussi : R. Henning, *Das deutsche Haus*. Strassburg, 1882, p. 20 et suiv. — August Meitzen, *Siedelung und Agrarwesen der Westgermanen und Ostgermanen, der Kelten, Römer, Finnen und Slawen*. Berlin, 1895, tome I, p. 453 et tome III, p. 212 et suiv.

Ne voit-on pas, dans cet ensemble de deux constructions symétriques, constituant la ferme néolithique de Grossgartach, apparaître le type de l'habitation rurale comprenant ses deux ou trois constructions séparées, servant de maison, de grange et d'étable ? Malgré tous les progrès de la civilisation, ces cabanes primitives ne survivent-elles pas en quelques modestes fermes à bâtisses séparées, construites en torchis et couvertes de chaume ?



(Fig. 10)

Ferme néolithique de Grossgartach. Légende : 1. Chambre d'habitation de la maison et emplacement du foyer. — 2. Chambre à coucher avec deux bancs d'argile, servant probablement de lit. — 3. Rampe pour descendre dans la maison. — 4. Hutte servant de grange et d'étable avec traces de l'emplacement occupé par le bétail.

Le type de la ferme à corps de bâtiments séparés nous aurait donc été légué par les temps préhistoriques ; il date de l'époque néolithique, à laquelle plusieurs villages terrestres et palustres existaient dans la Flandre occidentale ; il est aussi ancien que le type brachybrun de la population, qui date également de l'âge néolithique et qui constitue encore le fond du peuple westflamand ; il a traversé, pour venir jusqu'à nous, l'âge du fer et l'époque romaine.

On a découvert en diverses régions, notamment dans la province de Namur, des traces de la *villa rustica* décrite par Vitruve : elle se composait de l'habitation du cultivateur et de la cour de la ferme, dans laquelle étaient érigées çà et là en torchis, les constructions qui servaient d'étable, de grange et de remise [1].

3. — *La ferme frisonne*

Le type de la ferme à bâtiments attenants et alignés est de provenance frisonne et constitue un critérium ethnologique de haute valeur pour établir l'origine frisonne d'une partie de la population de la plaine maritime.

On ne peut le nier quand on compare ces fermes aux fermes si originales que l'on observe en Frise et qui appartiennent si particuliérement et si exclusivement aux Frisons qu'on ne les trouve que chez eux.

Deux types se constatent en Frise.

Il y a d'abord le grand bâtiment rectangulaire à parois assez basses, surmonté d'un toit immense à quatre versants ; telle est la ferme de M. J. Poelsma, que nous avons visitée dans ses moindres détails, à Leeuwarden ; l'habitation, l'étable et la grange occupent respectivement un des côtés du rectangle.

La grande grange westflamande *(bergschuur, mikke)* est la représentation fidèle de ce type. Bien qu'elle ne renferme pas l'habitation du cultivateur, qui constitue en Flandre un bâtiment isolé, il faut convenir qu'il n'y a que des Frisons qui soient capables de construire une grange qui offre une ressemblance si frappante avec une ferme que l'on ne peut voir qu'en Frise.

Le second type traditionnel en Frise comporte trois bâtiments disposés en ligne droite : l'habitation du cultivateur, la maison antérieure (*foarhûs)*, qui a un étage et qui ressemble à une maison bourgeoise, la maison du milieu *(mithûs)*, qui n'a que le rez-de-chaussée, servant de chambre d'habitation et de laiterie, et la maison du dehors *(buthûs)*, le grand rectangle, avec son toit à quatre versants, abritant l'étable, l'écurie et la grange.

Que l'on considère notre ferme typique d'Oudenbourg : elle contient les trois parties caractéristiques de la ferme frisonne ; elle s'en écarte seulement par ce détail que la maison principale et le grand bâtiment rectangulaire sont séparés, non par la petite maison du milieu, mais par une étable (¹).

---

[1] A. Schliz, *Das steinzeitliche Dorf Grossgartach*, Stuttgart, 1901, p. 9. — J. Claerhout, *L'habitation des Néolithiques*. ANNALES DE LA SOCIÉTÉ D'ARCHÉOLOGIE DE BRUXELLES, tome XIX, 1905. — A. Meitzen, *op. laudat*, tome I, p. 356.

Quelle conclusion se dégage de ces recherches dans un domaine peu exploré de l'ethnographie ?

L'habitation rurale de la Westflandre dans ses manifestations variées est l'expression de la population, qui occupe le sol de cette province ; elle porte l'empreinte de l'ethnogénie de la Flandre occidentale : elle reflète les éléments néolithique, belgo-romain et friso-franc, dont le peuple westflamand nous présente l'amalgame.

(¹) Otto Lassius, *Das friesische Bauernhaus*, Strassburg, 1885. *Passim*. Nous nous appuyons plus sur nos observations personnelles, faites en Frise, que sur les descriptions fournies par cet ouvrage. — J. Claerhout, *Les Francs à Denterghem*. ANNALES DE LA SOCIÉTÉ D'ÉMULATION POUR L'ÉTUDE DE L'HISTOIRE ET DES ANTIQUITÉS DE LA FLANDRE, tome LII, 1902, p. 24. — Idem. *La Population de Westflandre*. MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, tome XXIX, 1910, mémoire I, p. 30.

CHRYSOPIDES NOUVEAUX

(INS. NEUR.)

par **LONGIN NAVAS, S. J.**

Les riches collections du musée d'histoire naturelle de Paris m'ont déjà fourni l'occasion de décrire quelques Chrysopides nouveaux (Crisópidos nuevos, dans Broteria, San Fiel, Enero 1910). Ceux que je vais décrire sont tous de la même provenance. Je les ai reçus postérieurement en même temps qu'un grand nombre d'autres formes qui ont été confiées à mon examen par M. le Prof. M. Bouvier, du laboratoire entomologique du Museum.

1. Chrysopa nepia (¹) sp. nov.

Minor, flavescens.

Caput flavidum, antennis longis, tenuibus, vertice fornicato, oculis globosis, nigris in sicco.

Prothorax transversus, disco duabus lineis longitudinalibus notato. Meso- et metathorax flavidi, superne ad latera leviter rubescentes.

Abdomen flavidum, pilosum.

Pedes graciles, flavidi, tibiis vix inflatis, tarsis rufescentibus, unguibus nigris.

Alæ hyalinæ, immaculatæ, irideæ, augustæ, apice acuto, reticulatione laxa, omnino pallida, tenui, stigmate insensibili.

Ala anterior costa ad medium leviter concava ; venulis costalibus ad extrema vix nigro tinctis ; venulis radialibus initio et fine nigris, gradatis nigris ; cellula procubitali typica elongata, ramo posteriore in medio apicali nigro ; venula sectoris radii prima nigra, intra cellulam procubitalem in ultimo tertio desinente.

(¹) Du grec νήπιος, enfant.

Ala posterior similiter constructa, venulis costalibus et gradatis 4/6 nigris ; margine costali ante stigma leviter convexo.

Long.	corp.		6	mm.
—	al.	anter.	11	»
—	—	poster.	10	»
Latit.	—	anter.	4	»
—	—	poster.	3.5	»

Patrie : Algérie.

2. Chrysopa congolana sp. nov.

Mediocris, flava, viridi mista.

Caput flavum, oculis nigris, antennis flavis, tenuibus, aulam anteriorem longitudine superantes.

Prothorax transversus, flavidus. Meso- et metanotum virentia.

Abdomen viride, fascia longitudinali dorsali flava.

Pedes virentes, tibiis posterioribus ante apicem annulo fusco vago notatis.

Alæ oblongæ, apice acutæ, membrana hyalina, iridea, venis omnibus, venulis aliquot virentibus, stigmate elongato, viridi-flavo.

Ala anterior venulis costalibus, radialibus, gradatis 5/8 et quæ juxta basim nigris ; venula 1ª sectoris radii pariter nigra intra cellulam procubitalem typicam juxta hujus apicem desinente.

Ala posterior venulis fere omnibus, præter costales nigras, vireis.

Long.	corp.		10	mm.
—	al.	anter.	13.5	»
—	—	poster.	12.4	»

Patrie : Bata, Congo, Ch. Alluaud, 1901.

3. Chrysopa Desjardinsi sp. nov.

Minor, vireo-flava, similis *brevicolli* Ramb.

Caput immaculatum, fronte inter antennas in carinam obtusam constricta, vertice sulco transverso obtuso distincto, antennis alæ longitudinem subæquantibus ; palpis haud fuscatis.

Prothorax transversus, antice angustatus, sulco transverso distincto, immaculatus.

Alæ hyalinæ, oblongæ, apice acutæ, fortiter irideæ, reticulatione viridi, stigmate vix sensibili, pilis fimbriisque densis vireo-flavis.

Ala anterior costa ante stigma leviter concava, venula 1ª sectoris radii intra cellulam procubitalem typicam juxta hujus apicem finiente ; venulis gradatis 5/7, in series parallelas dispositis ; venulis marginalibus posterioribus simplicibus 8.

Pedes graciles, tibiis vix incrassatis.

Long.	corp.	7.5	mm.
—	al. anter.	11	»
—	— poster.	10.5	»

Patrie : Ile Maurice, Desjardins leg.

4. CHRYSOPA NESÆA (1) sp. nov.

Major, flavescens. Similis *crassoneuræ*.

Caput immaculatum, antennis 1° articulo crasso, 2° brevissimo ; oculis fuscis.

Prothorax longior quam latior, antice vix angustatus, angulis anticis rotundatis. Meso- et metathorax immaculati.

Abdomen immaculatum, lateraliter subinfuscatum.

Pedes pallidi.

Alæ hyalinæ, irideæ, immaculatæ, stigmate flavescente, reticulatione flavida.

Ala anterior apice subacuto, venulis gradatis 4/6, seriei externæ nigris, similiterque nigris venis seu ramis marginalibus juxta venulas gradatas ; cellula procubitali typica ovali ante et juxta apicem cum venula 1ª sectoris conjuncta.

Ala posterior acuta, venulis gradatis 3/7, haud obscuratis ; sectore radii ad medium fusco, fusca item parte proxima venularum hinc inde emergentium.

Long.	corp.	11	mm.
—	al. anter.	17	»
—	— poster.	16	»

Patrie : Ile Maurice, Desjardins, Ch. Alluaud.

---

(1) Du grec νησαῖος, insulaire.

Obs. Ce qui caractérise cette espèce et la distingue facilement des autres, c'est la ligne oblique noire formée par les vénules en gradins à l'aile antérieure et la ligne brune formée par la partie centrale du radius à l'aile postérieure.

5. Chrysopa litorosa sp. nov.

Mediocris, flava.

Caput flavum, immaculatum, palpis longis, concoloribus, antennis ala anteriore longioribus, apicem versus fuscescentibus ; vertice deplanato aut concavo, postice carina obtusa transversa limitato ; oculis globosis, fuscis.

Prothorax longior quam latior, marginibus parallelis, angulis anticis obtusis, sulco transverso pone medium sito, parum profundo.

Abdomen flavum, inferne pallidius, lateraliter fuscatum ? (1).

Pedes anteriores et intermedii flavidi, tibiis apice et tarsis totis rufescentibus ; pedes posteriores straminei, viridi levissime tincti, tibiis summo apice et tarsis totis rufescentibus.

Alæ oblongæ, apice acutæ, membrana immaculata, iridea, reticulatione flavo-viridi, stigmate elongato, visibili, hujus coloris.

Ala anterior area costali mediocriter prope basim ampliata ; venula prima sectoris radii cellulam procubitalem typicam ante 4um apicale attingente ; cellula procubitali ovali, elongata, acuta ; venulis gradatis fere 6/9.

Ala posterior apice acutior, area costali vix dilatata, venulis gradatis fere 4/8.

Long.	corp.		10.5	mm.
—	—	antenn.	17	»
—	al.	anter.	14	»
—	—	poster.	12.5	»

Patrie : Iles Séchelles, Mahé, Ch. Alluaud, 1892.

---

(1) C'est l'apparence ; mais cela pourrait être dû en partie au mauvais état de conservation.

6. Chrysopa Claveri sp. nov.

Mediocris, flava, similis *nigricorni* et *flaveolæ*.

Caput antennis nigris, 1° articulo flavo, apicalibus fuscescentibus ; oculis æneis.

Prothorax transversus, angulis anticis oblique truncatis, fascia sanguinea ad margines laterales. Meso- et metanotum flava, aurantiaco tincta.

Abdomen flavum.

Pedes flavi, graciles.

Alæ hyalinæ, stigmate flavescente, conspicuo, elongato ; reticulatione flava ; membrana iridea, immaculata.

Ala anterior apice subacuta, venulis costalibus, radialibus et gradatis fere 4/8, initio sectoris radii nigris ; venula 1^{a} sectoris nigra, ad 5^{um} vel 6^{um} apicale cellulæ procubitalis desinente.

Ala posterior apice acuta, venulis gradatis ferme 3/6.

Long. corp.		8	mm.
—	al. ant.	13	»
—	— post.	11.4	»

Patrie : Colombie, C. Parzudaki, 1840 ; Panamà, Criado, 1889.

J'ai appelé cette espèce colombienne, du nom de l'illustre apôtre de Carthagène, le bienheureux St-Pierre Claver.

7. Chrysopa Lafoni sp. nov.

Major, flava, similis *brasiliensi* Schn.

Caput flavidum, stria fusca ad genas et ad clypei latera ; vertice deplanato ; antennis ala anteriore brevioribus, primo articulo grandi, inflato, subrubeo, ceteris flavidis, apicem versus fuscescentibus.

Prothorax latior quam longior, retrorsum ampliatus, margine antico recto, lateralibus rubro suffusis. Metanotum rubeo tinctum, puncto nigro insigni ad medium sulci obliqui anterioris. Metanotum pallens.

Abdomen flavidum, ad marginem posticum segmentorum subrubeo tinctum.

Pedes straminei, graciles, femoribus tenuibus, tibiis vix dilatatis.

Alæ angustæ, oblongæ, ter longiores quam latiores, hyalinæ, fortiter irideæ, venis et stigmate longo flavidis (in vivo viridibus?).

Ala anterior apice subacuta, venulis gradatis 8/10 in series basi propinquiores, nigris, venulis radialibus et furculis marginalibus, venulis costalibus et marginalibus posterioribus simplicibus ad medium tantum nigris ; 1ª venula sectoris radii nigra intra cellulam procubitalem ultra medium finiente (fig. 1ª).

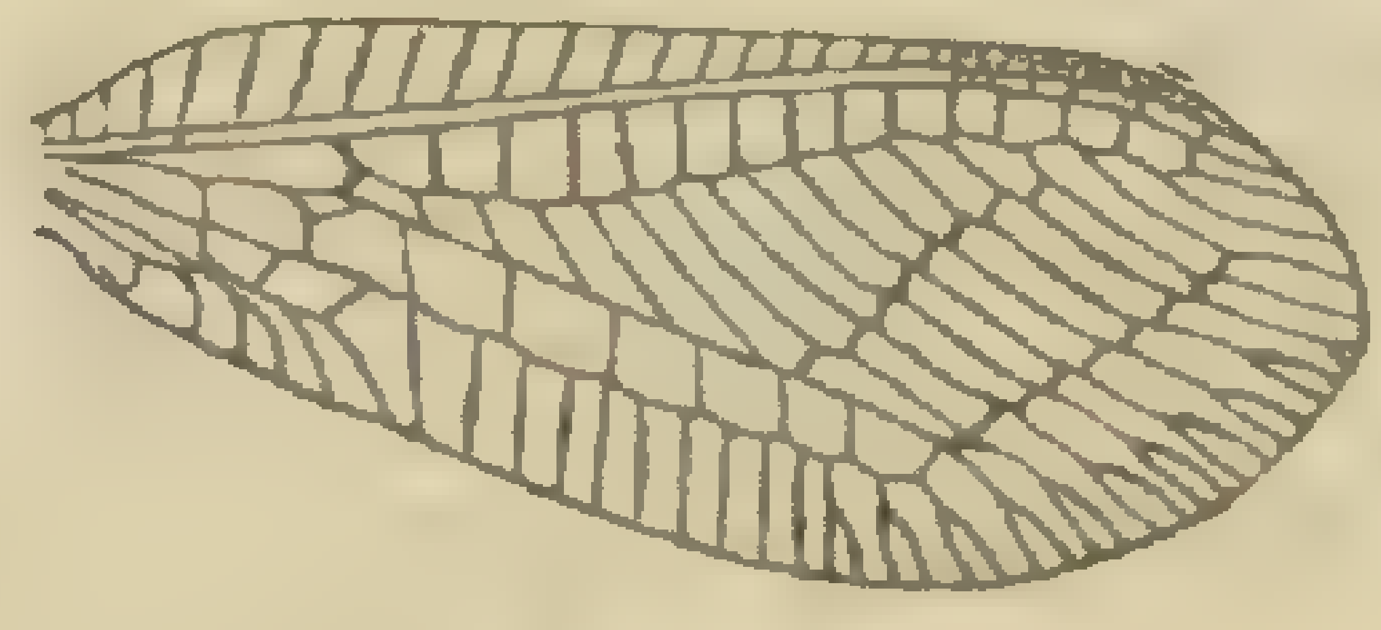


Fig. 1ª

Chrysopa Lafoni Nav.

Aile antérieure de la droite.

Ala posterior apice manifeste acuta, venulis fere omnibus pallidis, aliquot ramis inter series venularum gradatarum 7/8 nigro lineatis.

Long. corp.		9	mm.
— al.	anter.	17	»
— —	poster.	15.3	»

Patrie : Costa Rica, De Lafon, 1884.

8. Chrysopa nativa sp. nov.

Major, testacea, fusco picta.

Caput flavum, fronte, clypeo testaceis ; palpis testaceis, tenuibus, ultimo articulo subcylindrico ; antennis ala anteriore longioribus, testaceis.

Prothorax transversus, testaceus. angulis anticis truncatis, nigro pictis. Mesonotum flavum, medio ferrugineum. Metanotum flavum.

Abdomen testaceum, segmentis margine postico superne nigro limbatis.

Pedes testacei, graciles, longi.

Alæ hyalinæ, irideæ, stigmate testaceo, longo, opaco ; pilis fimbriisque testaceis.

Ala anterior post medium ampliata, apice subacuta, venis omnibus venulisque plerisque testaceis, venulis costalibus et radialibus ferrugineis, gradatis 7/9 et axilla furcularum externarum fuscis ; 1^{a} venula sectoris radii ad 3^{um} apicale cellulæ procubitalis decidente ; ramo procubiti hujusque sectore cellulam formantibus ferrugineis.

Ala posterior apice acuta, reticulatione testacea, venulis gradatis 6/8 fuscis, tenuibus.

Long.	corp.		10	mm.
—	antenn.		24	»
—	al.	anter.	17.5	»
—	—	poster.	15.5	»

Patrie : Costa Rica, De Lafon, 1884.

9. Chrysopa ceratica (1) sp. nov.

Testacea, nigro picta.

Caput antice et vertice rubro suffusum, antennis flavis, ala anteriore longioribus, tenuibus, 1^{o} articulo grandi, rubello, 2^{o} fusco, novem sequentibus linea longitudinali interna fusca pictis.

Prothorax transversus, testaceus, rubro suffusus. Mesonotum flavum, ad præscutum et lobulos scapulares nigro maculatum. Metanotum medio fuscatum.

Abdomen testaceum, superne fuscatum (2).

Pedes flavidi, graciles, tibiis posterioribus longis modice dilatatis.

Alæ oblongæ, hyalinæ, irideæ, reticulatione testacea, stigmate conspicuo, elongato, interne fusco, externe fulvo-fusco.

Ala anterior apice subacuta, venulis radialibus ferrugineis, gradatis 6/7 et ultima procubitali fuscis ; 1^{a}, sectoris radii ad 3^{um} apicale cellulæ procubitalis veniente.

Ala posterior apice acuta, reticulatione tota flavo-testacea, venulis gradatis 5/6.

---

(1) **Du grec κέρας corne.**

(2) Quelques-unes de ces couleurs me sont incertaines à cause du mauvais état de conservation de l'échantillon que j'ai sous les yeux.

Long. corp.	6'5	mm.
— al. ant.	12'5	»
— — poster.	11	»

Patrie. Costa Rica. De Lafon, 1884.

10. Chrysopa effusa sp. nov.

Flava, similis *circumfusæ* Burm.

Caput flavum, palpis concoloribus, antennis 1° articulo flavo, linea externa longitudinali fusco-nigra, reliquis fusco-nigris, apicalibus pallidioribus ; oculis globosis, fuscis, vertice depresso.

Prothorax latior quam longior, antice augustatus, marginibus lateralibus fuscatis. Mes- et metanotum flava, immaculata.

Abdomen flavum, inferne pallidius.

Pedes flavi, graciles, unguibus nigris.

Alæ oblongæ, hyalinæ, irideæ, apice acutæ, stigmate flavescente, fimbriis pilisque flavidis.

Ala anterior (fig. 2ª) venulis plerisque, ramis, furculis marginalibus fusco-ferrugineis, eodem colore auguste limbatis ; venis flavis, ad insertionem venularum fuscatis ; venulis gradatis 4/5 ; cellula procubitali typica subtota fuscata, venula 1ª sectoris radii in 5^{um} apicale terminante.

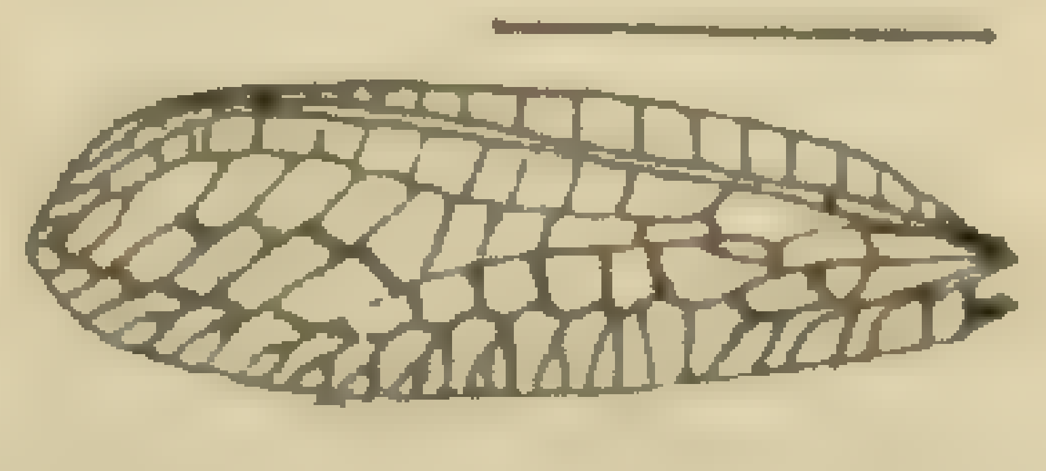


FIG. 2ª
Chrysopa effusa Nav.
Aile antérieure de la gauche.

Ala posterior reticulatione flava, venulis nullis limbatis, gradatis 4/5 fuscis, tenuibus.

Long. corp.	6'5	mm.
— al. ant.	12	»
— — post.	10'8	»

Patrie. Mexique, Sallé leg.

11. CHRYSOPA SALLEANA sp. nov.

Flava, nigro picta.

Caput flavum, stria ad genas ante oculos nigra, palpis subtotis nigris ; antennis ala anteriore longioribus, tenuibus, flavis, primo articulo fusco rubro striato, 2^{o} eodem colore suffuso ; oculis globosis, plumbeis.

Prothorax fere æque longus ac latus, antice angustatus, marginibus lateralibus 2 maculis elongatis conjunctis, fuscis. Mesonotum ad præscutum et lobulos scapulares nigromaculatum.

Abdomen flavum, superne aliquot maculis nigris grandibus in seriem notatum, ad apicem 3-4.

Pedes flavi, tenues, tibiis posterioribus parum dilatatis.

Alæ hyalinæ, irideæ, oblongæ, in 3^{o} apicali ampliatæ, stigmate interne saturate fusco, amplo, externe flavescente ; venis, fimbriis pilisque flavis.

Ala anterior (fig. 3^{a}) apice subacuta, venulis intercubitalibus, 3 cubitalibus primis et gradatis 5/6 totis, costalibus et radialibus initio, marginalibus posterioribus simplicibus 10 initio et fine nigris ; venulis sectoris radii 2^{a} et 3^{a} totis, 1^{a}, 4^{a}, 5^{a} et 6^{a} ad utrumque extremum nigris. Axillæ furcularum externarum nigræ. Venulæ 2 ultimæ procubitales et 2 primæ gradatæ seriei externæ leviter fusco limbatæ. Cellula procubitalis typica basi ampla, subtriangularis, cum venula 1^{a} sectoris radii ad suum 5^{um} apicale connexa.

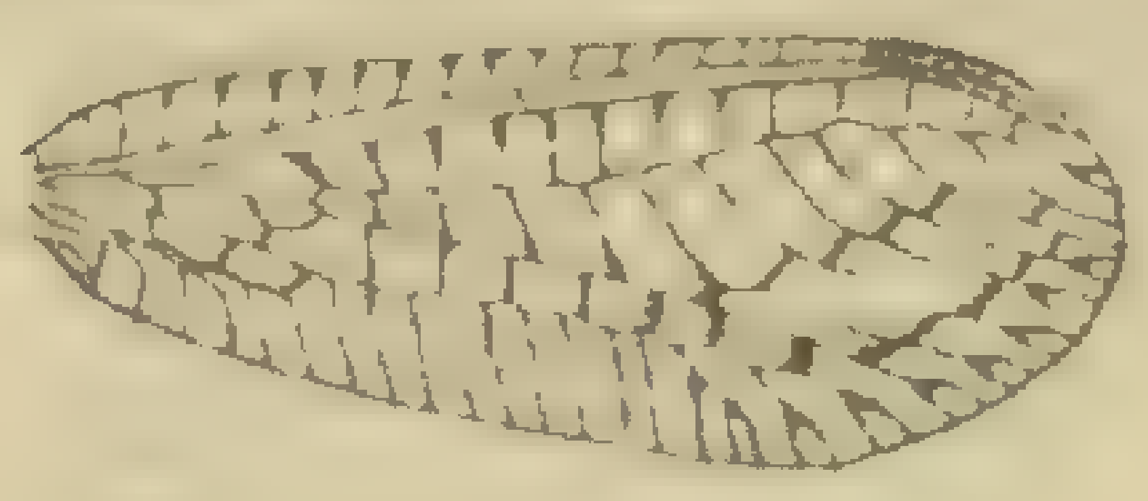


FIG. 3^{a}
Chrysopa salleana Nav.
Aile antérieure de la droite.

Ala posterior lanceolata, apice acuta, reticulatione tota flava, venulis gradatis 4/5.

Long. corp.	7'5 mm.
— antenn.	17 »
— al. anter.	13'5 »
— — poster.	11'5 »

Patrie. Mexique, Sallé leg.

12. Hypochrysa argentina sp. nov.

Fulva, fusco nigro picta.

Caput fulvo pallidum, macula grandi inter antennas et alia ad clypei latera fuscis; palpis fuscis, præter articulorum apicem pallidum; vertice depresso; antennis ala anteriore brevioribus: 1° articulo inflato, superne fusco leviter suffuso; 2° articulo fusco, reliquis fulvis; oculis fuscis, globosis.

Prothorax transversus, sulco transverso pone medium sito, nec margines laterales attingente, profundo, amplo, fusco; marginibus lateralibus linea media angusta, alia latiore inter hanc et marginem, fuscis. Meso- et metanotum fulva, linea angusta centrali, fascia laterali ampla fuscis.

Abdomen superne præter apicem segmentorem fuscum, pilis pallidis.

Pedes pallidi, rubro-fusco suffusi.

Alæ angustæ, fere ter longiores quam latiores, apice acutæ, membrana hyalina, fortiter iridea, stigmate sensibili, subfusco, venis fulvis vel pallidis, ad insertionem venularum fuscis, venulis omnibus ramisque fuscis; venulis gradatis in utraque ala 4-5, in series parallelas dispositis. In ala anteriore 1ª venula sectoris radii cellulam procubitalem typicam attingit juxta hujus apicem fusco tinctum. Ante hujus cellulam procubitus stria fusca pictus.

Long. corp.	6'5 mm.
— al. ant.	11 »
— — post.	10 »

Patrie. Chaco de Santiago del Estero. Bords da Rio Salado, env. d'Icaño. E.-R. Wagner, septembre, 1903.

13. Eremochrysa Digueti sp. nov.

Ferrugineo rubra.

Caput flavum, linea inter antennas, ante eas transverse continuata, puncto in clypeo, alio ad clypei extera, fuscis; palpis subtotis fusco-sanguineis; vertice ad latera juxta oculos rubro; antennis fuscis, basi ferme contiguis : 1° articulo flavo, externe linea fusca longitudinali; oculis globosis, æneis.

Prothorax transversus, angulis anticis oblique truncatis, disco rubro, ad angulos fusco. Meso- et metanotum rubra, ad latera fuscata.

Abdomen ferrugineo-rubrum, ad latera superne fuscum.

Pedes flavidi, rubeo leviter suffusi, femoribus posterioribus ad medium maximam partem rubris; tarsis longis, 1° articulo ceteros simul sumptos longitudine subæquante.

Alæ angustæ, hyalinæ, irideæ, stigmate angusto flavescente, reticulatione subtota rubro-fusca, 3 venulis stigmalibus subcostalibus flavidis.

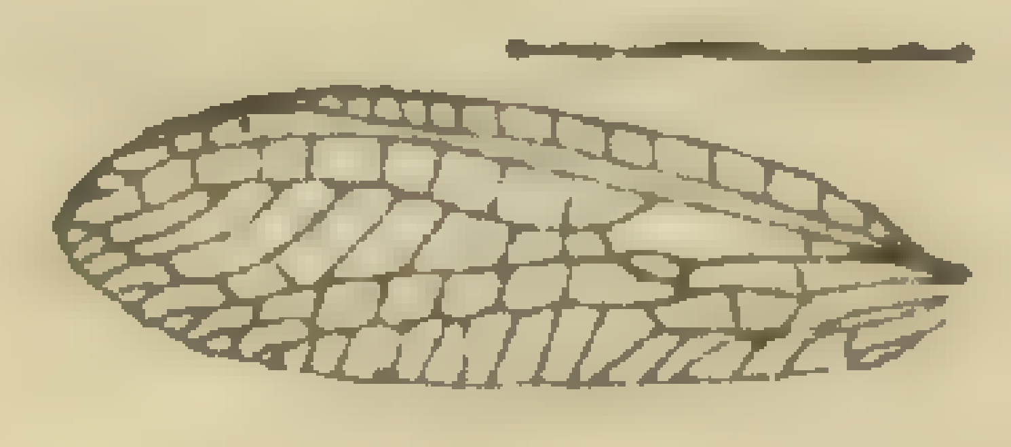


FIG. 4.
Eremochrysa Digueti Nav.
Aile antérieure de la gauche.

Ala anterior venulis gradatis 0/3 vel 1/4, venula 1ª sectoris radii ipsum cellulæ procubitalis apicem attingente, sive cum ramo procubiti continuata; cellula procubitali lanceolata.

Ala posterior apice acuta, subcosta crassa, fusca, radio flavescente, venulis gradatis 3.

Long. corp. 6'5 mm.
— al. ant. 11'2 »
— — post. 9'8 »

Patrie. Basse Californie. Diguet leg.

14. ANCYLOPTERYX WATERLOTI sp. nov.

Minor, flavida.

Caput flavidum, antennis pallidis, tenuibus, 1° articulo grandi, inflato, elongato, 2° globoso, reliquis subcylindricis ; oculis globosis, nigris.

Prothorax transversus, subduplo latior quam longior, angulis anticis rectis, roseo leviter tinctus. Meso- et metathorax concolores, haud maculati.

Abdomen superne subrubeum, inferne pallidius.

Pedes graciles, viridescentes, tibiis fusiformibus, tarsis fulvis.

Alæ (fig. 5ª) fortiter irideæ, maculatæ, venis pallidis, stigmate vix sensibili, viridescente.

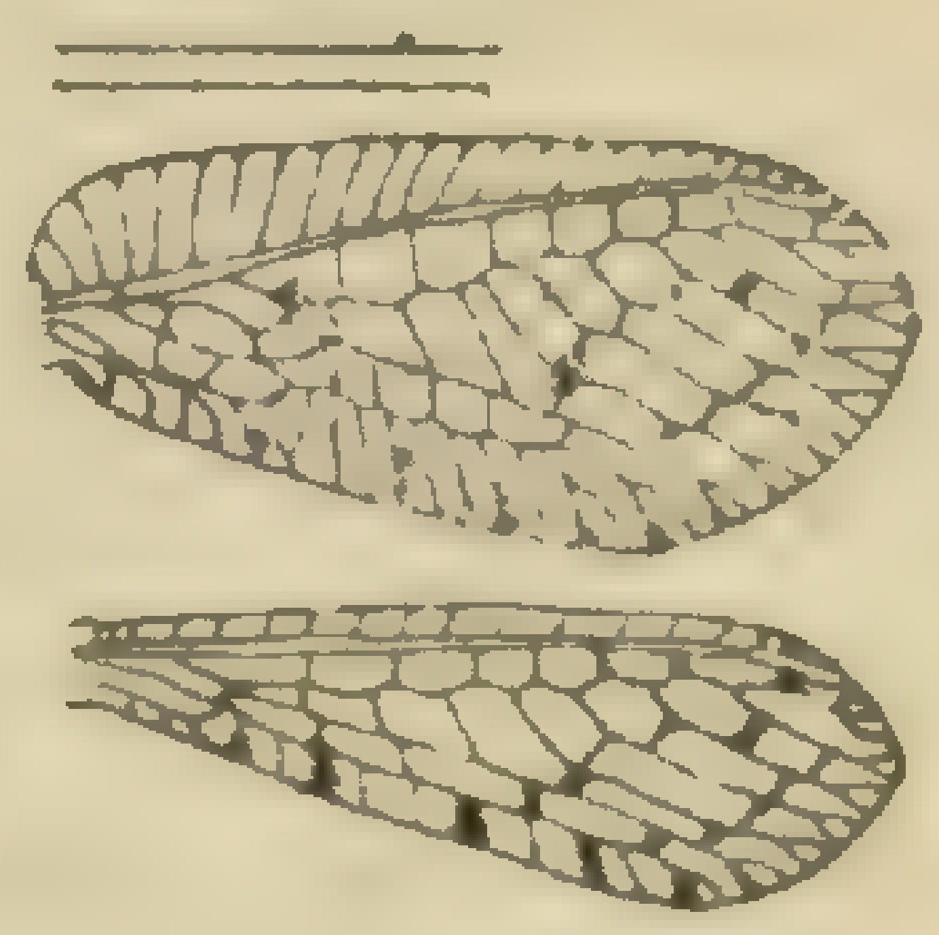


FIG. 5.
Ancylopteryx Walterloti Nav.
Ailes de la droite.

Ala anterior ampla, apice rotundata, sectore radii parum curvato ; venulis gradatis 5/6 et radialibus nigris, costalibus plerisque ad marginem costalem tantum nigris. Aliquot venulæ fusco limbatæ, maculas seu nebulas formantes ; ex his 3 grandiores : 1ª ad radicem sectoris radii, 2ª ad duas primas venulas gradatas seriei internæ, fere in lineam rectam dispositas, 3ª inter has ad marginem posteriorem. Præterea maculæ minutæ levioresque ad venulas gradatas, ad finem marginalium aliquot.

Ala posterior basi angusta, usque ad 4um apicale sensim ampliata, venulis limbatis, nigris, gradatis 4/4, duabus primis internis fere in lineam sitis ; umbris ad venulas gradatas ; præterea 6 pluresve umbræ ad marginem posteriorem et exteriorem.

Long. corp. 7'5 mm.
— antenn. 12'5 »

Long.	al. anter.	11 mm.
—	— poster.	10'5 »

Patrie. Dahomey. Env. de Porto-Novo. Waterlot, 1908.

15. ALLOCHRYSA ANGRANDI sp. nov.

Flava, ferrugineo tincta.

Caput flavo-ferrugineum, macula inter antennas, vertice toto fusco-ferrugineis seu violaceis ; occipite ferrugineo ; antennis longissimis, flavidis, 1° articulo ferrugineo ; oculis æneis ; palpis flavidis.

Prothorax flavidus, paulo latior quam longior, antice angustatus, marginibus lateralibus ferrugineis. Meso- et metanotum subtota fuscata.

Abdomen flavo-ferrugineum, superne obcurius.

Pedes toti pallidi, rubeo leviter suffusi, unguibus totis nigris.

Alæ membrana hyalina, cupreo fortiter iridea, reticulatione flavo-ferruginea, pilis fimbriisque concoloribus, stigmate interne saturate fusco, externe usque ad alæ apicem flavescente.

Ala anterior ampla, apice elliptice vel quasi circulariter rotundata, costa et radio ad basim fuscatis, ultima venula procubitali cum anastomosi procubiti, seu basi petioli, nigra ; venulis gradatis 15/11, serie externa margini parallela, interna in duas partes angulares disposita, priore seu interna parallela procubito, exteriore arcuata, antrorsum convexa.

Ala posterior multo angustior, lanceolata, apice acuta, venulis gradatis 12/10, similiter dispositis.

Long.	corp.	12 mm.
—	antenn.	29 »
—	al. anter.	24 »
—	— poster.	21 »
Lat.	— ant. (in 4° apic.)	9 »
—	— post. (in 3° ap.)	7 »

Patrie. Guatemala. Angrand leg.

16. LEUCOCHRYSA LESCHENAULTI sp. nov.

Major, ferruginea. alis maculatis.

Caput ferrugineum, puncto ante oculos nigro ; palpis fuscis, vertice lineis nigris in angulum inter antennas confluentibus, postice juxta oculos parallelis, cum lineis pronoti continuatis ; antennis flavis, articulis prope basim fuscis, 1° ferrugineo, externe fusco notato ; oculis fuscis.

Prothorax latior quam longior, antice angustatus, angulis anticis valde oblique truncatis ; marginibus lateralibus fuscis ; disco bina linea longitudinali fusca, cum lineis capitis continuata. Meso- et metanotum ferruginea, maculose fuscata.

Abdomen ferrugineum, superne bina linea fusca longitudinali.

Pedes pallidi, apice femorum, basi tibiarum, extremo tarsorum ferrugineis.

Alæ (fig. 6ª) oblongæ, irideæ, maculosæ, villosæ, reticulatione fulva, ad maculas fusca, stigmate insensibili, fusco interne et externe maculato.

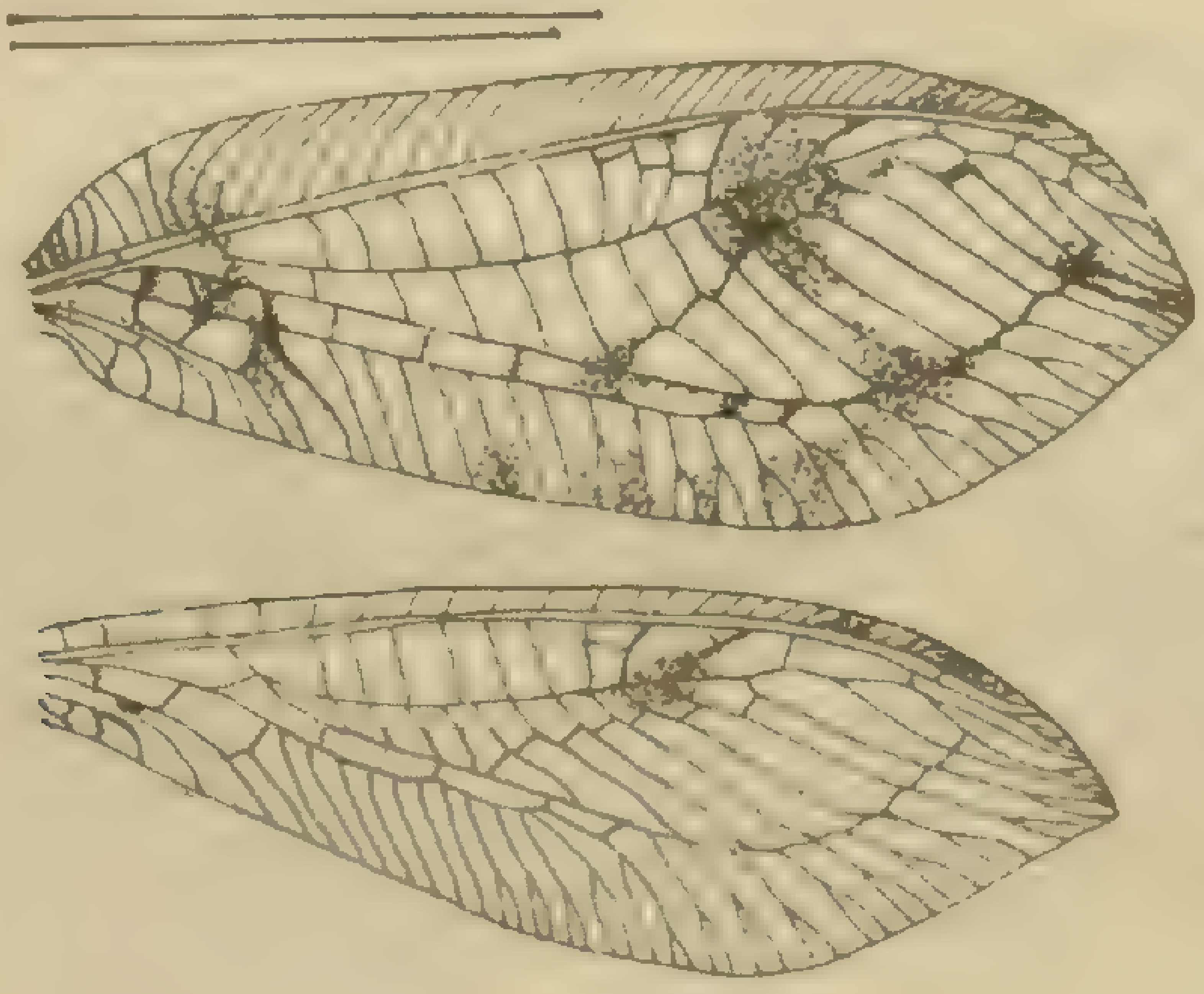


FIG. 6.

Leucochrysa Lechesnaulti Nav.
Ailes de la droite.

Ala anterior ampla, apice subacuta, venulis gradatis 9.9 in series irregulares dispositas, interna sinuosa, externa margini parallela. Membrana, præter binam maculam stigmalem, his maculis fusco-ferrugineis picta : 1ª basilari ab area costali ad axillarem, 2ª transversa prope marginem costalem, ad radicem sectoris radii et ad-finem 1ª venulæ marginalis posterioris ; 3ª obliqua, per seriem internam venularum gradatarum se extendente, ad aream subcostalem dilatata ; 4ª convexa, ad seriem externam venularum gradatarum currente, tractumque ad alæ apicem et ad angulum posticum porrigente ; aliis duabus ad marginem posteriorem. In area radiali 3 venulæ transversæ gradatæ.

Ala posterior angustior, apice acuta, venulis gradatis 7/7, in duas series curvas dispositis ; macula umbrosa ad extremum seriei internæ venularum gradatarum usque ad radium.

Long.	corp.	13	mm.
—	al. ant.	26	»
—	— post.	24	»
Latit.	— ant.	10'5	»
—	— post.	9	»

Patrie. Guyane franc. Surinam. Leschenault leg.

17. NOTHOCHRYSA GUERINI sp. nov.

Flavida, alis immaculatis.

Meso- et metathorax flavidi.

Abdomen flavidum, singulis segmentis dorso ad marginem posteriorem nigro limbatis.

Alæ hyalinæ, immaculatæ, irideæ, venis flavidis, venulis ramisque fusco-rubris, stigmate flavescente, duabus venulis subcostalibus ad stigma crassis, fuscis.

Ala anterior apice subacuta, in 4° apicali ampliata, sectore radii flexuoso sive sinuoso, venulis gradatis 9/10, serie externa margini parallela sinuosa, postice ad internam accedente, ad medium extrorsum concava, apice iterum ad internam versa, sed ab ea plus duplo quam postice distante.

Ala posterior similiter constructa, apice acuta, venulis gradatis 9/9.

Long.	al.	anter.	21	mm.
—	—	poster.	18.5	»
Lat.	—	anter.	7	»
—	—	poster.	6	»

Patrie : Sénégal, Guérin, leg.

Observation : Quoique l'échantillon que j'ai sous les yeux soit très incomplet, car il lui manque la tête et le prothorax, la forme caractéristique du stigme, avec les deux vénules brunes, distingue suffisamment cette espèce de ses congénères pour la décrire comme nouvelle, la dédiant à celui qui en a fait la trouvaille.

18. Nothochrysa cuneata sp. nov.

Major, flava, nigro picta.

Caput flavum, immaculatum, palpis concoloribus, antennis basi flavis, ad apicem fuscescentibus.

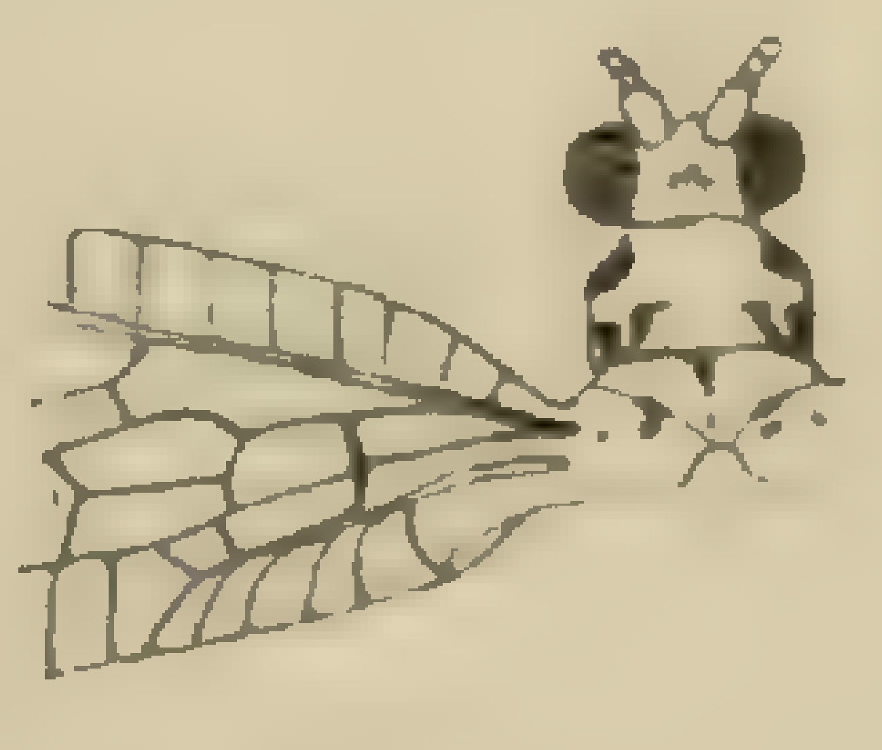


Fig. 7

Nothochrysa cuneata Nav.
Région antérieure.

Prothorax (fig. 7ª) fortiter transversus, angulis anticis oblique truncatis, disco sex maculis nigris quasi cuneiformibus picto : 1ª grandi an angulum anticum, 2ª ovali ad angulum posticum, 3ª lineari curva obliqua, retrorsum cum 2ª confluente. Mesonotum 7 punctis nigris notatum : 1° antice in sulco medio, aliis 3 lateralibus, uno in sulco obliquo et duobus in lobulis scapularibus. Metanotum immaculatum.

Abdomen flavum, maculis fuscis distinctum.

Pedes flavi, teretes, tibiis hand dilatatis, unguibus nigris.

Alæ angustæ, membrana vitrea, fortiter iridea, immaculata, stigmate elongato, viridi-flavo ; apice ellipticæ.

Ala anterior omnibus venulis, præter stigmales, ramis, furculisque, totis nigris ; venulis gradatis 10/10, serie externa margini parallela, interna extrorsum concava ; vena costali, subcostali et radiali totis flavis, sectore radii et cubito linea basilari, procubito striola basilari et ad cellulam procubitalem, nigris.

Ala posterior venulis costalibus, gradatis 9/9 in series parallelas dispositis, interna vix concava, procubitalibus et basalibus aliquot totis nigris, reliquis initio tantum.

Long.	corp.		12	mm.
—	antenn.		18	»
—	al.	anter.	21	»
—	—	poster.	18.5	»

Patrie : Brésil. Alluaud, 1907.

Saragosse, Collège du Sauveur, juillet 1910.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXIV, 1875 à 1910. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des Annales de la Société scientifique (1875-1901). Un vol. in-8° de 259 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun . . . . fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la Revue des Questions scientifiques (1877-1901). Un vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr. ; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Un vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Éd. Van der Smissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905). . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : **T. I.** Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. (Épuisé.) **T. II.** VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gênes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. III.** XIII. Le Port moderne de Gênes, M. Theunissen. XIV. Ostende, L.-Th. Léger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow, A. Vanderstichele. Prix : 3 francs. **T. IV.** XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. V.** XXVIII Rouen, G. Blondel. XXIX. Montréal, M. Dewavrin. XXX. Seattle et Tacoma, M. Rondet-Saint. XXXI. Trieste, Fiume, Venise, M. Dewavrin. XXXII. Venise au moyen âge, C. Terlinden. XXXIII. Les ports du Nord-Est de l'Angleterre, J. Meuwissen. — Conclusions, G. Blondel. — Appendices : L'administration des Ports, J. Charles, S. J. ; L'industrie des transports maritimes, H. Mansion. Prix : 3 francs.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le Dr X. Francotte. Brochure in-8° de 48 pages (1907) . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le Dr Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) fr. **0 75**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901). La livraison de janvier 1902 a inauguré la **troisième série.**

La revue paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de **Variétés.**

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** °/₀ ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la REVUE. Un vol. du format de la REVUE de XII-168 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. & R. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

TRENTE-CINQUIÈME ANNÉE, 1910-1911
TROISIÈME ET QUATRIÈME FASCICULES

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRIÓN)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1911

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Session des 25, 26 et 27 avril 1911, à Bruxelles.— Séances des Sections.

Première Section **177**
Deuxième — **193**
Troisième — **218**
Quatrième — **265**
Cinquième — **283**
Sixième — **288**
Assemblées générales **289**

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

La radioactivité et la série périodique des éléments, par le R. P. Th. Wulf, S. J. 283
Notes sur l'Arithmétique de Simon Stevin, par le R. P. H. Bosmans, S. J. 293
Le Moustérien belge, par M. le curé J. Claerhout 314
Sur la synthèse de l'eau oxygénée par l'action de l'effluve électrique, par M. A. de Hemptinne 323
Sur la multiplication des Déterminants-permanents, par M. M. Lecat. 339
Simplifications de la méthode la plus approximative et de l'approximation minima. Étalonnage des lunettes stadimétriques, par M. J. E. Goedseels 351

Le volume des Annales de la Société scientifique paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** de la Revue et des Annales, et l'**Administration** de ces deux publications et de la *Société scientifique*, au Secrétariat, 11, rue des Récollets, Louvain.

Adresse du secrétaire général : **M. Paul Mansion,**
2, quai des Dominicains, Gand.

SESSION DES 25, 26 et 27 AVRIL 1911

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

Mardi 25 avril 1911. — La section procède au renouvellement de son bureau. Sont nommés :

Président : le R. P. Bosmans, S. J.
Vice-Présidents : M. Goedseels.
M. Lecat.
Secrétaire : M. Dutordoir.

La section décide la mise au concours de la question suivante :

« Corriger les erreurs signalées par Sylow et Lie dans le mémoire d'Abel : *Sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes.* »

M. Neuberg propose l'insertion dans les Annales du mémoire de M. Casteels, intitulé : *Sur le* 2n-*gramme du mathématicien de Morgan*, que l'auteur avait présenté à la section en séance du 5 avril 1910. Cette proposition est adoptée.

M. Neuberg fait la communication suivante : *Sur l'octogone gauche de Paul Serret.*

Dans ma communication *Sur une transformation unirationnelle* (Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, XXXV, 2^e partie, pp. 170-178), j'ai traité le problème suivant :

Une droite variable t *rencontre les côtés d'un triangle donné* $A_1A_2A_3$ *aux points* B_1, B_2, B_3. *Étudier la correspondance entre la droite* t *et les points* M, M' *où se coupent les circonférences* (A_1B_1), (A_2B_2), (A_3B_3) (¹).

La note actuelle contient mes premières recherches sur la question analogue dans l'espace, à savoir :

Une droite t *rencontre les faces* α_1, α_2, α_3, α_4 *d'un tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4 = T$ *aux points* B_1, B_2, B_3, B_4. D'après un théorème de Paul Serret *(Géométrie de direction*, pp. 265-268), *les sphères* (A_1B_1), (A_2B_2), (A_3B_3), (A_4B_4) *ont deux points communs* M, M' ; par suite, *les milieux* C_1, C_2, C_3, C_4 *des droites* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 *sont situés dans un même plan* γ. *Étudier les relations entre les éléments* t, M, M', γ.

Dans MATHESIS, 1904, p. 35, j'ai donné du théorème de Serret une nouvelle démonstration, que je reprendrai ci-après avec une simplification importante. La figure T*t* présente quatre couples de sommets opposés A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 ; on peut l'appeler *tétragone complet* ou mieux *octogone gauche de Serret*. Nous adopterons aussi les dénominations suivantes proposées par Serret :

Les droites A_1B_1, A_2B_2,... sont les *diagonales* de l'octogone ; les sphères (A_1B_1), (A_2B_2),... en sont les *sphères diagonales*, elles se coupent aux *points sphériques* M, M' ; le plan γ des centres en est le *plan médian*, et la droite MM', l'*axe radical*.

1. La figure étant rapportée à trois axes rectangulaires quelconques, soient (x_i, y_i, z_i), (x_i', y_i', z_i') les coordonnées des points A_i, B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. La sphère (A_1B_1) étant le lieu des points (x, y, z) d'où l'on voit le segment A_1B_1 sous un angle droit, son équation est

$$(x - x_1)(x - x_1') + (y - y_1)(y - y_1') + (z - z_1)(z - z_1') = 0. \qquad (1)$$

Soient (p_1, p_2, p_3, p_4), $(q_1, \ldots)$ les coordonnées barycentriques, par rapport au tétraèdre T, de deux points quelconques P, Q de la droite *t* ; nous supposerons $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$. Celles du point B_1 seront de la forme

---

(¹) Je désigne par *circonférence* (XY), *sphère* (XY) une circonférence tracée dans un plan donné ou une sphère dont les points X, Y sont les extrémités d'un même diamètre.

$$mp_1 + nq_1, \quad mp_2 + nq_2, \quad mp_3 + nq_3, \quad mp_4 + nq_4\,;$$

la première étant nulle, nous prendrons $m = -q_1$, $n = p_1$, de sorte qu'en représentant la quantité $p_i q_k - p_k q_i$ par r_{ik}, nous aurons pour les coordonnées de B_1

$$r_{11}, \quad r_{12}, \quad r_{13}, \quad r_{14}.$$

Observons que $r_{ii} = 0$, $r_{ik} = -r_{ki}$ et que les six quantités

$$r_{12}, \quad r_{13}, \quad r_{14}, \quad r_{23}, \quad r_{34}, \quad r_{42}$$

sont les *coordonnées radiales* de la droite t par rapport au tétraèdre T.

Il résulte de là que

$$x'_1 = \frac{r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + r_{14}x_4}{r_{12} + r_{13} + r_{14}}, \quad y'_1 = \frac{r_{12}y_2 + r_{13}y_3 + r_{14}y_4}{r_{12} + r_{13} + r_{13}}, \ldots$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient

$$\Sigma(x - x_1)\left[r_{12}(x - x_2) + r_{13}(x - x_3) + r_{14}(x - x_4)\right] = 0\,;$$

le signe sommatoire se rapporte aux lettres x, y, z. Posons

$$S_{ik} \equiv S_{ki} \equiv (x - x_i)(x - x_k) + (y - y_i)(y - y_k) + (z - z_i)(z - z_k)\,;$$

il est facile de voir que l'équation $S_{ik} = 0$ représente la sphère (A_iA_k). La sphère (A_1B_1) et, par analogie, les autres sphères diagonales auront alors pour équations

$$r_{12}S_{12} + r_{13}S_{13} + r_{14}S_{14} = 0, \tag{2}$$

$$r_{21}S_{21} + r_{23}S_{23} + r_{24}S_{24} = 0, \tag{3}$$

$$r_{31}S_{31} + r_{32}S_{32} + r_{34}S_{34} = 0, \tag{4}$$

$$r_{41}S_{41} + r_{42}S_{42} + r_{43}S_{43} = 0. \tag{5}$$

La somme des premiers membres étant identiquement nulle, les quatre sphères se coupent aux deux mêmes points M, M'.

2. La démonstration précédente suppose la droite t quelconque ; nous allons examiner des positions particulières de t.

Considérons une droite passant par A_1 et rencontrant le plan $A_2A_3A_4$ au point B_1 ; les sphères diagonales ont pour diamètres A_1B_1, A_2A_1, A_3A_1, A_4A_1 ; les points M, M' sont donc le sommet A_1

et le pied de la hauteur de T issue de A_1. Cependant, si t coïncide avec l'arête A_1A_2, les sphères (A_1B_1), (A_2B_2) se confondent avec la sphère (A_1A_2), et comme les points B_3, B_4 sont indéterminés, on peut considérer deux points quelconques de la sphère (A_1A_2) comme étant les points M, M′. Ces résultats peuvent être établis analytiquement en prenant pour les points P, Q qui fixent la droite t, le sommet A_1 $(1, 0, 0, 0)$ et un point quelconque B_1 $(0, q_2, q_3, q_4)$ du plan $A_2A_3A_4$ ou le sommet A_2 $(0, 1, 0, 0)$.

Supposons la droite t parallèle au plan $A_2A_3A_4$. La sphère (A_1B_1) est alors remplacée par le plan perpendiculaire en A_1 à t et le plan de l'infini ; le premier de ces plans contient donc les points M, M′ où se rencontrent les sphères (A_2B_2), (A_3B_3), (A_4B_4). Cette conclusion résulte aussi de l'équation (2) ; car on a $p_1 = q_1$, $p_2 + p_3 + p_4 = q_2 + q_3 + q_4$, de sorte que l'équation (2) se réduit à

$$(q_2 - p_2)S_{12} + (q_3 - p_3)S_{13} + (q_4 - p_4)S_{14} = 0$$

et n'est plus que du premier degré en x, y, z.

Donnons enfin à t une position quelconque dans le plan α_1. Le point B_1 est alors indéterminé, et les points B_2, B_3, B_4 sont situés sur les arêtes A_3A_4, A_4A_2, A_2A_3. Les sphères (A_2B_2), (A_3B_3), (A_4B_4) coupent le plan α_1 suivant trois circonférences ayant deux points communs F, F′ qui sont collinéaires avec l'orthocentre h_1 du triangle $A_2A_3A_4$; par suite, ces sphères ont en commun la circonférence δ_1 décrite sur le segment FF′ comme diamètre dans un plan perpendiculaire à α_1. La circonférence δ_1 est un lieu de couples de points MM′ ; les cordes MM′ étant perpendiculaires au plan γ et par suite à la droite $C_2C_3C_4$, sont perpendiculaires à la projection de cette droite sur le plan de δ_1. Remarquons aussi que, quelle que soit la position de t dans le plan α_1, la circonférence δ_1 passe par les deux points I_1, I_1' communs aux trois sphères (A_2A_3), (A_3A_4), (A_4A_2) ; ces points sont situés sur la perpendiculaire élevée en h_1 sur le plan α_1. Ces résultats se déduisent aussi des équations (2) et (5) en faisant $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, ce qui entraîne $r_{12} = r_{13} = r_{14} = 0$.

3. A une droite t non située dans une face du tétraèdre T correspond un couple déterminé MM′. Mais à un point donné M correspondent une infinité de droites t. En effet, les plans per-

pendiculaires en M aux droites MA_1, MA_2, MA_3, MA_4 rencontrent les faces correspondantes de T suivant quatre droites b_1, b_2, b_3, b_4 qui sont les génératrices d'un même mode d'une quadrique W (¹) et toute génératrice du second mode de W forme avec T un octogone dont les sphères diagonales passent par M.

La quadrique W est représentée en coordonnées radiales r_{ik} par le système des équations (2), (3), (4), les x, y, z qui figurent dans les S_{ik} étant remplacés par les coordonnées cartésiennes de M ; ces équations représentent les complexes spéciaux qui ont pour axes les droites b_1, b_2, b_3.

Pour obtenir l'équation de W en coordonnées tétraédriques, remplaçons les r_{ik} par $p_i\,q_k - p_k q_i$ et ordonnons les équations (2), (3), (4) par rapport aux quantités q_i. Pour simplifier, nous supposons le point Q pris sur b_1, c'est-à-dire $q_1 = 0$; alors en éliminant q_2, q_3, q_4 entre ces trois équations on trouve pour l'équation de W en coordonnées ponctuelles (p_1, p_2, p_3, p_4) :

$$\begin{vmatrix} S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ p_1S_{21}+p_3S_{23}+p_4S_{24} & -p_2S_{23} & -p_2S_{24} \\ -p_3S_{32} & p_1S_{31}+p_2S_{32}+p_4S_{34} & -p_3S_{34} \end{vmatrix} = 0.$$

Ce résultat revient à

$$\Sigma\, p_1^2 S_{12}S_{13}S_{14} + \Sigma\, p_1\,p_2 S_{12}(S_{13}S_{42} + S_{14}S_{23}) = 0. \tag{6}$$

Si l'on y fait $p_1 = 0$, on obtient

$$(p_2S_{12} + p_3S_{13} + p_4S_{14})\,(p_2S_{23}S_{24} + p_3S_{32}S_{34} + p_4S_{42}S_{43}) = 0\,;$$

les équations

$$p_2S_{12} + p_3S_{13} + p_4S_{14} = 0, \tag{7}$$

$$p_2S_{23}S_{24} + p_3S_{32}S_{34} + p_4S_{42}S_{43} = 0, \tag{8}$$

jointes à $p_1 = 0$, représentent les deux génératrices de W situées dans le plan $A_2\,A_3\,A_4$, c'est-à-dire b_1 et la droite passant par les traces de b_2, b_3, b_4 sur le plan $A_2\,A_3\,A_4$.

Voici une autre explication des résultats précédents. Dans les

---

(¹) Voir MATHESIS, 1910, p. 41 (Schenker).

équations (2) à (5), rapportons les S_{ik} à un point donné $M(x, y, z)$ et considérons les r_{ik} comme variables. Alors comme les coordonnées barycentriques de B_i sont r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4}, si l'on désigne les coordonnées barycentriques courantes par μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, ces équations écrites ainsi :

$$\mu_2 S_{12} + \mu_3 S_{13} + \mu_4 S_{14} = 0, \tag{9}$$

$$\mu_1 S_{21} + \mu_3 S_{23} + \mu_4 S_{24} = 0, \tag{10}$$

$$\mu_1 S_{31} + \mu_2 S_{32} + \mu_4 S_{34} = 0, \tag{11}$$

$$\mu_1 S_{41} + \mu_2 S_{42} + \mu_3 S_{43} = 0, \tag{12}$$

représentent, dans les plans des faces de T, les lieux des sommets B_1, B_2, B_3, B_4 d'un octogone de Serret dont les sphères diagonales passent par M. Ces lieux sont donc quatre droites b_1, b_2, b_3, b_4. Il est facile de vérifier que ces lignes sont des génératrices d'un même mode d'une quadrique (¹). En effet, les traces des droites b_2, b_3, b_4 sur le plan $A_2 A_3 A_4$ satisfont respectivement aux équations

$$\mu_3 S_{23} + \mu_4 S_{24} = 0, \quad \mu_2 S_{32} + \mu_4 S_{34} = 0, \quad \mu_2 S_{42} + \mu_3 S_{43} = 0 ;$$

elles sont donc situées sur la droite b'_1 qui a pour équation dans le plan $A_2 A_3 A_4$

$$\frac{\mu_2}{S_{34}} + \frac{\mu_3}{S_{42}} + \frac{\mu_4}{S_{23}} = 0.$$

On en conclut que chacune des faces de T contient une droite s'appuyant sur b_1, b_2, b_3, b_4 ; par suite, les huit droites b_i et b_i' appartiennent à une même quadrique.

L'équation de cette quadrique est évidemment symétrique en μ_1, μ_2, μ_3, μ_4. Or, pour $\mu_1 = 0$, elle se réduit à l'équation du couple $b_1 b'_1$, qui est

$$(\mu_2 S_{12} + \mu_3 S_{13} + \mu_4 S_{14})(\mu_2 S_{23} S_{24} + \mu_3 S_{32} S_{34} + \mu_4 S_{42} S_{43}) = 0 ;$$

d'où l'on conclut les termes en μ_2^2 et $\mu_2 \mu_3$ et par suite la forme (6) de l'équation.

(¹) D'après un théorème connu, cette proposition peut se conclure de ce que les coefficients des équations des plans (9) à (12) sont les éléments d'un déterminant symétrique.

4. Examinons des positions particulières de M.

Si l'on prend pour M le sommet A_1, on a $S_{12} = S_{13} = S_{14} = 0$, et les équations (6) et (2) deviennent indéterminées ; les équations (3), (4), (5) qui se réduisent à deux distinctes, représentent les complexes spéciaux qui ont pour axes les intersections b_2, b_3, b_4 des plans α_2, α_3, α_4 avec les plans perpendiculaires en A_1 aux arêtes A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4. Ces droites passent par A_1 et sont situées dans un plan π perpendiculaire en A_1 à l'intersection des trois plans-hauteurs du trièdre A_1 de T. On en conclut que les droites t forment avec T des octogones dont les sphères diagonales passent par A_1, et les droites du plan π. L'équation (8) représente encore la droite du plan α_1, qui s'appuie sur b_2, b_3, b_4.

Prenons pour M l'un des points I_1, I'_1 communs aux trois sphères (A_2A_3), (A_3A_4), (A_4A_2), de sorte que $S_{23} = S_{34} = S_{42} = 0$; l'équation (6) se réduira à $p_1^2 = 0$. La droite t doit donc appartenir au plan α_1. La même conclusion se déduit aussi des équations (2) à (5) qui donnent maintenant $r_{12} = r_{13} = r_{13} = 0$, d'où $p_1 = q_1 = 0$. Ce résultat a déjà été établi au § 2.

5. Dans l'équation (6), considérons p_1, p_2, p_3, p_4 comme les coordonnées barycentriques d'un point fixe P, et x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point variable M. Nous voyons alors que : *Si une droite* t *tourne autour d'un point fixe, les points sphériques de l'octogone* Tt *engendrent une surface du sixième ordre dont le cercle imaginaire à l'infini est une ligne triple.*

Si le point P est pris dans le plan α_1, le lieu des points sphériques est la sphère représentée par l'équation (7) et une surface du quatrième ordre représentée par l'équation (8). La sphère (7) qui a pour diamètre la droite A_1P, se rapporte aux rayons de la gerbe P. La surface (8) provient des droites t menées par l dans le plan $A_2A_3A_4$; elle est le lieu des circonférences désignées au n° 2 par la lettre δ_1 ; c'est une anallagmatique qui a pour pôle l'orthocentre du triangle $A_2A_3A_4$.

6. Cherchons le lieu des points sphériques des octogones qui correspondent aux rayons d'un faisceau.

Soient f_{ik}, g_{ik} les coordonnées radiales de deux rayons fixes t_1, t_2 du faisceau ; celles d'un rayon quelconque t de ce faisceau sont de la forme $\alpha f_{ik} + \beta g_{ik}$ où α, β sont des paramètres variables. Remplaçons, dans les équations (2) à (5), les r_{ik} par $\alpha f_{ik} + g_{ik}$:

les sphères diagonales de l'octogone Tt auront pour équation

$$\alpha U_1 + \beta V_1 = 0, \quad \alpha U_2 + \beta V_2 = 0, \quad \alpha U_3 + \beta V_3 = 0, \quad \alpha U_4 + \beta V_4 = 0,$$

si celles des octogones Tt_1 et Tt_2 ont respectivement pour équation

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = 0 \quad \text{et} \quad V_1 = 0, \ldots$$

Le lieu cherché est donc représenté par

$$\left\| \begin{matrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

C'est une sextique gauche circulaire, qui a été étudiée par M. Stuyvaert (COMPTES RENDUS DE PARIS, CXLVI, 1904, pp. 230-234).

Soient f_{ik}, g_{ik}, h_{ik} les coordonnées radiales de trois droites t_1, t_2, t_3 formant un triangle dans un plan π. Une droite quelconque du même plan a pour coordonnées $\alpha f_{ik} + \beta g_{ik} + \gamma h_{ik}$ où α, β, γ sont des paramètres variables. Les sphères diagonales de l'octogone Tt ont des équations de la forme

$$\alpha U_1 + \beta V_1 + \gamma W_2 = 0, \quad \alpha U_2 + \beta V_2 + \gamma W_2 = 0, \ldots$$

si celles des octogones Tt_1, Tt_2, Tt_3 sont représentées respectivement par

$$U_1 = 0, \ldots; \quad V_1 = 0, \ldots; \quad W_1 = 0, \ldots$$

Il en résulte que le lieu des points M, M' relatifs aux droites du plan π a pour équation

$$\left| \begin{matrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{matrix} \right| = 0; \tag{13}$$

c'est donc une surface du sixième ordre dont le cercle imaginaire à l'infini est une ligne triple.

Si f_{ik}, g_{ik}, h_{ik} sont les coordonnées radiales de trois rayons fixes (non coplanaires) d'une gerbe, celles d'un rayon quelconque t de la même gerbe sont de la forme $\alpha f_{ik} + \beta g_{ik} + \gamma h_{ik}$, et le lieu des points sphériques des octogones Tt est encore représenté par l'équation (13). Ce lieu a déjà été établi ci-dessus (**5**) au moyen de l'équation (6).

7. On a vu qu'il existe une infinité de droites t telles que les sphères diagonales des octogones Tt passant par un point donné M. Les sommets B_1, B_2, B_3, B_4 de ces octogones se correspondent dans des ponctuelles projectives ; par suite, les centres C_1, C_2, C_3, C_4 des sphères diagonales engendrent également des ponctuelles projectives qui ont pour supports quatre droites c_1, c_2, c_3, c_4 parallèles aux droites b_1, b_2, b_3, b_4. Donc, d'après un théorème connu, le plan médian est constamment osculateur à une cubique gauche, et il a pour enveloppe une développable du quatrième ordre.

Cherchons l'équation du plan γ. Les coordonnées barycentriques absolues des points A_1, B_1 étant

$$(1, 0, 0, 0), \quad \left(0, \frac{r_{12}}{\rho_1}. \frac{r_{13}}{\rho_1}, \frac{r_{14}}{\rho_1}\right),$$

où, pour abréger, on a posé $\rho_i = r_{i1} + r_{i2} + r_{i3} + r_{i4}$, on peut prendre pour coordonnées de C_1 les quantités ρ_1, r_{12}, r_{13}, r_{14}. Par suite, le déterminant des coordonnées des quatre points C_1, C_2, C_3, C_4 est

$$\begin{vmatrix} \rho_1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & \rho_2 & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & \rho_3 & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & \rho_4 \end{vmatrix} ; \tag{14}$$

il diffère d'un déterminant symétrique gauche en ce que chaque élément diagonal est la somme des autres éléments de la même ligne. Un tel déterminant est nul ; car si l'on ajoute à une ligne les trois autres lignes on obtient une ligne de zéros. Il résulte de là que les quatre centres sont situés dans un même plan γ.

Les mineurs de (14) jouissent d'une propriété remarquable : en les appelant R_{11}, R_{12}, ..., on a

$$R_{11} = R_{21} = R_{31} = R_{41}, \quad R_{22} = R_{12} = R_{32} = R_{42}, \ldots$$

L'équation du plan γ est donc

$$R_{11}\mu_1 + R_{22}\mu_2 + R_{33}\mu_3 + R_{44}\mu_4 = 0,$$

où

$$R_{11} = \rho_2\rho_3\rho_4 + \rho_2 r^2_{34} + \rho_3 r^2_{42} + \rho_4 r^2_{23}, \ldots$$

8. Les résultats précédents exigent des modifications lorsque les hauteurs A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4 du tétraèdre T se coupent en un même point H. Comme on a alors

$$HA_1 \,.\, HH_1 = HA_2 \,.\, HH_2 = HA_3 \,.\, HH_3 = HA_4 \,.\, HH_4 = R^2,$$

R^2 étant une constante positive ou négative, T est autopolaire par rapport à une sphère de centre H et de rayon R. Les sphères (A_1B_1), (A_2B_2), (A_3B_3), (A_4B_4) dont A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4 sont des cordes, ont même puissance R^2 par rapport à H ; par suite, leur corde commune MM′ passe par H, et l'on a

$$HM \,.\, HM' = R^2\,;$$

donc si l'on donne le point M, le point M′ et le plan γ sont déterminés. Soit E_1 le point de rencontre de la droite A_1M avec le plan α_1. La droite b_1, perpendiculaire à A_1M, est aussi perpendiculaire à la projection H_1E_1 de A_1M, par suite également au plan A_1HE et à la droite HM de ce plan. Il résulte de là que les quatre droites b_1, b_2, b_3, b_4 sont parallèles à un même plan, et les droites t qui correspondent au point M engendrent un paraboloïde hyperbolique. Les centres C_1, C_2, C_3, C_4 des sphères diagonales se meuvent sur quatre droites c_1, c_2, c_3, c_4 parallèles à b_1, b_2, b_3, b_4 et, par conséquent, perpendiculaires à HM ; ces droites c sont donc maintenant situées dans le plan γ.

Il est intéressant de vérifier ces résultats par le calcul. A cet effet, plaçons l'origine des coordonnées cartésiennes en H, et posons

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \equiv U, \quad xx_i + yy_i + zz_i - R^2 \equiv \lambda_i,$$

$$x_ix_k + y_iy_k + z_iz_k - R^2 \equiv \lambda_{ik}\,;$$

$U = 0$ est l'équation de la sphère conjuguée à T, $\lambda_i = 0$ représente la face α_i, et les quantités λ_{ik} sont nulles. On a maintenant

$$S_{ik} \equiv U - \lambda_i - \lambda_k,$$

et les équations (2) à (5) prennent la forme

$$U\rho_1 = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2 r_{12} + \lambda_3 r_{13} + \lambda_4 r_{14},$$

$$U\rho_2 = \lambda_1 r_{21} + \lambda_2\rho_2 + \lambda_3 r_{23} + \lambda_4 r_{24},$$

$$U\rho_3 = \lambda_1 r_{31} + \lambda_2 r_{32} + \lambda_3\rho_3 + \lambda_4 r_{34},$$

$$U\rho_4 = \lambda_1 r_{41} + \lambda_2 r_{42} + \lambda_3 r_{43} + \lambda_4\rho_4.$$

En égalant leurs seconds membres à zéro, on a les équations des plans radicaux des sphères diagonales combinées avec la sphère conjuguée à T; la somme de ces équations donnant identiquement $0 = 0$, ces plans passent par un même point qui est défini par les égalités

$$\frac{\lambda_1}{R_{11}} = \frac{\lambda_2}{R_{22}} = \frac{\lambda_3}{R_{33}} = \frac{\lambda_4}{R_{44}}.$$

Si l'on remplace les S_{ik} par les valeurs (15), les équations (9) à (12) deviennent

$$(U - \lambda_1)(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) - (\lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 + \lambda_4\mu_4) = 0, \qquad (15)$$

$$(U - \lambda_2)(\mu_3 + \mu_4 + \mu_1) - (\lambda_3\mu_3 + \lambda_4\mu_4 + \lambda_1\mu_1) = 0, \text{ etc.}$$

Rapportons les quantités U, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 à un point donné $M(x, y, z)$; les équations que l'on vient d'écrire représentent alors, en coordonnées barycentriques, les droites b_1, b_2, b_3, b_4. L'équation (15), par exemple, si μ_2, μ_3, μ_4 sont les coordonnées d'un point par rapport au triangle $A_2A_3A_4$, indique que la droite b_1 est parallèle à la droite $\lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 + \lambda_4\mu_4 = 0$; il résulte de là que les quatre droites b_1, b_2, b_3, b_4 sont parallèles au plan $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 + \lambda_4\mu_4 = 0$.

Le problème traité ici comporte encore d'autres développements; nous pourrons y revenir dans une prochaine communication.

M. Mansion fait la communication suivante intitulée : *Limites nouvelles de la fonction gamma donnée par la formule de Stirling.*

La méthode de démonstration de la formule de Stirling due à Rouché (Comptes rendus, 1890, t. CX, pp. 513-515) permet d'enfermer très simplement la fonction gamma entre deux limites plus rapprochées que celles que l'on donne d'ordinaire. Posons

$$\varphi(n) = \frac{e^n \Gamma(n+1)}{n^{n+\frac{1}{2}}}, \quad \psi(n) = \log \varphi(n) - \log \varphi(n+1).$$

On trouve sans peine, comme Rouché l'a remarqué,

$$\psi(n) = \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{7}\frac{1}{(2n+1)^6} + \text{etc.} \qquad (A)$$

Il en résulte

$$\left.\begin{aligned} \psi(n) &> \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} > \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right], \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

$$\begin{aligned} \psi(n) &< \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{(2n+1)^6} + \text{etc.}\right] \\ &= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]. \end{aligned}$$

On déduit de ces relations, en y introduisant la valeur de ψ en φ,

$$\log \varphi(n) - \frac{1}{6(2n+1)} > \log \varphi(n+1) - \frac{1}{6(2n+3)} > \text{etc.};$$

$$\log \varphi(n) - \frac{1}{12n} < \log \varphi(n+1) - \frac{1}{12(n+1)} < \text{etc.}$$

Par suite,

$$\varphi(n) e^{-\frac{1}{6(2n+1)}}, \qquad \varphi(n) e^{-\frac{1}{12n}}$$

sont des fonctions, la première décroissante, la seconde croissante quand n croît, et ayant, pour $n = \infty$, une limite commune que l'on sait être $\sqrt{2\pi}$. On a donc, en remplaçant $\varphi(n)$ par sa définition,

$$\sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n + \frac{1}{12n+6}} < \Gamma(n+1) < \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n + \frac{1}{12n}},$$

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n + \frac{1}{12n + 6\theta}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

C'est l'inégalité (B) et ses conséquences qui sont nouvelles.

Dans un grand nombre de cas, on peut déduire de ce qui précède, pour l'expression

$$\frac{\Gamma(m_1+1)\,\Gamma(m_2+1)\ldots\Gamma(m_k+1)}{\Gamma(n_1+1)\,\Gamma(n_2+1)\ldots\Gamma(n_n+1)},$$

la valeur approchée

$$\frac{\sqrt{2\pi m_1}\;m_1^{m_1}e^{-m_1}\times\cdots\times\sqrt{2\pi m_k}\;m_k^{m_k}e^{-m_k}}{\sqrt{2\pi n_1}\;n_1^{n_1}e^{-n_1}\times\cdots\times\sqrt{2\pi n_l}\;n_l^{n_l}e^{-n_l}}\,e^{r},$$

où θ étant toujours compris entre 0 et 1, on a

$$r=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2m_1+\theta}+\cdots+\frac{1}{2m_k+\theta}-\frac{1}{2n_1+\theta}-\cdots-\frac{1}{2n_l+\theta}\right],$$

Pour cela, on ajoute entre elles toutes les égalités analogues à (A) et relatives à $m_1, \ldots, m_k$; on en retranche la somme des égalités semblables relatives à $n_1, \ldots, n_k$. On raisonne sur le résultat obtenu comme on l'a fait sur $\psi(n)$.

Le mode de démonstration que nous venons d'esquisser ne diffère pas essentiellement de celui que nous avons exposé dans les Annales, 1908, t. XXXII, 1^re^ partie, p. 65, mais il repose sur des calculs plus simples.

M. Lecat expose les résultats d'une étude faite par lui *Sur la multiplication des déterminants permanents*. Ce mémoire sera inséré dans les Annales.

M. de la Vallée Poussin fait la communication suivante *Sur la transformation d'une intégrale multiple en une intégrale simple*,

Dans un important Mémoire publié tout récemment *Sur l'intégration des fonctions discontinues* (¹) M. Lebesgue a montré que la courbe de M. Hilbert (²) permettait d'établir une certaine correspondance entre les intégrales multiples et les intégrales simples (n° 32 du Mémoire).

(¹) Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 1910.

(²) Math. Annal. Bd. XXXVIII. Traité d'analyse de M. Picard, t. I (2^e^ édit.).

On peut aller un peu plus loin et remarquer que la courbe de M. Hilbert fournit un procédé général de transformation d'une intégrale multiple dans une intégrale simple.

Supposons pour simplifier que l'on considère une intégrale double dans un carré C. Soient x, y les deux variables, variant chacune entre 0 et 1. Soit Γ la courbe de M. Hilbert, ayant pour représentation paramétrique

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \quad g = \psi(t)$$

et couvrant tout C quand t varie de 0 à 1.

Soit $f(x, g)$ une fonction sommable au sens de M. Lebesgue dans le carré C, on aura l'identité

$$\iint_C f(x, y)\, dx\, dg = \int_0^1 f(\varphi, \psi)\, dt.$$

Cette formule se démontre aisément en observant que la transformation (1) fait correspondre aux ensembles superficiels mesurables x, y des ensembles linéaires t et que les mesures de deux ensembles correspondants s'expriment par le même nombre.

On vérifie d'abord cette propriété dans un cas particulier. Si l'on décompose le carré C en carrés élémentaires de mesure $\frac{1}{9}$ par des parallèles aux axes, chaque carré élémentaire correspond à un intervalle de même mesure sur l'axe des t, par définition même de la courbe. De ce cas particulier, on passe facilement au cas général.

M, Mansion observe, à propos de la communication de M. de la Vallée Poussin, que l'on a attribué à Riemann et à Darboux, au sujet des limites de sommes, des résultats qui sont en réalité dus à Cauchy et qui figurent dans la *Statique* de Moigno.

M. P. Mansion fait la communication suivante *Sur la valeur moyenne et sur la valeur maxima de l'erreur relative à une inconnue dans la méthode des moindres carrés.*

1. *Préliminaires algébriques.* Considérons cinq équations à trois inconnues

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \ \ldots, \quad a_5x + b_5y + c_5z = d_3,$$

incompatibles entre elles quand on les prend quatre à quatre, mais donnant des valeurs déterminées (x_{123}, x_{124}, ..., x_{345} ; y_{123}, ... ; z_{123}, ...) quand on les associe trois à trois.

Posons, suivant l'usage,

$$aa = a_1^2 + \cdots + a_5^2, \quad ab = a_1b_1 + \cdots + a_5b_5,$$

et de même, dans tous les cas où nous rencontrons des sommes de carrés ou de produits analogues.

Les équations normales données par la méthode des moindres carrés sont

$$\begin{aligned}(aa)\mathrm{X} + (ab)\mathrm{Y} + (ac)\mathrm{Z} &= ad,\\ (ab)\mathrm{X} + (bb)\mathrm{Y} + (bc)\mathrm{Z} &= bd,\\ (ac)\mathrm{X} + (bc)\mathrm{Y} + (cc)\mathrm{Z} &= cd.\end{aligned}$$

On a, en employant les notations abrégées habituelles pour les déterminants que l'on rencontre dans la méthode des moindres carrés,

$$\mathrm{X} = \frac{(ad,\ bb,\ cc)}{(aa,\ bb,\ cc)}.$$

On aura ensuite

$$\mathrm{X} = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 + \lambda_4 d_4 + \lambda_5 d_5$$

où

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (a_1,\ bb,\ cc) : (aa,\ bb,\ cc) = a_1\mathrm{A} + b_1\mathrm{B} + c_1\mathrm{C},\\ \lambda_2 &= (a_2,\ bb,\ cc) : (aa,\ bb,\ cc) = a_2\mathrm{A} + b_2\mathrm{B} + c_2\mathrm{C},\\ \lambda_3 &= a_3\mathrm{A} + b_3\mathrm{A} + c_3\mathrm{C},\\ \lambda_4 &= a_4\mathrm{A} + b_4\mathrm{B} + c_4\mathrm{C},\\ \lambda_5 &= a_5\mathrm{A} + b_5\mathrm{B} + c_5\mathrm{C},\end{aligned}$$

si l'on pose

$$\mathrm{A} = (bb,\ cc) : (aa,\ bb,\ cc), \quad \mathrm{B} = \text{etc.}, \quad \mathrm{C} = \text{etc.}$$

On a encore

$$\begin{aligned}\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_5 a_5 &= (aa,\ bb,\ cc) : (aa,\ bb,\ cc) = 1,\\ \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_5 b_5 &= (bb,\ bb,\ cc) : (aa,\ bb,\ cc) = 0,\\ \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_5 c_5 &= (cc,\ bb,\ cc) : (aa,\ bb,\ cc) = 0.\end{aligned}$$

A cause de ces relations, si l'on multiplie les valeurs de λ_1, λ_2,

..., λ_5 respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$ et si l'on ajoute les produits, il vient

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_5^2 = A = (bb, cc) : (aa, bb, cc).$$

2. *Valeur moyenne de l'erreur relative à l'inconnue X.* Appelons $X + \Delta X$, $Y + \Delta Y$, $Z + \Delta Z$, les valeurs des inconnues qui correspondraient aux valeurs exactes des paramètres $a_1, \ldots, a_5$, $b_1, \ldots, b_5$, $c_1, \ldots, c_5$, $d_1, \ldots, d_5$, si elles étaient connues. Posons

$$a_1(X + \Delta X) + b_1(Y + \Delta Y) + c_1(Z + \Delta Z) = d_1 + E_1,$$
$$a_2(X + \Delta X) + b_2(Y + \Delta Y) + c_2(Z + \Delta Z) = d_2 + E_2, \text{ etc.}$$

Dans une note antérieure (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. XXXIV, 1^re^ partie, pp. 174-178), nous avons montré que

$$\Delta X = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_5 E_5.$$

Par un raisonnement analogue à celui qui a donné à Gauss la valeur de EE et qui est rapporté dans cette note, on prouve que la *valeur moyenne* de $(\Delta X)^2$ est

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_5^2)\,\frac{EE}{5} = A\,\frac{EE}{5},$$

c'est-à-dire, d'après les valeurs de A et de EE,

$$\frac{1}{5-3}\;\frac{(bb, cc)\,(aa, bb, cc, dd)}{(aa, bb, cc)^2}$$

et de même dans le cas de n équations linéaires à k inconnues.

3. *Valeur maxima de l'erreur relative à l'inconnue X.* Il semble difficile de déterminer directement les limites entre lesquelles sont comprises les erreurs E_1, E_2, etc., quand l'on connaît les limites de paramètres $a_1, a_2, \ldots, d_5$, parce que ces erreurs dépendent non seulement de ces paramètres, mais aussi des valeurs $X + \Delta X$, $Y + \Delta Y$, $Z + \Delta Z$ des inconnues.

On peut procéder autrement. On a

$$x_{123} = (d_1 b_2 c_3) : (a_1 b_2 c_3).$$

Connaissant les erreurs maxima positives ou négatives que l'on peut commettre sur les paramètres qui entrent dans la valeur de

x_{123}, on pourra enfermer x_{123} entre deux limites certaines m_{123}, M_{123}. Il en est de même pour toutes les valeurs analogues x_{124}, ..., x_{345}. Soient m_x, M_x respectivement la plus petite et la plus grande des limites analogues à m_{123}, M_{123}. D'après un théorème de Van Geer, X est compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs $x_{123}, x_{124}, \ldots, x_{345}$. Par suite, on aura certainement $m_x < X < M_x$.

Inutile de faire remarquer que les calculs nécessaires à la détermination de m_x et M_x sont extrêmement longs, même pour un petit nombre d'inconnues et d'équations.

Le R, P. Bosmans expose quelques remarques *Sur l'arithmétique de Simon Stévin.*

Le mémoire du R. P. Bosmans sera joint à celui dont la section a antérieurement voté l'insertion dans les Annales.

Seconde Section

Mardi 25 avril 1911. — M. Van der Mensbrugghe fait une communication *Sur une source d'approvisionnement de sel marin dans les eaux de mer.*

Nous savons aujourd'hui que l'eau de mer contient du chlorure de sodium ou sel marin ; on croyait autrefois que le rôle essentiel du sel était de garantir la vie des légions d'animaux marins jusqu'au fond des abîmes ; mais cette explication est peu admissible, car les grands mouvements de la mer, produits par les courants opposés d'eau froide dans le voisinage du fond et d'eau chaude dans les couches supérieures, empêchent absolument toute infection graduelle. Comme je l'ai avancé dans un travail récent sur les propriétés providentielles de l'eau (¹), l'effet incontestable de la solution du sel dans ce liquide consiste en ce que l'évaporation est rendue moins rapide que celle de l'eau pure : conséquence très importante, car, si la mer n'était pas salée, les masses de vapeur qui montent incessamment dans l'air, et par suite les condensations qu'elles subissent dans l'atmosphère, seraient beau-

---

(¹) Voir Revue des Questions scientifiques, livraison de juillet 1911.

coup plus considérables, ce qui rendrait les inondations à la fois plus fréquentes et plus redoutables.

Pour me faire une idée de la différence entre l'eau pure et l'eau salée à 4 % comme l'eau de mer, au point de vue de la rapidité de l'évaporation, j'ai employé deux cristallisoirs ayant à peu près même diamètre (8,8 centimètres) : la surface libre exposée à l'air était donc de 61 centimètres carrés ; or la température moyenne étant de 8° C., j'ai constaté que l'eau pure perdait 15 gr. 52 dans le même temps que l'eau salée avait perdu 14 gr. 97, c'est-à-dire 0 gr. 55 de moins. D'après cela, un décimètre carré aurait perdu à fort peu près 900 milligr. d'eau de plus que l'eau salée pour la même surface exposée. Si l'on réfléchit que l'Océan Atlantique, par exemple, a une température moyenne de 20° C. au moins et une surface énorme sur son parcours depuis le golfe de Guinée jusqu'au banc de Terre-Neuve, on peut avancer que les condensations atmosphériques qui s'effectuent en réalité sont incomparament moindres que celles dues à l'évaporation des eaux de mer supposées pures.

Mais d'où proviennent les matières salines de l'eau de mer ? Faut-il croire qu'elles ont été déposées dans l'Océan des premiers âges, alors qu'il est descendu au-dessous de la croûte terrestre suffisamment refroidie ? Peut-être ; ce qui est certain, c'est que les sels sont amenés continuellement par les eaux, tant souterraines que superficielles, qui découlent des roches ; car tous les fleuves qui se jettent dans la mer contiennent des parties salines, comme l'a soutenu depuis longtemps le commandant Maury ; en effet, les eaux pluviales qui s'infiltrent dans les roches bordant l'Océan ont la propriété de dissoudre des quantités parfois notables de substances solides, et celles-ci sont ensuite transportées vers la mer. Cela est si vrai que les lacs qui n'ont pas de communication avec l'Océan sont exclusivement des lacs salés, car ils ne sont soumis qu'à l'évaporation et perdent ainsi des quantités de liquide très peu chargées de sels. Il suffirait de creuser des canaux communiquant avec la mer pour voir diminuer très notablement la proportion de matières salines.

D'après ces observations, la mer elle-même devrait devenir de plus en plus riche en sel, mais l'armée innombrable des oiseaux marins enlève sans cesse des matières solides et salées, et les rend à la terre sous la forme de guano. De même les varechs, qui sont amenés aux rivages en quantités énormes, sont très riches en parties constitutives salines; de même encore les poissons, qui nous servent de nourriture par milliards. Ceux qui contribuent également à soustraire un excès de substances terreuses à l'eau, ce sont les mollusques, les polypes et les animalcules microscopiques, qui sont sans interruption à l'œuvre pour s'emparer des parties calcaires de la mer.

Mais n'y a-t-il pas une autre source presque permanente et capable d'entretenir la provision habituelle du sel marin qui prédomine partout dans les grands océans ? C'est ce que nous allons examiner brièvement, bien que les géographes n'attribuent aucune importance à ce genre d'approvisionnement. Les physiciens ont démontré depuis longtemps que le spectroscope accuse en tous lieux l'existence de parcelles impalpables de chlorure de sodium : le fait est annoncé par une raie jaune caractéristique et bien connue des spectroscopistes. Et d'où proviennent ces traces salines ? Si je ne me trompe, elles sont dues aux gouttelettes très fines qui se séparent des vagues de la mer et qui contiennent en solution de fort minimes portions de sel marin. Mais à peine soulevées dans l'atmosphère, ces gouttelettes microscopiques s'évaporent très rapidement en laissant libres les portions solides qui s'y étaient dissoutes ; à l'appui de cette assertion, je puis citer un fait dont on est témoin chaque fois qu'on observe le jet de vapeur humide qui s'échappe de la cheminée d'une locomotive en marche ; le jet en question contient une infinité de sphérules extrêmement petites et qu'on voit disparaître au bout de quelques secondes. En arrivant à l'air libre, la vapeur, dont la température était élevée, se refroidit subitement et se condense en une infinité de petits globules ; ceux-ci s'évaporent avec une vitesse d'autant plus grande que leur volume est devenu moindre et bientôt ils disparaissent entièrement. Ce phénomène forme un curieux contraste avec la permanence d'un brouillard épais dont toutes les particules demeurent à l'état liquide, même quand l'air ambiant est à une température très basse et n'est pas en mouvement.

Si nous revenons maintenant aux minimes sphérules détachées de la mer et chargées des particules de sel, nous pouvons admettre que, transportées par les vents, ces sphérules perdent rapidement leurs enveloppes d'humidité, et abandonnent dans l'atmosphère les parcelles microscopiques de sel marin ; mais ces dernières parviennent dans des régions où elles sont plongées dans de l'air froid et humide ; dans ces conditions la vapeur d'abord invisible se dépose dans les cavités microscopiques de toutes les poussières emportées par les vents ; ainsi se forment les nuages qui, après avoir flotté plus ou moins longtemps dans les hauteurs, se résolvent enfin en pluie, en neige ou en grêle, et, en retombant dans les immenses bassins des mers, leur restituent une quantité de sel marin qui contribue à empêcher l'évaporation trop rapide, et par conséquent aussi les fréquentes pluies torrentielles et les inondations si désastreuses.

La section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus :

Président : M. A. de Hemptinne,
Vice-Présidents : le R. P. Schaffers,
M. le chanoine De Muynck,
Secrétaire : le R. P. Lucas, S. J.

M. Félix Leconte présente un *aréomètre sans ménisque* qui peut rendre des services dans les cas où la densité doit être mesurée avec une grande précision.

Pour le moût de bière par exemple le ménisque cause une imprécision de un dixième de degré, ce qui peut avoir une importance.

L'appareil est basé sur la propriété de l'acier de ne pas donner de ménisque avec les liquides dans lesquels domine l'eau. Dans l'aréomètre présenté, la tige ordinaire en verre a été coupée et remplacée par une lame d'acier méplate. Le liquide forme sur la lame une ligne absolument droite, et qui se trouve strictement dans le plan horizontal de sa surface.

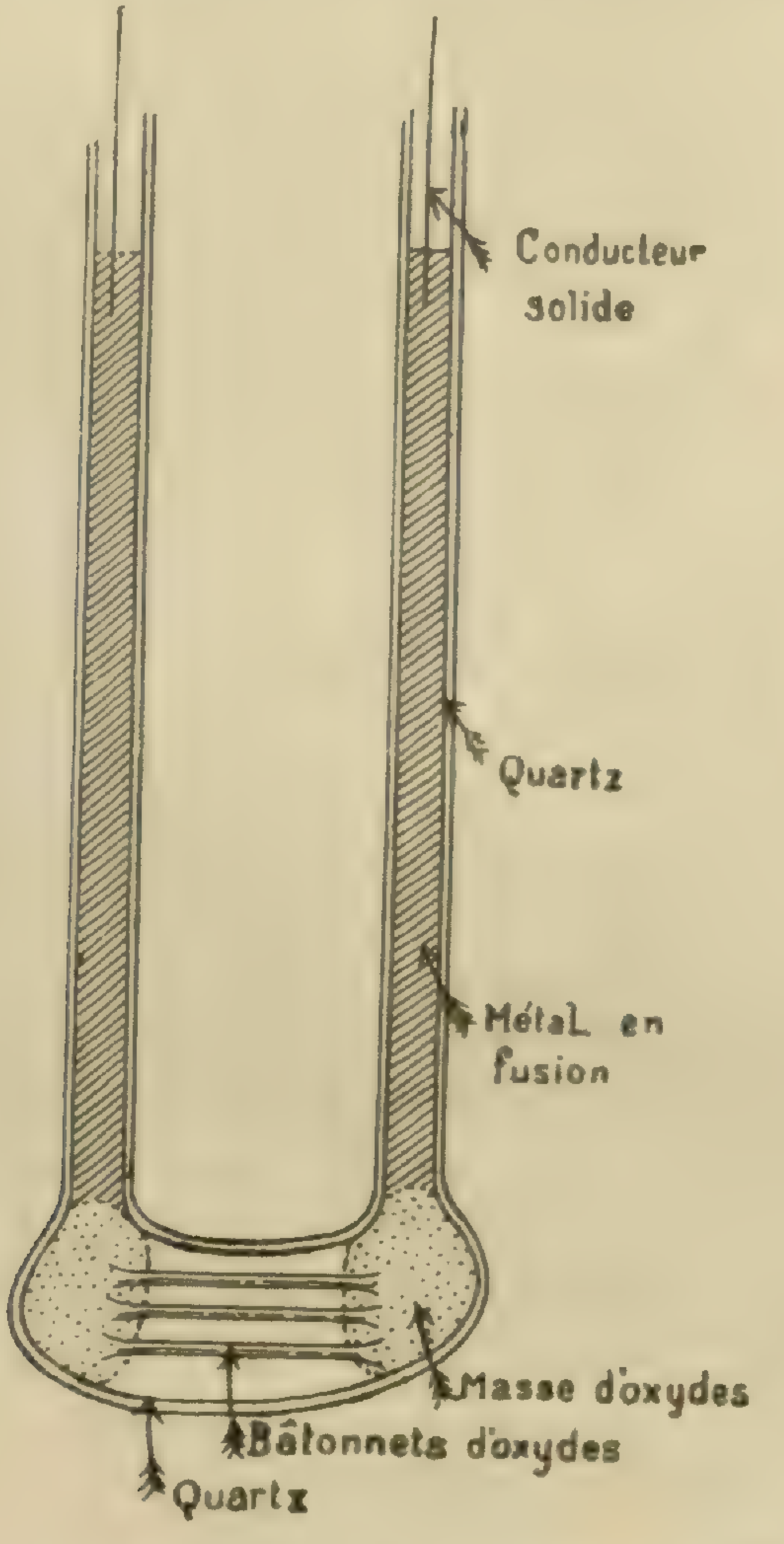
Si on emploie l'acier bleui, et que l'on prenne la précaution de nettoyer la lame après chaque emploi, la rouille n'arrive pas à se produire.

L'appareil présenté est construit depuis plus de six mois et a maintes fois servi. Il ne présente pas trace de rouille.

Les chiffres peuvent être inscrits par gravure chimique.

On peut essayer de s'affranchir de l'obligation de nettoyer la tige en la couvrant d'une légère couche galvanoplastique de cuivre, puis d'or, d'argent ou de nickel. La question est de savoir si l'attraction moléculaire de l'acier, en supposant qu'on lui donne une masse suffisante, sera prédominante, et si le ménisque ne se formera pas sur les couches d'autres métaux adhérents. M. Leconte n'a pas fait l'essai.

M. F. Leconte parle ensuite d'un *Pyromètre pour aciers*. Les métallurgistes ont besoin de vérifier la température des aciers en fusion, et nous avons pu faire quelques essais, malheureusement incomplets, avec l'appareil ci-dessous décrit. Il serait intéressant, nous semble-t-il, d'expérimenter cette disposition.


Conducteur solide
Quartz
Métal en fusion
Masse d'oxydes
Bâtonnets d'oxydes
Quartz

Dans une ampoule en quartz, on dispose en parallèle une série de bâtonnets d'oxyde de zirconium et autres terres dites rares, analogues aux bâtonnets des lampes Nernst.

On termine par des masselottes de même matière bouchant l'ampoule aux deux bouts. Deux tubulures en quartz prolongent l'ampoule et contiennent un métal, cuivre, argent, ou alliage à point de fusion inférieur à la température à observer. Ce métal fondu sert de conducteur jusqu'au point du pyromètre à protéger par circulation d'eau, et les conducteurs se prolongent en fils de platine ou autres suivant la température.

La figure ci-contre explique l'appareil. — Les dispositions extérieures sont analogues à celles des autres appareils — pile galvanomètre — pont de Wheatstone.

La grande variation de résistance des oxydes aux hautes températures nous fait espérer que l'appareil pourrait rendre des services.

M. Vandevyver entretient la section des *Diagrammes du psychromètre et du pluviomètre.*

Psychromètre. — Dans tous les observatoires météorologiques bien outillés, on possède à l'heure actuelle un psychromètre enregistreur, dont les données peuvent, dans certains cas, suppléer à celles de l'hygromètre.

La maison *J. Richard*, de Paris, a construit un type d'instrument devenu pour ainsi dire classique. Il se compose de deux thermomètres identiques, enregistrant leurs variations sur cylindre à mouvement de huit jours ; l'un des tubes thermométriques est tenu constamment mouillé, au moyen d'une mousseline prolongée par une mèche de coton qui plonge dans un petit récipient contenant de l'eau.

Le thermomètre humide indique donc une température t' inférieure à celle du thermomètre sec t ; les écarts $t - t'$ sont d'autant plus grands que l'évaporation est plus rapide. Connaissant $t - t'$ et t', les tables psychrométriques donnent sans peine la valeur de l'humidité relative.

Le thermomètre sec est généralement réglé de telle façon que ses indications soient supérieures de 10° C. à celles du thermomètre humide, et dans les opérations l'on tient évidemment compte de ce décalage.

Lundi
Mardi
Mercredi
Jeudi
Vendredi
Samedi
Dimanche 12 Avr.
XII
M
15
10
5
0
5
10
zéro
zéro
THERMOMÈTRE PSYCHROMÈTRE
Lundi
Mardi
Mercredi
Jeudi
Vendredi
Samedi
Dimanche
zéro
THERMOMÈTRE PSYCHROMÈTRE

Ceux qui ont eu à dépouiller les graphiques de cet instrument savent combien cette opération est fastidieuse. La plupart du temps, et à première vue, les deux courbes thermométriques semblent parallèles ; ce n'est que le double décimètre ou le compas à la main que l'on peut trouver les différences $t - t'$.

Ces graphiques ne parlent pas à l'esprit, et si une singularité ou une anomalie quelconque s'y présente, elle a toutes les chances d'échapper, même à l'œil d'un observateur vigilant.

Voici un artifice qui comble cette lacune ; nous l'employons depuis quelque temps et il nous donne entière satisfaction, Au lieu de régler les appareils à 10° d'écart, nous réduisons au contraire cet écart au minimum possible, soit quatre dixièmes de degré environ ; cet écart est suffisant pour éviter l'empâtement réciproque des courbes et empêcher que l'encre des deux plumes ne vienne s'étaler en un immense pâté sur le graphique. Un petit taquet, fixé à l'une des plumes, limite et maintient éventuellement la constance de cet écart.

Lorsque les deux thermomètres sont secs, ou que l'évaporation est nulle, les deux plumes donnent des traits équidistants et parallèles dans toutes leurs sinuosités ; mouille-t-on le thermomètre inférieur et l'évaporation se fait-elle sentir, immédiatement la courbe du thermomètre mouillé s'écarte de la courbe supérieure, et le très mince ruban laissé entre les deux plumes s'élargit ou se rétrécit, permettant ainsi de juger instantanément de l'allure générale du phénomène.

La détermination de $t - t'$ n'est plus qu'un jeu, surtout si l'on a pris soin de régler l'appareil de façon que les indications du thermomètre humide correspondent réellement aux annotations inscrites sur le diagramme ; on évite ainsi toute transposition de chiffres, et l'usage de tables psychrométriques est rendu très rapide et très commode. — On réalise de la sorte un gain de temps très sérieux et on a encore l'immense avantage de ne laisser échapper aucun fait singulier et de nature à intéresser parfois le météorologiste.

Pour convaincre les membres de la section, nous présentons ici (fig.) deux graphiques, le premier obtenu d'après l'ancien système et le second donné par le nouveau procédé. Le premier diagramme reproduit les courbes du second, espacées de 10°, comme elles auraient été obtenues, le même jour, par l'ancien procédé.

Pluviographe. — Dans l'*Annuaire de la Station de Géographie Mathématique* (1908) (¹) nous avons décrit le pluviographe employé à Gand. En terminant la notice, nous disions que la chaleur de la lampe électrique allumée à l'intérieur de l'appareil suffisait, en cas de neige, à provoquer la fusion de celle-ci ; de cette façon, nous évitions l'entraînement de la neige par la rotation du plateau, entraînement qui était de nature à fausser les indications de l'appareil.

L'expérience nous a amené à remplacer la lampe de 16 bougies par une lampe plus faible, de 5 bougies seulement, mais que nous laissons brûler constamment, jour et nuit, hiver et été.

Nos graphiques ont acquis depuis une netteté remarquable et beaucoup plus grande que précédemment.

La chaleur douce, développée par la lampe, entretient le papier, nous dirions presque dans un état de sensibilité plus grand, et permet d'analyser heure par heure la modalité des phénomènes de précipitation.

Les diagrammes que nous présentons à la Section vont confirmer cette assertion.

Voici les résultats de pluies séparées, de pluie d'orages et de brouillards ; le graphique suivant est produit par une pluie fine entremêlée de flocons de neige, nous en voyons les cristaux ; un autre nous montre une averse avec vent et grêle. Voici maintenant de grosses gouttes isolées ; ici encore une petite pluie fine et drue ; enfin voici un graphique qui révèle de petites pluies fines et légères ; de la bruine et même de très petites aiguilles de glace, dont la chute ne laisse subsister aucun doute.

Ces spécimens suffiront, nous semble-t-il, à prouver la valeur du procédé, qui donne des graphiques très clairs et permet un sérieux examen des détails (²).

(¹) Imprimerie De Meester, Roulers, 1909.

(²) La nature et la délicatesse des inscriptions des diagrammes ne nous a pas permis, à notre grand regret, de présenter ici un cliché suffisamment net ; malgré nos efforts réitérés et les artifices que nous avons employés, nous ne sommes pas parvenus à obtenir des épreuves capables de résister encore à une reproduction convenable par galvano.

Mercredi 26 avril 1911. — La Section met au concours les sujets suivants : 1° Recherches originales sur l'état colloïdal ; 2° Sur la conduction électrique dans l'air à la pression atmosphérique.

Les anciennes questions sont retirées.

M. le chan. De Muynck entretient la Section de ses nouvelles recherches sur *La décharge entre électrodes à température élevée.*

On sait depuis longtemps qu'une température élevée favorise la décharge entre deux conducteurs électrisés.

Dans la plupart des expériences faites à ce sujet, on chauffe à la fois les électrodes et le gaz interposé ; mais il est possible d'imaginer des dispositifs tels que les électrodes seules soient à une température supérieure, et on peut se demander si, dans ces conditions, le potentiel disruptif sera encore abaissé, et s'il le sera dans la même mesure.

Quelques physiciens : Herwig, Macfarlane, Wesendonck, cités par Stark (¹), se sont occupés de cette question. Ils ont constaté que l'incandescence des électrodes modifie l'aspect de la décharge et diminue le potentiel explosif, mais ils ne donnent pas la mesure précise de cet abaissement. D'autre part ce même problème intéresse aussi les praticiens, et Voege a publié dans l'ELECTROTECHNISCHE ZEITSCHRIFT (²) quelques résultats d'après lesquels l'incandescence d'un fil de platine facilite la décharge lorsque le fil est cathode, mais est inactive lorsque le fil est anode. Ses expériences se rapportent à de grandes distances explosives.

Nous nous sommes proposé d'étudier expérimentalement la variation du potentiel explosif pour des températures même inférieures à l'incandescence, et pour des distances explosives assez faibles.

1. *Expériences au moyen d'un fil de platine.*

Une première série de mesures fut faite sur un fil de platine, de 0,025 cm. de diamètre. Tendu horizontalement sur une longueur de 55 cm., il était isolé, et pouvait être intercalé dans un circuit comprenant une batterie d'accumulateurs, une résis-

---

(¹) ANN. D. PHYSIK U. CHEM., 8, p. 837, 1902.

(²) *Beeinflussung grösserer Funkenstrecken durch ionisierende Körper und der Uebergangswiderstand*, 1905, p. 360.

tance variable et un ampèremètre de précision. La lecture de celui-ci suppléait au défaut de mesure directe de la température. En face du fil de platine était placée une sphère en laiton de 1,57 cm. de diamètre. Entre ces deux électrodes on faisait jaillir l'étincelle provenant d'une machine de Holtz, une première fois quand le fil était froid, ensuite quand il était échauffé par le courant de la batterie. Le potentiel se mesurait au moyen d'un micromètre de précision, mis en dérivation. Un condensateur, formé de quatre bouteilles de Leyde, était également mis en dérivation sur le circuit, dont une des barres était mise au sol.

Le rayon des sphères du micromètre était de 0.48 cm. ; les valeurs du potentiel V données dans la suite ont été calculées d'après les chiffres de Landolt et Börnstein pour des sphères d'un demi-centimètre et donnent une précision amplement suffisante.

Les résultats obtenus variaient avec le signe du fil. Celui-ci étant anode, j'obtins, pour une distance explosive de 0,5 cm., les valeurs suivantes (i désigne l'intensité du courant de la batterie, exprimée en ampères ; V, le potentiel explosif, exprimé en unités électrostatiques) :

Fil froid $V = 28,5$
Fil incandescent ($i = 2,9$) $V = 26,3$.

Après nettoyage du fil, et changement du signe de l'électrisation, je mesurai, pour la même distance explosive, et à froid :

$$V = 28,8,$$

mais lorsque le fil eut été rendu incandescent, il fut impossible d'en tirer une étincelle, même en faisant débiter à la machine de Holtz son maximum de courant.

L'examen du fil montre qu'il se produit à sa surface des effluves dont l'aspect varie avec le signe de la charge. L'incandescence a pour effet de rendre ces effluves plus abondants, de sorte que tout le courant de la machine peut passer sous forme d'effluve, sans produire d'étincelle.

L'expérience précédente prouve nettement que l'élévation de température provoque une diminution du potentiel explosif ; elle indique en outre que l'état du fil ou le signe de son électrisation exercent une influence sur le phénomène.

Pour étudier celle-ci, et puisque la machine de Holtz est insuffisante, j'eus recours à une source d'électricité plus puissante, à la bobine de Ruhmkorff.

Je fis d'abord deux séries de mesures, pour une distance explosive de 1,6 cm., sans redresser le courant. Elles donnèrent les résultats suivants (les indices 1 et 2 se rapportent aux deux séries de mesures) :

i	V_1	V_2
0	79,3	81,6
1,6	74,3	71,0
2,2	56,5	56,5
3,0	42,0	42,0.

Ces valeurs confirment les résultats précédents, car le potentiel explosif dans les deux séries de mesures, V_1 et V_2, s'abaisse nettement depuis la valeur pour le fil froid ($i = 0$), jusqu'à l'incandescence ($i = 3$).

En outre, et ceci est important, elles prouvent que la diminution de potentiel se produit déjà pour une intensité de 2,2 et même de 1,6 ampères, alors que l'observation en chambre noire montre que sous ces courants le fil n'est pas encore incandescent. Il faut, pour que la lumière apparaisse, monter à une intensité de 2,65 ampères. Nous pouvons donc énoncer la conclusion : pour que le potentiel disruptif s'abaisse, il suffit d'une élévation de température notablement inférieure à l'incandescence.

Le dispositif des expériences précédentes ne permettait pas d'obtenir l'influence du signe des électrodes, et fut modifié par l'adjonction d'une batterie de quatre bouteilles de Leyde, et d'un excitateur dissymétrique. Composé d'une pointe et d'un plateau, celui-ci joue le rôle d'un clapet, et ne laisse passer les courants que dans un sens, de manière à charger le condensateur jusqu'à ce que le potentiel nécessaire pour la décharge soit atteint.

Les deux tableaux suivants donnent les valeurs de V pour diverses distances explosives *d* et pour diverses intensités, d'après que le fil est anode (tableau 1) ou cathode (tableau 2).

Tableau I.

d	$i = 0$	$i = 2,2$	$i = 3,0$
0,5	29,0	20,8	15,8
0,7	42,0	30,4	25,8
1,1	46,7	35,2	38,0.

Tableau II.

d	$i = 0$	$i = 2,2$	$i = 3,0$
0,5	28,0	15,8	15,8
0,7	49,5	40,2	41,0
0,1	71,0		54,0.

Ces chiffres montrent tout d'abord, et conformément aux résultats précédemment obtenus, qu'une diminution du potentiel explosif se manifeste pour un échauffement du fil quelconque, même inférieur à l'incandescence.

Quant à l'influence du signe du fil ou d'une variation de i, les résultats ne sont pas assez précis pour les dégager. Le défaut de précision que présentent ces mesures, malgré tout le soin qu'on a pris de les bien faire, résulte probablement de deux causes : la formation d'effluves, qui compliquent singulièrement la mesure de V ; et la variation de température du fil pendant une même expérience. On constate facilement que, pour une même intensité du courant de la batterie, la température du fil n'est ni uniforme en toutes ses parties, ni constante, parce que les courants d'air, et l'effluve lui-même d'ailleurs ou le vent électrique, produisent à tout instant un refroidissement inégal et capricieux.

Ces causes d'erreur sont à tel point réelles et impossibles à éviter, qu'il a paru inutile de continuer les recherches sur les électrodes en forme de fil.

2. *Expériences au moyen d'électrodes à surface considérable.*

Il fut fait usage, pour les expériences suivantes, d'une grande capsule en platine, de 9 cm. d'ouverture. Elle était renversée au-dessus d'un brûleur Bunsen, et l'étincelle jaillissait entre sa face supérieure et une sphère de laiton de 1,1 cm. de diamètre, suspendue au-dessus. La sphère d'une part, et la capsule de l'autre, étaient reliées aux armatures d'une batterie de trois jarres, chargée par une machine électrostatique. Le potentiel se mesurait au moyen d'un électromètre de Bichat et Blondlot.

Les appareils étant ainsi disposés, et la boule étant à une distance convenable, on trouve que l'incandescence du platine provoque un abaissement du potentiel explosif de $V = 80$ à des valeurs inférieures à $V = 67$. Mais on constate facilement qu'une partie de cet effet est due au courant d'air ionisé qui monte du brûleur et vient frôler la sphère en laiton.

Pour éviter cette cause d'erreurs je me servis d'une feuille de zinc, de 50 cm. de côté, portant au centre une ouverture circulaire d'un diamètre un peu inférieur à celui de la capsule. Autour de cette ouverture était soudé une espèce de petit canal circulaire, qu'on remplissait d'eau. La capsule était mise de manière à recouvrir l'ouverture, ses bords venaient se placer exactement dans l'eau du petit canal. De cette façon le Bunsen, à travers l'ouverture, pouvait encore échauffer le platine, mais les gaz, produits de la combustion, ne trouvant plus de passage entre la lame de zinc et le bord de la capsule, ne pouvaient plus monter autour de celle-ci. Des expériences préliminaires montrèrent qu'effectivement toute l'action nuisible des gaz de la combustion était ainsi supprimée.

Voici quelques résultats obtenus de cette manière, pour des distances explosives variables d'une expérience à l'autre :

1^re^ Expérience.

Capsule froide	$V = 34,8$
Capsule chauffée au rouge	$V = 14,4$
Capsule chauffée par veilleuse	$V = 19,9$

2^me^ Expérience.

Capsule froide	$V = 69,5$
Capsule chauffée par veilleuse	$V = 50,7$

3^me^ Expérience.

Capsule froide	$V = 41,3$
Capsule chauffée par veilleuse	$V = 34,6$

Ces chiffres montrent que pour la capsule, absolument comme pour le fil de platine, le potentiel explosif est abaissé par une élévation de température même inférieure à l'incandescence (bec Bunsen mis en veilleuse).

En outre on peut ici étudier l'influence du signe de l'électrode chauffée. Voici deux expériences, relatives à la même distance explosive :

1re Expérience : la capsule est cathode.

Capsule froide	$V = 35,5$
Capsule chauffée par veilleuse	$V = 22,0$
Capsule incandescente	$V = 14,4$
Capsule froide	$V = 35,8$

2me Expérience : la capsule est anode.

Capsule froide	$V = 35,5$
Capsule chauffée par veilleuse	$V = 22,0$
Capsule incandescente	$V = 14,6$
Capsule froide	$V = 35,7$.

Il ressort bien de ces nombres que l'abaissement de potentiel obtenu par échauffement est indépendant, dans la limite de précision des mesures, du signe de l'électrode chauffée.

Enfin une dernière série de mesures fut faite au moyen d'un dispositif qui permettait d'estimer la température de l'électrode.

Je me servis à cet effet d'une plaque massive de cuivre rouge, circulaire ($r = 7,1$ cm.), épaisse de 1,7 cm. Dans l'épaisseur de la plaque et latéralement était foré un trou, dans lequel fut introduit le réservoir d'un thermomètre. Celui-ci était enveloppé de feuilles de papier d'étain, afin d'établir un bon contact avec la masse du cuivre : de cette façon on pouvait estimer qu'il renseignait bien la température de la plaque.

Celle-ci, munie du thermomètre, fut placée horizontalement sur une ouverture circulaire pratiquée dans une tôle de 50 cm. de côté. Cette tôle était destinée, comme précédemment, à empêcher les causes d'erreur provenant des gaz de la combustion. Le rayon de la sphère était de 1,18 cm.

Première expérience. Une série de déterminations du potentiel explosif fut faite pendant la période d'échauffement, et, après l'extinction du brûleur, pendant la période de refroidissement.

Voici, pour diverses lectures *t* du thermomètre, les valeurs trouvées pour V :

t	V
148	73,8
178	68,7
210	64,6
230	66,2
252	63,3
270	62,3
285	61,6
295	58,5
300	59,0
305	58,7
308	59,6
—	—
250	61,7
215	67,5
175	69,1
145	69,4
120	69,7

Ces résultats montrent qu'il n'y a pas de concordance entre la diminution du potentiel et la marche du thermomètre : il est probable que celui-ci, malgré les précautions prises, n'accuse pas instantanément la température du cuivre. On peut cependant accorder une certaine confiance aux mesures faites à 300°, car à cette température les variations du thermomètre étaient très lentes. On pourrait p. ex. choisir la moyenne des deux dernières lectures de la période d'échauffement :

307	59,1

Seconde expérience. Celle-ci fut prolongée jusqu'à ce que le thermomètre restât stationnaire, à 294°. La distance explosive était différente de celle de la première expérience. Voici les lectures :

t	V
17	51,7
155	41,0
210	37,7
250	34,6
270	32,7
285	31,8
291	29,3
294	29,3
294	27,5
294	29,2
294	27,6
294	29,1

Le thermomètre resta pendant une heure à 294°. Les valeurs de V pour cette température seraient concordantes, si l'on négligeait les deux lectures 27,5 et 27,6. Il est possible que ces valeurs inférieures soient dues à un courant d'air ionisé par le Bunsen et venant frapper accidentellement la sphère. On sait, en effet, que les gaz d'une flamme peuvent conserver pendant quelques minutes une conductibilité appréciable. Or ici, dans une salle fermée, le Bunsen était allumé depuis plus d'une heure. D'après qu'on tient compte ou non de ces deux résultats inférieurs, on obtient comme moyenne :

$$t = 294 \qquad V = 30,2$$
$$t = 294 \qquad V = 29,2,$$

Les deux expériences précédentes confirment les résultats trouvés plus haut avec le platine. En outre, elles nous permettent de tirer certaines conclusions concernant l'explication théorique du phénomène observé.

3. *Cause de l'abaissement du potentiel disruptif.*

A première vue il semble qu'on peut attribuer cet effet à plusieurs causes :

1° A l'ionisation observée dans les gaz chauds : le platine ioniserait, par élévation de température, l'air qui l'entoure, ce qui faciliterait la décharge. Cependant cette hypothèse est insuffisante ici, car, s'il est vrai que pareille ionisation se produit, on sait qu'elle ne se manifeste nettement que vers le rouge blanc (¹) : elle ne peut donc pas expliquer l'abaissement observé avec la veilleuse.

2° On pourrait aussi songer au phénomène bien connu que les solides chauffés émettent des ions positifs et négatifs. D'après plusieurs auteurs cette émission ne commence qu'au rouge, mais Strutt (²) a trouvé que des fils de cuivre et d'argent émettent de l'électricité positive à des températures inférieures à 200 degrés.

3° D'autre part il n'est peut-être pas nécessaire de recourir à cette explication, car on peut observer, avec Stark (³), que l'élévation de température d'un gaz doit agir indirectement sur le potentiel explosif, en diminuant la densité, ce qui augmente le chemin de libre parcours, et provoque par conséquent un abaissement du gradient. D'après la théorie développée par Stark, pour obtenir cet effet il n'est pas nécessaire que toute la masse du gaz intéressée à la décharge soit portée à une haute température, mais il suffit de chauffer la couche qui entoure immédiatement l'électrode de décharge : c'est la valeur du chemin de libre parcours dans cette couche qui détermine l'abaissement du potentiel.

Or, dans notre dispositif, ce cas était précisément réalisé, et, si l'explication de Stark est admise, il doit se produire une chute de potentiel indépendamment de toute ionisation et de toute émission d'ions. On peut même calculer dans une certaine mesure l'ordre de grandeur de cette diminution. En effet, de l'élévation de température, en la supposant connue, on peut tirer, par l'équation des gaz parfaits, l'abaissement équivalent de pression. Il existe d'autre part des données expérimentales concernant la variation du potentiel explosif avec la pression : on peut donc calculer la diminution de potentiel explosif qui serait produite par l'abaissement équivalent de pression.

Inversément, partant d'une chute de potentiel explosif observée, on peut calculer quelle est l'élévation de température de l'électrode nécessaire pour la provoquer.

Appliquant ceci aux chiffres donnés plus haut, on trouve que la température du platine chauffé par le bec en veilleuse est respectivement de

---

(¹) Winkelmann, *Handbuch der Physik*, IV, p. 483 ; 2ᵉ édit.
(²) Thomson, *Conduction of Electricity through Gases*, p. 213, 2ᵉ édit.
(³) Ann. d. Physik, *8*, p. 830, 1902.

315 degrés
257 »
153 »
88 ».

Dans les deux premières expériences la flamme de la veilleuse était assez grande, dans la quatrième elle était très petite. Quant au platine incandescent, il aurait été, d'après ce calcul, à 670 degrés.

Les mesures faites sur le cuivre ont été soumises au calcul inverse : partant de le température lue au thermomètre, et de la valeur de V à froid, on trouve, pour la première expérience, qu'à 307 degrés devrait correspondre une valeur pour V de 50,7. L'expérience a donné 59,1 : la différence entre les deux valeurs est considérable et équivalente à une erreur de 140 degrés dans l'évaluation de la température. Il convient cependant d'ajouter que les données relatives à la variation du potentiel avec la pression ont dû être obtenues ici par une extrapolation. Pour la deuxième expérience on trouve qu'une élévation du température de 17° à 294° peut abaisser le potentiel de 51,7 à 28,7. Or l'observation avait donné la valeur de 30,2 ou 29,2. Ici l'accord paraît satisfaisant, si on tient compte de l'imperfection du calcul.

Il importe de noter qu'au point de vue quantitatif les mesures faites sur la capsule de platine et le cuivre ne sont pas à l'abri de tout reproche. Le métal lui-même, cuivre et platine, se dilate et par le fait même diminue la distance explosive : mais on s'assure facilement que la diminution de potentiel qui en résulte n'est pas comparable à celle qui a été observée. En outre, et ceci est plus important, la tôle qui sert de support à la plaque, de même que la tige isolante à laquelle est fixée la sphère de laiton, peuvent subir, sous la chaleur, des déformations dont il est impossible de prévoir l'effet. En somme les résultats quantitatifs et les calculs auxquels ils ont donné lieu ne doivent pas être considérés comme définitifs, mais demandent à être complétés par des expériences ultérieures, où l'on tiendrait compte notamment de la distance explosive.

En résumé, nous pouvons formuler comme suit les résultats obtenus :

1° Le potentiel disruptif est abaissé par l'échauffement d'une des électrodes.

2° Cet effet est déjà obtenu par une élévation de température inférieure à l'incandescence.

3° Dans la limite de précision des mesures il est indépendant du signe de l'électrode chaude, au moins si celle-ci a une large surface. Avec une électrode en forme de fil mince, qui présente des effluves, les mesures sous ce rapport n'ont pas été nettes.

4° Pour trouver la cause du phénomène, des expériences ultérieures sont nécessaires.

M. Delemer présente une note *sur la propagation du mascaret produit par la marée montante aux embouchures des fleuves.*

Le mascaret est une énorme vague qui se forme à la marée montante aux embouchures de certains fleuves. Cette vague remonte le courant avec une grande vitesse sur toute la largeur du fleuve. Le phénomène s'observe parfaitement à l'embouchure de la Seine, à l'époque des grandes marées.

Lorsque la vague a passé, le niveau du fleuve se trouve beaucoup plus élevé qu'auparavant ; il est seulement un peu plus bas que le sommet de la vague qui marche en tête. L'eau qui vient remplir le lit du fleuve derrière la vague est à l'état de courant violent nécessairement inverse du courant normal d'amont en aval.

Enfin on voit, derrière la vague de tête, de petites vagues moins élevées que celle-ci et semblant courir après elle à la surface du fleuve désormais surélevé.

Quand j'eus l'occasion d'observer le mascaret à Caudebec, le niveau du fleuve me paraissait, si j'ai bonne mémoire, à trois ou quatre mètres au-dessous du quai, avant l'apparition du phénomène.

Quand la grande vague passa, elle inonda en partie le quai où se trouvaient massés les curieux, puis le niveau du fleuve s'abaissa légèrement ; j'estimai son abaissement à un mètre.

A certain point de vue, la propagation du mascaret ressemble à celle de l'onde solitaire de Scott-Russel. Celle-ci se produit dans un canal lors d'un afflux subit d'une certaine quantité d'eau en un point du canal. Il se forme à la surface de l'eau une intumescence qui se propage avec une vitesse constante le long du canal si celui-ci a une profondeur constante.

M. Boussinesq a fait de ce phénomène une théorie rigoureuse, il a déterminé complètement, par le calcul, d'abord la forme du profil de l'onde ou intersection de celle-ci par un plan vertical passant par l'axe du canal, puis la vitesse de propagation.

Si l'on appelle H la profondeur du canal, h la hauteur du point le plus élevé de l'intumescence au-dessus du niveau de l'eau qui est au repos dans le canal, la vitesse de propagation ou célérité de l'onde est égale à

$$\sqrt{g(\mathrm{H}+h)}.$$

Dans la recherche des formules qui déterminent les caractères du phénomène, on suppose h très petit par rapport à H.

Ces ondes transportent très peu de liquide. Si par la pensée on divise le canal en tranches très minces par des plans équidistants perpendiculaires à l'axe du canal, la propagation se fait régulièrement de tranche en tranche. Chaque tranche est successivement aplatie par le passage de l'onde, puis élargie ensuite.

La théorie de M. Boussinesq explique aussi la propagation d'ondes plus longues, provoquées par un afflux d'eau plus considérable et durant plus longtemps. La vitesse de propagation est alors donnée par la formule

$$\sqrt{g\left(\mathrm{H}+\frac{3}{2}h\right)}\cdot$$

Le phénomène de l'onde solitaire de Scott-Russell diffère de celui du mascaret en ce sens que dans le mascaret il y a transport d'une énorme quantité d'eau formant un courant rapide.

A ma connaissance, l'étude théorique du mascaret proprement dit n'a été tentée que par M. de Saint-Venant dans un mémoire publié, en 1871, dans les COMPTES RENDUS de l'Académie des Sciences. L'auteur y étudie surtout la propagation des crues des rivières.

M. de Saint-Venant se sert d'une première relation qu'on établit entre la célérité de propagation du mascaret U et la vitesse v du courant liquide qui suit la vague de tête en exprimant la propriété évidente de conservation des volumes fluides.

Cette relation s'écrit :

$$\mathrm{U}h = v(\mathrm{H}+h). \qquad (1)$$

H est la profondeur du fleuve avant le passage du mascaret, h la surélévation de celui-ci après le passage de l'onde de tête.

A cette équation, M. de Saint-Venant joignait celle qui résulte de l'emploi du théorème des quantités de mouvement appliqué à une certaine partie de la masse liquide en mouvement. Ces deux relations lui permettaient d'exprimer la célérité de propagation du phénomène à l'aide de H et de h ; il obtenait la formule :

$$U = 2\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}.$$

Cette formule revient à peu près à celle qu'on a citée plus haut et qui donne la célérité des ondes de translation allongées :

$$U = \sqrt{g\left(H + \frac{3}{2}h\right)}.$$

L'une ou l'autre de ces formules est admise pour exprimer la célérité U du mascaret, on les considère comme approximativement conformes à l'expérience.

Cependant, comme la question n'est pas traitée d'une manière complète, il m'a semblé intéressant de rechercher la formule à laquelle on arriverait si l'on substituait l'emploi du théorème des forces vives à celui des quantités de mouvement.

Il est aisé de voir que, de toutes manières, le raisonnement basé sur le théorème des forces vives donne une idée plus concrète et plus claire du mécanisme du phénomène. De plus la théorie, telle que nous allons l'indiquer, peut encore s'appliquer si la vague de tête déferle. De ce fait, il résulte simplement une perte de force vive qui s'introduit dans l'équation à côté des travaux des autres résistances passives.

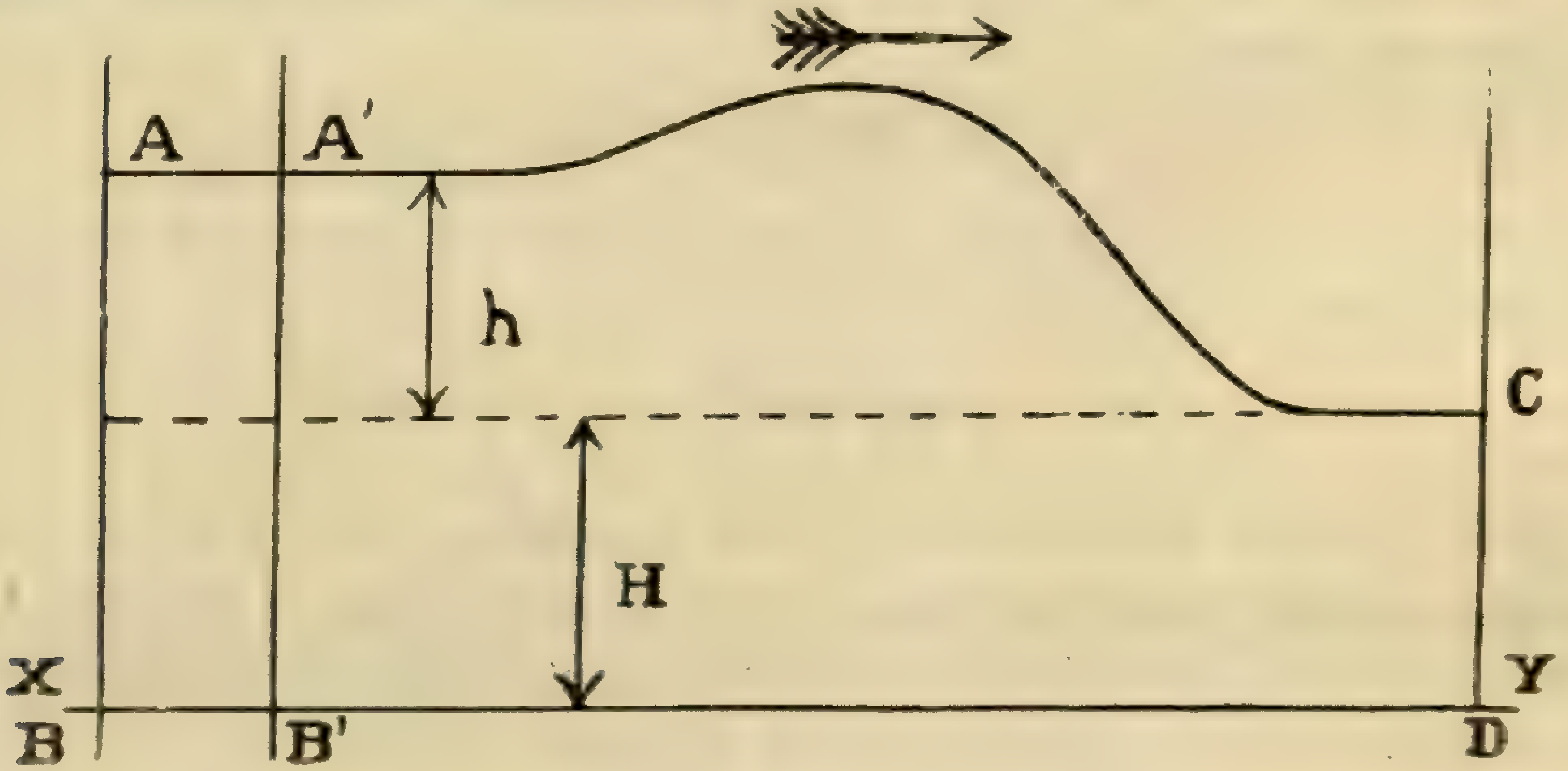
Essayons donc à présent, en nous servant du théorème des forces vives, de poser l'équation qui régit la propagation du mascaret.

Soit XY le fond du lit du fleuve, on peut supposer approximativement que la profondeur et la largeur sont constantes.

Soit H la profondeur du fleuve avant le passage du mascaret, $H + h$ la profondeur après ce passage (voir la figure où le phénomène se propage dans le sens de la flèche). Nous admettrons, ce qui est certes légitime ici, que le niveau du fleuve à l'état de courant derrière la vague de tête est plan et horizontal.

Considérons alors à l'instant t la masse liquide comprise entre deux plans normaux à l'axe du canal, le plan $\overline{AB}$ assez en deçà de la vague de tête comme le montre la figure, et le plan $\overline{CD}$ que l'extrémité antérieure de la vague atteindra à l'époque $t + \Delta t$.

Pendant le temps Δt, que nous supposerons essentiellement fini, toutes les particules liquides se trouvant sur la section $\overline{AB}$ sont



entraînées avec la vitesse du courant, vitesse constante qui sera désignée par v. La section AB tout entière est donc en $\overline{A'B'}$ à l'époque $t + \Delta t$; la section CD peut être considérée comme immobile. Le courant direct du fleuve est, en effet, excessivement faible avant le passage du mascaret.

De ceci il résulte que, pendant le temps Δt, la masse liquide que nous venons de définir a reçu, de la part du liquide qui est à gauche de AB, une poussée qu'on peut, ρ désignant la densité, évaluer par unité de largeur du canal, à

$$\rho g(H + h)\left(\frac{H + h}{2}\right),$$

car le centre de poussée sur une surface plane verticale rectangulaire est au milieu de la profondeur $H + h$. Comme le déplacement de AB est $v\Delta t$, le travail exercé par la poussée qu'on vient de calculer est

$$\rho g \frac{(H + h)^2}{2} v\Delta t. \tag{2}$$

Ce travail est employé 1° à communiquer à une portion seulement du liquide que nous considérons, une certaine vitesse de déplacement en avant; 2° à soulever une partie de ce liquide mis en mouvement en avant; 3° à vaincre les frottements.

Donnons l'expression de ces divers travaux, rapportés tous à l'unité de largeur du canal.

L'espace franchi par l'onde de tête étant Δx pendant le temps Δt, la masse du liquide mise en mouvement sera, par unité de largeur du canal,

$$\rho \mathrm{H} \cdot \Delta x\,;$$

la force vive communiquée à cette masse et mesurant le travail dépensé sera

$$\rho \mathrm{H} \cdot \Delta x \frac{v^2}{2}. \tag{3}$$

Pour calculer le travail relatif à la masse liquide qui a été soulevée, on peut admettre que, sur la longueur Δx, le liquide du canal s'est en partie soulevé de telle manière que la profondeur ait augmenté de h. Autrement dit, la masse liquide

$$\rho \mathrm{H} \cdot \Delta x,$$

dont le centre de gravité était à une hauteur $\frac{\mathrm{H}}{2}$ au-dessus du fond du fleuve, a eu son centre de gravité surélevé de $\frac{h}{2}$. Le travail de soulèvement contre la pesanteur est donc

$$\rho g \mathrm{H} \cdot \Delta x \frac{h}{2}. \tag{4}$$

Appelons enfin $\mathfrak{T}_f$ le travail absorbé par unité de temps dans l'ensemble de la masse liquide que nous considérons comprise de AB à CD, travail absorbé par les tourbillonnements et frottements et compté aussi pour l'unité de largeur du canal. Remarquons enfin que sur la section CD, qui est supposée immobile, le liquide extérieur n'exerce aucun travail résistant.

Reste donc à écrire que le travail exercé par la poussée produite le long de la section AB par le liquide extérieur sur l'ensemble de la masse liquide que nous venons de dire (comprise de AB à CD) est égal au travail reçu par cette masse liquide.

Ceci s'exprimera par l'équation

$$(5)\qquad \rho g\,\frac{(\mathrm{H}+h)^2}{2}\,v\Delta t=\rho\mathrm{H}\,\frac{v^2}{2}\,\Delta x+\rho g\mathrm{H}\,\frac{h}{2}\,\Delta x+\mathcal{T}_r\Delta t.$$

Divisons par Δt, et n'oublions pas qu'il résulte de tout ce qui précède que $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ est la célérité de propagation de l'onde U. On a donc, en tenant compte de l'équation (1), page 214, qui exprime la conservation des volumes fluides :

$$\frac{\mathrm{H}+h}{2}\,h\mathrm{U}=\frac{\mathrm{H}}{2g}\,\mathrm{U}\left(\frac{h}{h+\mathrm{H}}\right)^2\mathrm{U}^2+\frac{\mathrm{H}h}{2}\,\mathrm{U}+\frac{\mathcal{T}_r}{\rho g},$$

ce qui peut s'écrire, en résolvant par rapport à U^2 après avoir divisé par U,

$$(6)\qquad \mathrm{U}^2=\left[\frac{h^2}{2}-\frac{\mathcal{T}_r}{\rho g\mathrm{U}}\right]\frac{2g\,.\,(\mathrm{H}+h)^2}{\mathrm{H}h^2}=g\,\frac{(\mathrm{H}+h)^2}{\mathrm{H}}\left[1-\frac{2\mathcal{T}_r}{\rho g\mathrm{U}h^2}\right].$$

Le dernier terme entre parenthèses est susceptible d'interprétation. Observons que

$$(7)\qquad \rho g\mathrm{U}\,\frac{h^2}{2}=\rho g v\,\frac{(h+\mathrm{H})h}{2}.$$

Cette expression est un travail que l'on peut comparer au travail moteur exercé sur le même liquide que nous avons considérée entre les plans $\overline{\mathrm{AB}}$ et $\overline{\mathrm{CD}}$.

Appelons $\mathcal{T}_m$ ce travail moteur, on a vu (voir l'expression (2) page 216), qu'il valait par unité de temps

$$\rho g\,\frac{(\mathrm{H}+h)^2}{2}\,v.$$

Donc l'expression (7) est égale à $\mathcal{T}_m\,\frac{h}{\mathrm{H}+h}$ et l'on a :

$$\mathrm{U}^2=g\,\frac{(\mathrm{H}+h)^2}{\mathrm{H}}\left[1-\frac{\mathcal{T}_r}{\mathcal{T}_m}\,\frac{\mathrm{H}+h}{h}\right].$$

Posons la parenthèse égale à φ, nous aurons :

$$\mathrm{U}=\sqrt{g\,\frac{(\mathrm{H}+h)^2}{\mathrm{H}}\,\varphi}\,.$$

Cette formule s'accordera certainement avec l'expérience et pourra être identifiée avec celles qu'on a rappelées en commençant, si l'on donne à φ la valeur convenable pour chaque valeur du rapport $\frac{(H+h)^2}{H}$. Au reste, la détermination qui résulterait pour φ de la comparaison de cette formule avec une expérience précise mènerait à la détermination du rapport du travail des frottements au travail moteur provenant de la marée montante.

Je me permettrai d'insister sur l'intérêt qu'il y a à mettre en évidence la valeur des frottements dans les divers phénomènes que l'on étudie. Les frottements ont une grande importance dans la nature. Ici, ils servent à assurer l'équilibre d'un système matériel, là, ils diminuent la vitesse d'un mouvement. Dans d'autres cas au contraire, ils serviront à produire un mouvement déterminé; ainsi dans la marche et dans tous les autres modes de locomotion imaginés par l'homme.

Enfin, les frottements de toutes sortes mesurent, dans tous les mouvements ou changements qui se produisent autour de nous, l'intensité de la dégradation de l'énergie, élément d'une importance générale si grande.

M. E. Gerard ébauche l'exposé de relations possibles entre les apparences cométaires et les phénomènes de luminosité engendrés par le frottement dans une atmosphère suffisamment raréfiée. Notre confrère se propose d'approfondir ces vues et de revenir sur ce sujet.

Le secrétaire donne lecture d'un mémoire adressé par le P. Th. Wulf, S. J., intitulé *La radioactivité et le système périodique des éléments*. Ce mémoire est publié dans la seconde partie des ANNALES.

M. A. de Hemptinne expose ses recherches personnelles *sur la synthèse de l'eau oxygénée par l'action de l'effluve électrique*. Ce mémoire est publié dans la seconde partie des ANNALES.

Troisième section

Mardi 25 avril 1911. — La section met au concours les questions suivantes : A) *On demande de nouvelles recherches sur les* *caoutchoucs africains.* — B) *On demande une mise au point des recherches concernant le préhistorique de la Basse Belgique.*

Les réponses à la première question (déjà posée en 1910) doivent être envoyées au secrétariat avant le 1er octobre 1911 ; les réponses à la seconde, avant le 1er octobre 1912.

Sur l'avis des deux rapporteurs MM. Viaene et Van Ortroy, la section renvoie à M. Maes, pour être complétée, son étude sur les remèdes indigènes des Bovenkamba.

Donnant suite aux conclusions favorables des rapports de MM. F. Meunier et H. Lebrun, la section vote l'insertion aux Annales de quatre notes du R. P. Navas, S. J. : A) *Dilaride* (Ins. Névr.) *nouveau* ; B) *Deux Éphémérides* (Ins. Névr.) *nouveaux du Congo belge* ; C) *Sur une nouvelle espèce de Némoptérides* (Ins. névr.) *du Congo Belge* ; D) *Insecte Névroptère nouveau de l'Amérique méridionale.*

A) *Dilaride* (Ins. Névr.) *nouveau.*

On connaît très peu d'espèces de cette singulière famille d'Insectes Névroptères à aire géographique très étendue ; d'Amérique on ne signale que deux formes, le *Nallachius Prestoni* Mac Lachl., du Brésil, et le *N. americanus* Mac Lachlan, des États-Unis, toutes deux décrites d'après un seul échantillon. L'espèce signalée ici fait partie de la Faune de l'Équateur.

NALLACHIUS LOXANUS sp. nov. (fig. 1).

Testaceus, alis totis griseo maculatis.

Caput testaceum, vertice fornicato, occipite duabus verrucis pallidioribus, antennis (¹)...

Prothorax transversus, margine antico recto, utrimque inflato ; marginibus lateralibus parallelis, postice ampliatis ; tuberculo laterali manifesto, piloso, discalibus nullis. Meso-et metanotum testacea, nitentia, ad lobulos laterales fuscescentia.

Abdomen fulvum, pilosum, pænultimo segmento superne inflato ; valvis lateralibus parum convexis.

(¹) Les antennes manquent.

Pedes pallidi, longiter pilosi, tarsis longis, 1° articulo ceteris simul sumptis æquilongo.

Alæ grandes, ampliatæ, apice elliptice rotundatæ ; reticulatione fulva ; membrana hyalina, tota maculis griseis, series transversas vix formantibus, adspersa, stigmate insensibili.

Ala anterior ultra medium ampliata, toto margine costali, externo et parte externa posterioris venulis intercalaribus instructo ; area costali venulis fere omnibus simplicibus ; area radiali 3-4 venulis inter radium et sectorem ; sectore 4-6 ramis ; pupillis exiguis, punctiformibus, fusco haud limbatis ; venulis discalibus paucissimis.

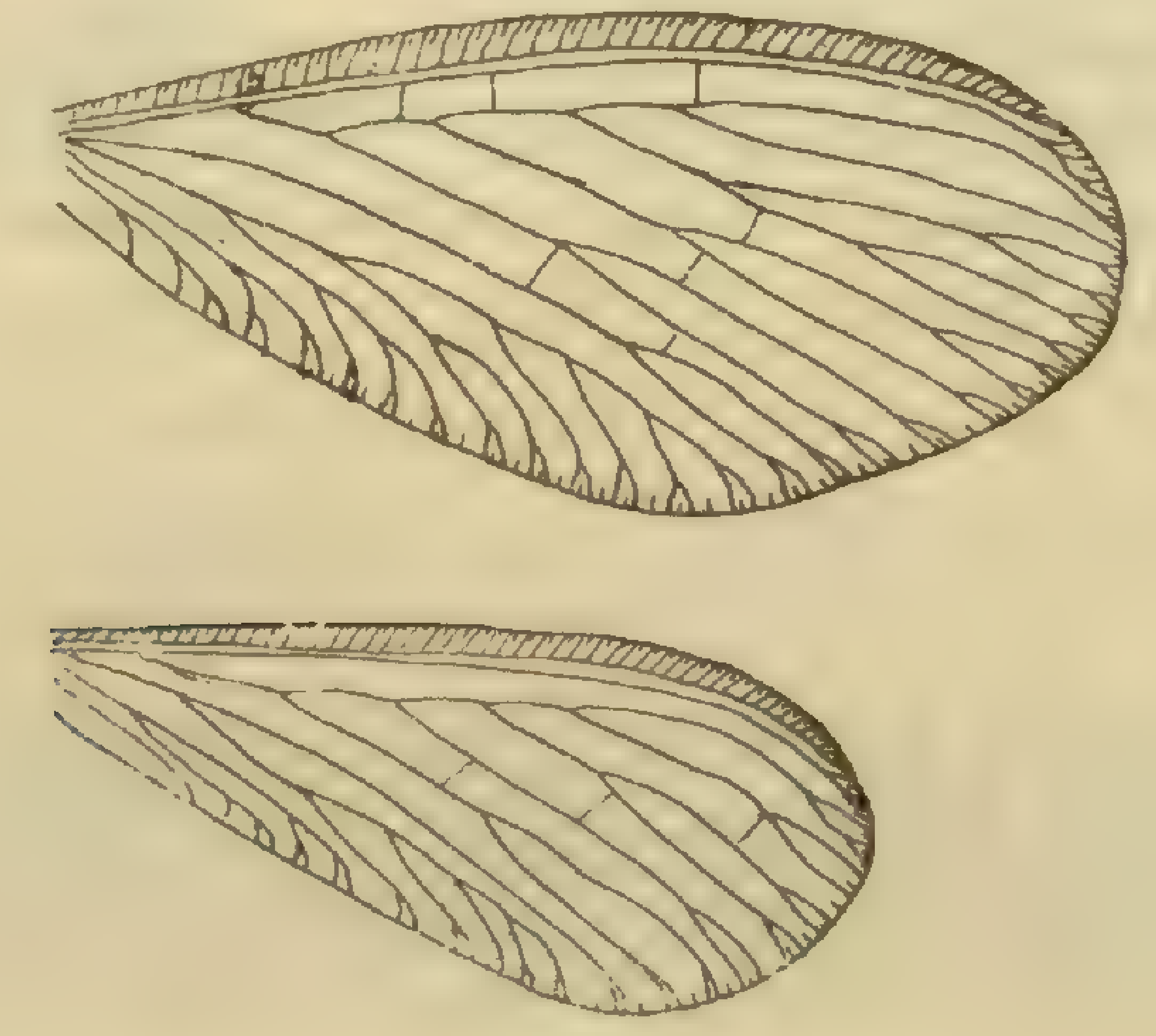


Fig. 1.
Nallachius loxanus ♂ Nav. 7/1
Ailes de la droite.

Ala posterior basi angusta, ad medium ampliata, apice late rotundato, toto margine costali et externo venis intercalaribus prædito ; pupilla item exigua, punctiformi.

Long. corp.	2'5	mm.
— al. anter.	7	»
— — poster.	5'5	»
Latit. — ant.	3'3	»
— — post.	2'4	»

Patrie. Équateur, Loja. A. Poujade, 1909. Un échantillon ♂ au musée de Paris.

Quoique l'unique échantillon que j'ai sous les yeux ait les

antennes brisées, il appartient irrécusablement à cette famille par l'ensemble des autres caractères. Il se classe dans le genre *Nallachius,* auquel appartiennent aussi les deux autres espèces américaines.

Il est très voisin du *N. Prestoni*. Voici les différences principales que je remarque tenant en compte la description originelle.

1. A l'espace costal presque aucune vénule n'est fourchue, plusieurs, dans le *Prestoni*, alternant avec les simples.
2. Les ailes sont notablement plus grandes.
3. Le secteur du radius est moins fourchu ou ramifié ; je distingue quatre branches bien distinctes aux deux ailes, à l'une il y en a six.
4. La couleur de la réticulation des ailes et en général celle du corps est plus pâle.

Saragosse, déc. 1910.

B. Deux Ephémérides (Ins. Neur.) *nouveaux du Congo belge.*

1. ELASSONEURIA CONGOLANA sp. nov. (fig. 2).

Similis *trimenianæ* Mac Lachl.

Straminea, fusco punctata.

Caput testaceum, oculis fuscis.

Thorax superne ferrugineus, nitens, inferne testaceus.

Abdomen stramineum, dorso singulis segmentis fusco tripunctatis ; fascia longitudinali alba ; cercis albis, brevibus.

Pedes femoribus fuscescentibus, tibiis tarsisque tenuibus, albis.

Alæ albidæ, membrana purpureo et violaceo iridea.

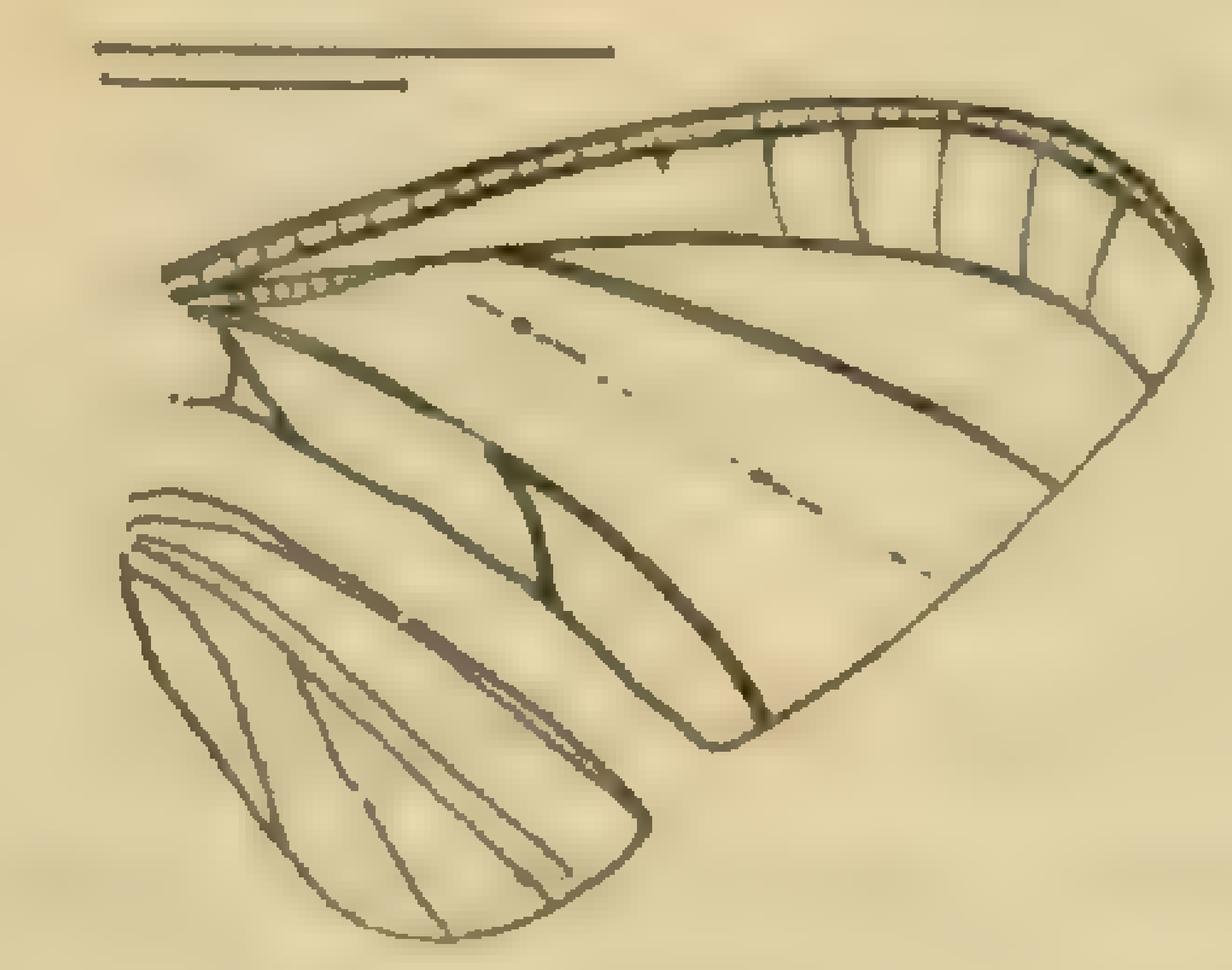


FIG. 2.
Elassoneuria congolana Nav.
Ailes de la droite.

Ala anterior magna, ampla, triangularis, venis albis, costa et radio fuscescentibus. Area costalis angusta, multis venulis fuscis. Area radialis lata, 5-7 venulis fuscis.

Ala posterior parva, angusta, cuneata.

Long.	corp.	13,5	mm.
—	al. anter.	14	»
—	— post.	8	»
Lat.	— ant.	9	»

Patrie. Gombé, Lomela, 13 oct. 1905. Waelbroeck.

Trois échantillons ♀ au musée du Congo belge.

On ne connaissait qu'une espèce de ce genre, la *trimeniana* Mac Lachl. (Eaton, Revisional Monograph of Recent Ephemerida, p. 32, pl. III, fig. 3). Voici les différences principales que je remarque de cette nouvelle espèce avec celle-là.

La couleur du corps est un peu plus pâle, les veines des ailes blanches, pas grisâtres, mais les premières brunes.

Le champ costal a un grand nombre de vénules, qui ne sont pas signalées dans la figure de la *trimeniana*.

L'aile antérieure est beaucoup plus courte, et proportionnellement plus large, de figure triangulaire ; dans la *trimeniana* elle est plutôt allongée et presque du double plus longue.

Les vénules radiales sont plus obscures ; les veines des ailes sont disposées d'une façon un peu différente.

Finalement les points bruns de l'abdomen distinguent au premier coup d'œil cette espèce de celle du Natal.

2. Ephemera Schoutedeni sp. nov. (fig. 3).

♀ Flava, alis immaculatis.

Corpus totum inferne flavum.

Caput flavo-aurantiacum, oculis nigris.

Pronotum parum latius quam longius, fascia laterali fusca, disco stramineo eburneo vel osteino, margine postico medio acute emarginato. Meso- et metanotum similiter ac pronotum picta, sed fascia laterali angustiore. Metanotum medio retrorsum in processum acutum brevem productum.

Abdomen segmentis dorsalibus 1-8 fascia laterali sigmoidea nigra ; 9° linea laterali ; 10° duobus tertiis basilaribus fuscis, inferne exciso ; item linea angusta ad suturam angustissima nigra,

ad segmenta 7-9 distinctiore ; cercis fulvis, medio lateralibus parum breviore.

Pedes pallidi, anteriores posterioribus longitudine subæqualibus ; tarsis anterioribus ferrugineis pallidis, articulis longitudine fere 2 : 2 : 1 : 3.

Alæ hyalinæ, immaculatæ, margine externo levissime fusco limbato ; reticulatione tota fusco-nigra, ad basim pallida vel flava.

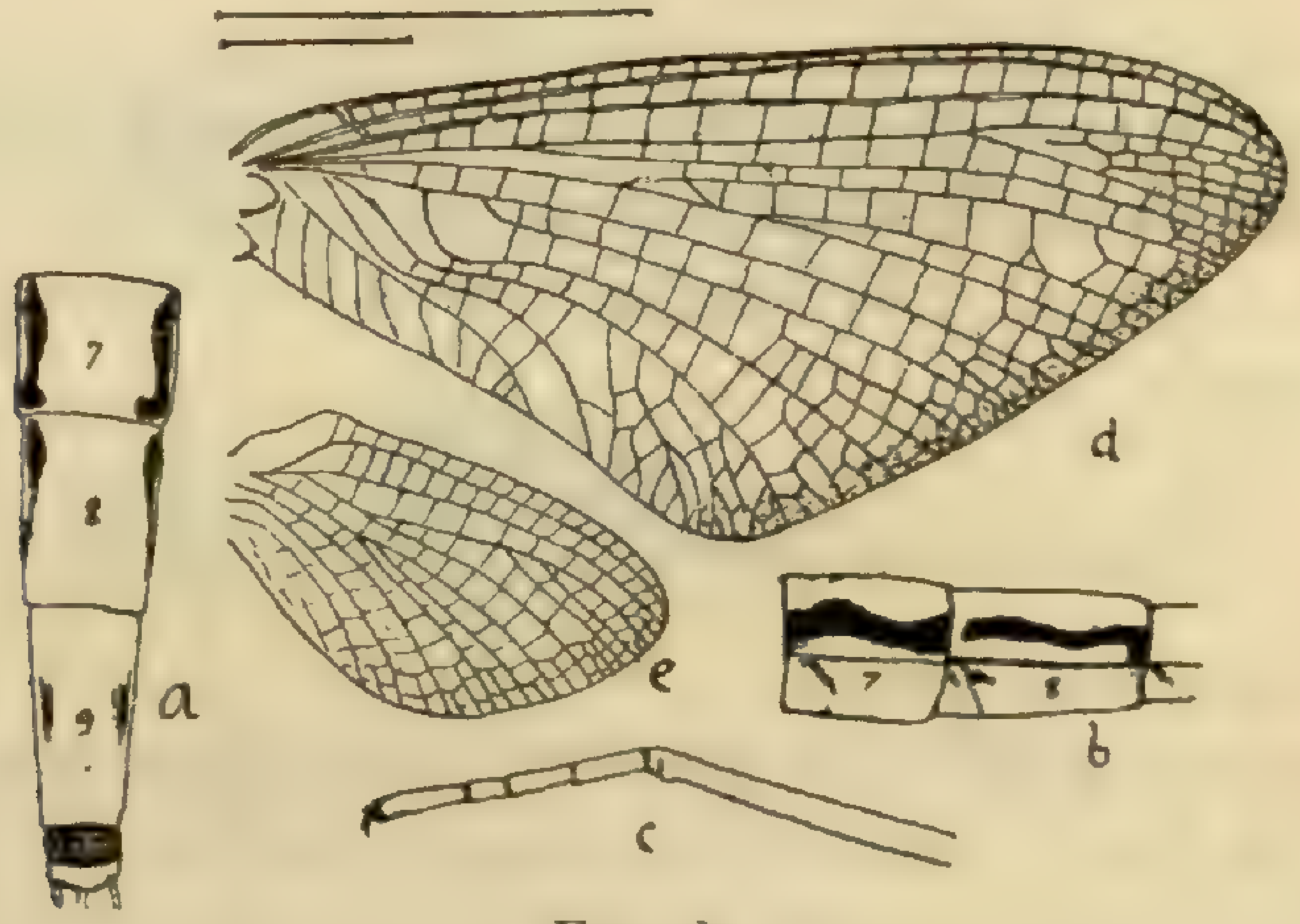


Fig. 3a

Ephemera Schoutedeni Nav.

a. Derniers segments de l'abdomen vus par-dessus. — *b*. Derniers segments vus de côté. — *c*. Patte antérieure. — *d*. Aile antérieure. — *e*. Aile postérieure.

Ala anterior triangularis, ante medium dilatata, apice rotundata, costa et area costali basi flavis.

Ala posterior trapezoidalis, dilatatione majore ultra medium, area costali summa basi pallide flava.

Long.	corp.	26	mm.
—	al. ant.	21	»
—	— post.	9,5	»
Lat.	— ant.	9,5	»

Patrie : Lukombe, 2 oct. 1900, A. Koller.

Un échantillon ♀ au Musée du Congo, communiqué par son conservateur le Dr H. Schouteden, à qui j'ai le plaisir de dédier l'espèce.

C'est la première de ce genre qui soit citée de l'Afrique. Or, le genre était connu de toute la région paléartique, de l'Inde, de Ceylan, de Chine et de Nouvelle Zélande.

Les lignes de l'abdomen et l'ombre au marge externe des ailes distinguent aisément cette espèce des autres congénères.

C. Sur une nouvelle espèce de Némoptéride (Ins. Neur.) *du Congo belge* (fig. 3).

Le R. P. Dom. Guy de Hennin, O. S. B., de l'abbaye de Maredsous, a bien voulu me communiquer un joli Némoptéride qu'il avait reçu du Congo belge, appartenant à un genre récemment créé par moi, et qui me semble nouveau pour la science. Malgré l'état défectueux de l'échantillon unique examiné, je pense que les caractères que je vais indiquer seront suffisants pour reconnaître l'espèce.

NEMOPISTHA HENNINI sp. nov. (fig. 4).

Similis *remipenni* Kolbe.

Caput prosostomate toto superne flavo, linea laterali angusta fusca, vertice fusco ; oculis fulvis, spatio interoculari æque latis ; antennis duobus primis articulis flavis, linea laterali externa fusca ; reliquis fusco-nigris.

Thorax superne fuscus, inferne flavescens ; mesonoto linea longitudinali ad lobulos laterales obscuriore.

Pedes fusci, femoribus inferne linea longitudinali flava ; tarsis primo articulo ceteris simul sumptis longiore, ferme 15 : 3 : 2 : 2 : 6 ; unguibus tenuibus, testaceis.

Ala anterior hyalina, fortiter iridea, reticulatione fusca, costa, cubito ejusque ramo obliquo alternatim fusco et flavido, præter tertium apicalem totum fuscum ; venulis plerisque costalibus, intercubitalibus et cubitalibus fusco anguste limbatis ; postcubitalibus ad marginem posteriorem limbatis. Area costalis 40 venulis simplicibus ante stigma, 2 stigma claudentibus, 9 post stigma, aliquot ex his furcatis, 2 scalaribus sive transversis inter illas. Stigma angustum, fuscum, inter duas venulas comprehensum, dimidium basilare cellulæ implens, sed in ipsa basi deficiens. Radius ad medium alæ ortus, 6 ramis instructus, ad marginem furcatis. Cellulæ discales pleræque rhombales. Venulæ postcubitales 9, plerumque simplices.

Ala posterior longissima, sed haud triplo anteriore longior ; parte angusta venis fuscis, venulis fuscis crebris distincte fusco

limbatis; membrana hyalina, ante extremum late fuscescens. Spathula seu pars ampliata oblonga, dimidio basilari fusca, præter maculam flavidam utrimque juxta sinum; parte apicali late flava, post fasciam fuscam vix angustata, apice rotundata; venulis fere omnibus simplicibus, aliquot apicalibus furcatis, nullis transversis.

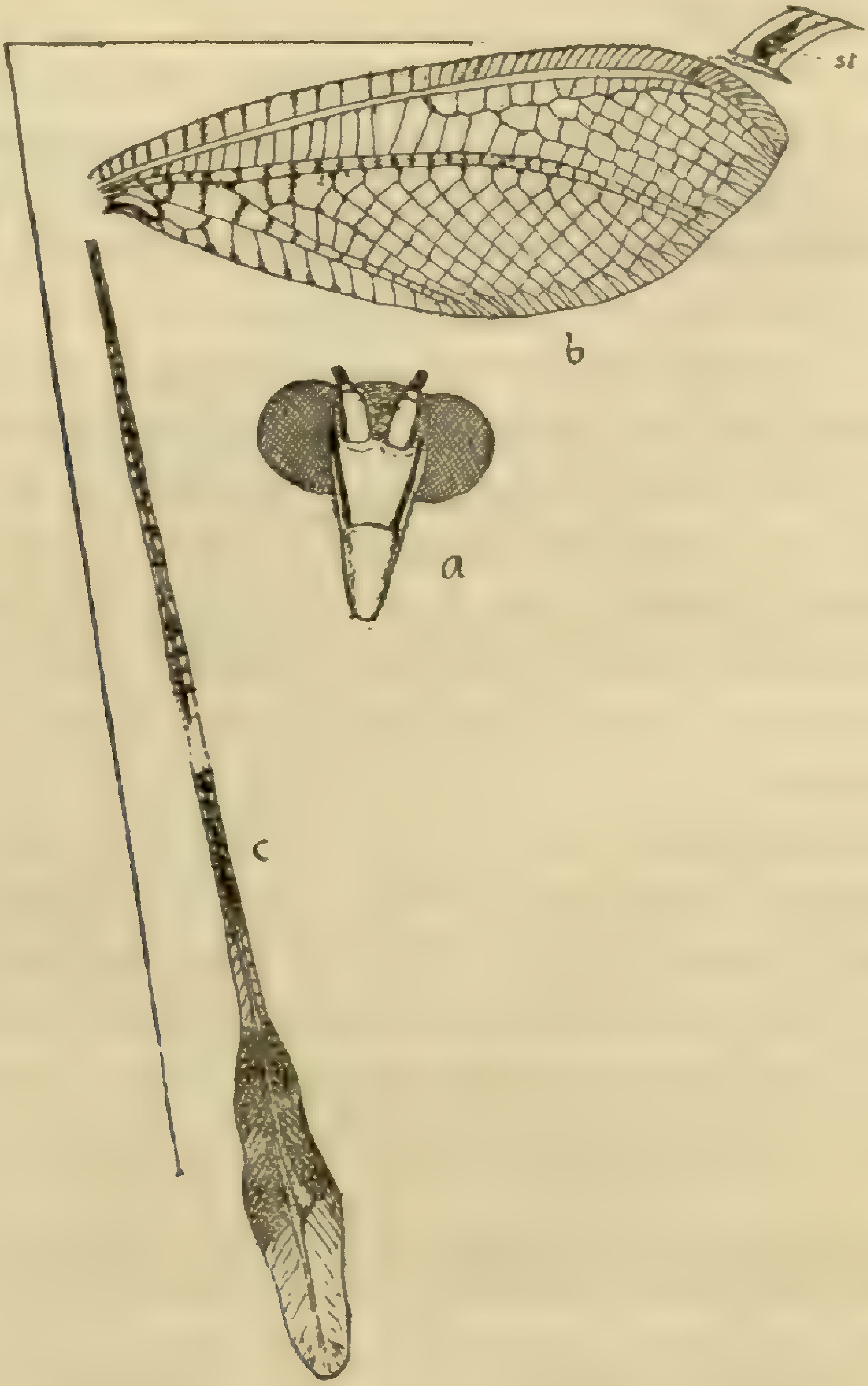


FIG. 4ª
Nemopistha Hennini Nav.
a. Tête vue de front. — *b*. Aile antérieure-st. stigme. — *c*. Aile postérieure (interrompue).

Longit. al. anter.	33	mm.
— — poster.	82	»
Latit. — anter. (ad med.)	12	»
— — post. (ad spathulam)	4,5	»

Patrie : Congo belge. Un échantillon incomplet brisé (l'abdomen manque) qui me semble être une ♀, qui a été communiqué par le R. P. de Hennin, O. S. B. Je me fais un vif plaisir de lui dédier cette belle espèce.

La tache jaune située à l'un et l'autre côté de la partie brune de la spathule à l'aile postérieure sépare cette espèce des autres formes du même genre.

Se distingue de la *N. remipennis* par les veines de l'aile antérieure sous-costale et procubitale entièrement brunes ; la sous-costale de *N. remipennis* est blanchâtre près du stigme et la procubitale alternativement brune et blanche. De plus, cette espèce a un plus grand nombre de vénules bordées de brun.

Remarque. Je profite de cette occasion pour faire remarquer que ma monographie des Némoptérides à peine publiée (Memorias de la R. Acad. Cienc. de Barcelona, vol. VIII, n. 18, jul. 1910), Mr. Nathan Banks, des États-Unis, s'est empressé de changer le nom générique *Eretmoptera* que j'ai créé, en *Nemopterella* (Entom. News, Nov. 1910, p. 390), sans autre indication que le nom *Eretmoptera* avait été déjà appliqué par Kellog en 1900 à un genre de Diptères.

Le nom *Nemopterella* étant le seul valable, je place sous ce genre les espèces *africana* Leach, *costalis* Westw., *remifera* West., *biremis* Kolbe, *leptocera* Nav. et *neglecta* Nav.

Concernant cette dernière, j'exprimais le doute dans ma monographie (p. 27) qu'elle fût identique à la *biremis* Kolbe que je n'ai pu examiner ; j'incline maintenant à le croire.

D. *Insecte Névroptère nouveau de l'Amérique Méridionale.*

Neoperla longinqua sp. nov. (Perlides).

Ochracea, alis hyalinis, immaculatis.

♀ Caput prothorace angustius, testaceum, fronte pallida, oculis nigris, ocellis nigris, prominulis, fusco limbatis, a se invicem bis eorum diametro distantibus, spatio inter eos rufescente ; antennis ochraceis, pallidis, tenuibus ; palpis gracilibus, longis, maxillaribus pænultimo articulo apicem versus dilatato, ultimo tenui, cylindrico. Inferne ochraceum.

Prothorax transversus, marginibus subrectis, antice vix latior

quam postice, disco rugosus, medio pallidus, ad latera testaceo-ruber. Meso- et metanotum similiter picta. Pectus totum ochraceum.

Abdomen ochraceum, segmentis 7-10 fuscescentibus ; lamina subgenitali grandi, apicem abdominis attingente ; cercis abdomine longioribus, ochraceis, segmentis elongatis.

Pedes ochracei, femoribus summo apice dorso infuscatis ; tibiis ad basim et ad apicem superne leviter fusco tinctis ; ultimo tarsorum articulo apice fuscescente.

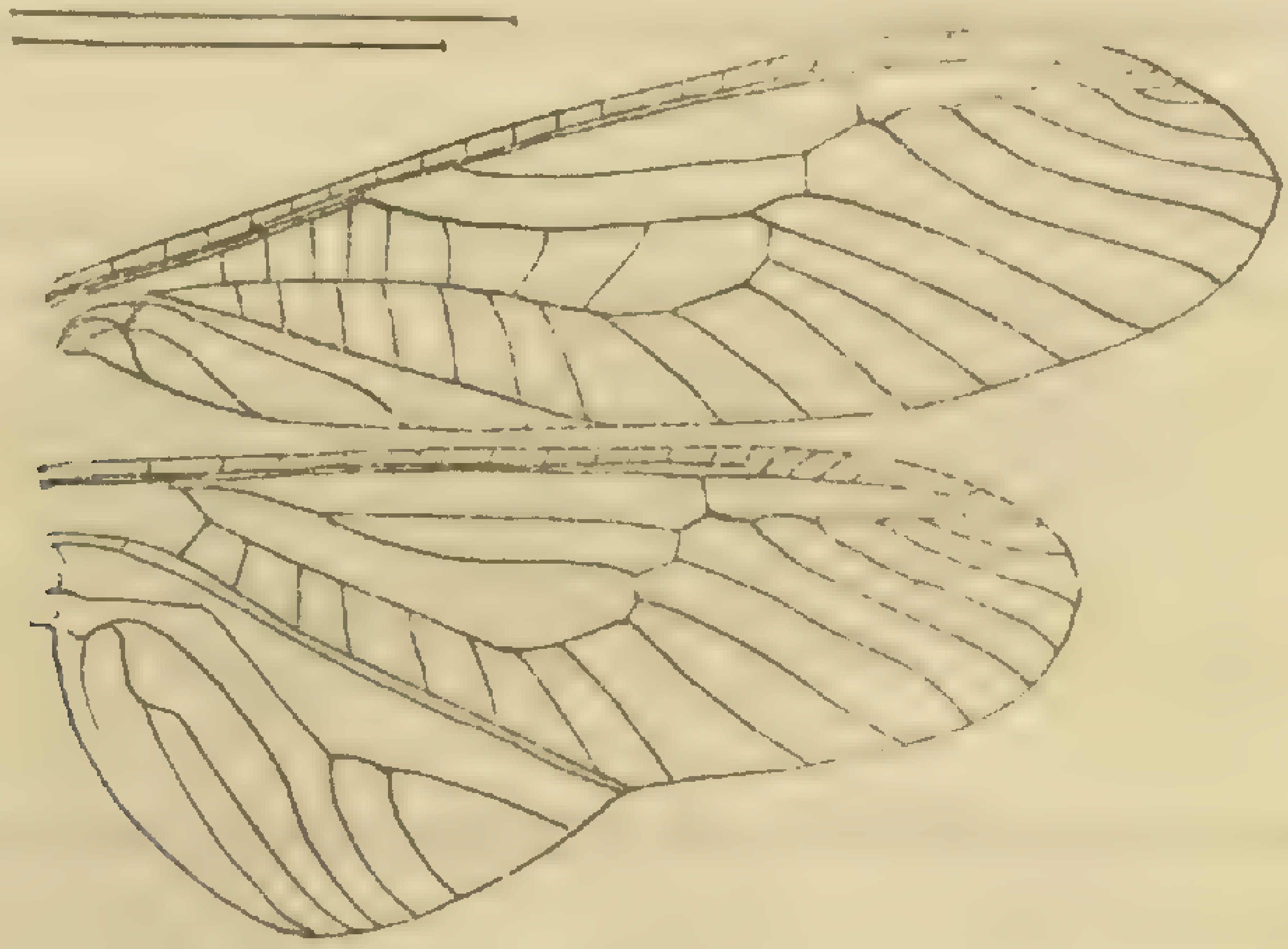


FIG. 5ª
Neoperla longinqua Nav.
Ailes de la droite.

Alæ (fig. 5) elongatæ, membrana leviter flavido tincta, reticulatione ochraceo flavida, 4 venulis ultra finem subcostæ in area costali sive apicali.

Ala anterior sectore radii 4 ramis ultra venulam radialem, petiolo sive parte inter hanc venulam et primam furculam brevissimo ; procubito (media) in tertio basilari radio parallelo proximoque, mox concavo, 8 venulis procubitalibus (in area media), 7 cubitalibus, inter cubitum ejusque ramum.

Ala posterior sectore radii 4 ramos extrorsum emittente, petiolo primi, sive spatio inter venulam radialem et primam furculam, longiore subduplo quam in ala anteriore ; venulis procubitalibus nullis, sive area media libera, 8 venulis cubitalibus.

Long. corp. 13'5 mm.
— — usque ad al. apicem 27 »

Long. al. anter.	23'5 mm.
— — poster.	20 »

Patrie : Équateur, Loja, A. Poujade, 1909 (Mus. de Paris).

M. Renier et le R. P. Van den Gheyn, S. J., ayant émis un avis favorable, la section vote la publication du travail de M. le Curé Claerhout : *L'Aurignacien en Belgique.*

M. le Dr H. Lebrun expose une série de considérations sur l'étude de la nature à l'école.

La section propose la prompte insertion de ce travail dans la Revue des Questions scientifiques.

Mercredi, 26 avril. — La section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus :

Président :	M. le chanoine Grégoire,
Vice-Présidents :	M. le curé Claerhout,
	M. le Dr H. Lebrun,
Secrétaire :	M. F. Van Ortroy.

M. Maes entretient la section des objets de numération des peuplades de la Ruzizi-Kivu.

M. Fernand Meunier présente à la section, *pour prendre date,* un *Aperçu des genres de Blattidae des houillères de Commentry.* Avant de faire l'esquisse des formes de Blattidae du célèbre gisement de l'Allier, il n'est pas sans intérêt de jeter un coup d'œil en arrière afin de constater ce qui a été réalisé depuis une cinquantaine d'années dans le domaine des Orthoptères fossiles.

Les premiers travaux d'ensemble sur les Nomoneures et d'autres intéressants articulés paléozoïques ont été entrepris par le distingué paléontologiste américain. M. S. H. Scudder, de Washington. Pendant des années, cet entomologiste a eu la bonne fortune d'examiner de très importants matériaux d'études, ce qui lui a permis de faire le relevé des formes des gisements primaires américains. Les patientes recherches de S. H. Scudder ont servi de jalons à bien des travaux ultérieurs et surtout à l'élaboration de son remarquable mémoire de 1895 (¹) où il examine, en paral-

---

(¹) Revision of the American Fossil Cockroaches with description of New Forms. Bull. U. S. Geological Survey, n° 124 (Washington).

lèle, les formes américaines avec celles des schistes européens. Quoi qu'en disent quelques auteurs, ce travail est encore le manuel le plus sûr pour l'étude, très ingrate et si monotone, des Blattidae fossiles parce qu'il est le seul où l'on trouve une clef des genres, basée sur les caractères morphologiques des élytres ou ailes de la première paire. En 1895, en annonçant la publication du mémoire de révision de Scudder, j'avais déjà laissé entrevoir que la classification de ce distingué paléontologiste renfermait trop de genres (¹) et que l'avenir permettrait, sans doute, de les mieux grouper. De nouvelles recherches entreprises au moyen des remarquables séries de Blattidae de Commentry paraissent étayer cette manière de voir. En effet, depuis cette époque, j'ai pu étudier à loisir des centaines et des centaines de Blattes, et je suis arrivé à une conclusion concordant assez bien avec les observations de Scudder et celles des récents travaux de Sellards. Tel n'est cependant pas l'avis de M. A. Handlirsch, du Musée de Vienne, qui, dans son travail de révision des types de S. H. Scudder, bouleverse de fond en comble les patientes remarques du paléontologiste des États-Unis. Pour un spécialiste qui a à sa disposition de grands matériaux de comparaison, il est malaisé de s'y retrouver parmi le grand nombre de nouveaux genres admis par le savant paléontologiste autrichien. De plus, les nombreuses vignettes de son « Handbuch » sont-elles toutes irréprochables ? Avec ce manuel, dépourvu de tables dichotomiques des familles, des genres et des espèces, il est bien aride d'arriver à une détermination systématique irréprochable.

M. Sellards revient, à juste titre, à la classification de S. H. Scudder qui, si elle n'est pas exempte de défauts, a au moins l'incontestable mérite de faciliter de beaucoup les recherches des paléontologistes.

Dans son manuel, Handlirsch a placé les Etoblattina dans un très grand nombre de genres, ne laissant dans le genre primitif que de rares formes. M. Sellards a eu soin de le rétablir et d'y grouper plusieurs nouvelles espèces.

Je ne mentionnerai pas ici l'ordre des Blattoidea de M. A. Handbuch, qui n'est pas admis par les zoologistes et les paléontologistes.

(¹) Revue générale des sciences pures et appliquées.

Sur ce point d'ailleurs, à diverses reprises, j'ai attiré l'attention de ceux qui s'intéressent aux études paléoentomologiques.

Cependant, il serait injuste de tout critiquer dans la classification de M. Handlirsch. Les Protoblattidae (Protoblattinae mihi) renferment des formes curieuses paraissant nous renseigner sur quelques points la phylogénie des Nomoneures.

Dans son magistral travail sur les Insectes de Commentry, feu mon ami Ch. Brongniart a fait l'étude sommaire d'un groupe de Blattidae des houillères de Commentry. Les figures agrandies des principaux genres de Nomoneures de ses planches sont claires. Le savant paléontologiste français admet, lui aussi, la classification de S. H. Scudder et fait même quelques rapprochements entre les formes de Commentry et celles des gisements américains.

Ce qui frappe surtout le chercheur qui étudie de belles séries de Blattides de ce gisement c'est, d'une manière générale, l'uniformité des types, en d'autres mots la monotonie de ces êtres. Certes cette faune, quoique partielle, malgré sa richesse, renferme bien des espèces intéressantes ; mais est-il indispensable de les grouper en un aussi grand nombre de genres ? Telle n'est pas, je l'avoue, ma manière de voir. Comme Sellards, je reviens aussi à la classification de Scudder, tout en l'adaptant aux exigences de la science actuelle. Tout porte à croire que dans un avenir rapproché, on constatera que l'on n'a pas assez pris en considération les groupements actuels pour l'étude des formes fossiles. Certes, il serait téméraire de ranger les Blattidae paléozoïques en se basant uniquement sur la classification des formes récentes qui a signalé cependant bien des enseignements généraux pour le rangement des formes disparues.

Les espèces houillères de Commentry (Allier) sont bien nettement délimitées et la plupart assez bien représentées. Je dois cependant faire remarquer que l'étude des blattes du célèbre gisement français m'a un peu désillusionné. J'avais espéré y rencontrer des formes génériques plus variées, plus différenciées et conséquemment apportant quelque lumière nouvelle concernant l'évolution de ces archaïques insectes. Pour ce qui a trait à la taille des Blattides, il y a lieu de faire remarquer que si les espèces paléarctiques sont ordinairement minuscules, les Nomoneures des régions torrides sont souvent aussi grands que ceux des schistes de

Commentry. Pour s'en convaincre, il suffit d'ailleurs de faire des recherches comparatives avec les travaux de Brunner von Wattenwyl et les recherches de Shelford, le distingué Orthoptériste américain.

J'ai eu soin de relater au commencement de cet aperçu des genres de Blattidae qu'il y a lieu cependant de faire une exception en faveur des Protoblattinae qui, comme le dit très justement M. A. Handlirsch, semblent avoir conservé des traits de parenté bien appréciables avec les Paléodictyoptères. Malheureusement de ce côté les types sont peu nombreux. C'est à peine si, parmi nos empreintes de Blattidae, j'ai trouvé quelques formes de ces curieux Nomoneures. Tout en constatant le grand intérêt qu'offre l'étude des Protoblattinae, il est cependant à conseiller d'être très prudent pour ce qui concerne les conclusions à tirer relativement à la phylogénie de ces insectes.

La nécessité de l'élaboration d'une classification simple et méthodique des Blattidae primaires s'impose de plus en plus. Ce sont surtout des caractères très distincts qu'il faut prendre en sérieuse considération pour arriver à un groupement assez naturel de ces archaïques articulés. Pour être entièrement naturelle cette classification devrait être basée sur l'examen approfondi des organes les plus critères (bouche, antenne, ailes, pattes, etc.). ce qui est rarement possible chez les types primaires où on s'oriente principalement d'après la morphologie des élytres (ailes antérieures), rarement d'après celle des ailes de la seconde paire.

Les récents travaux de Shelford ont fait faire un grand pas à l'étude systématique des Blattidae de la faune mondiale.

En résumé, pour l'étude des formes fossiles, il est à conseiller de maintenir, dans son ensemble, les groupes de Scudder en y apportant toutefois les changements que nécessitent les progrès de la science.

Protoblatinae.
Palaeoblattinae.
Mylacrinae.
Blattinae.

1. Les Protoblattinae ne sont représentés à Commentry que par quelques intéressantes espèces.

2. Dans le groupe des Mylacrinae, on voit les genres Promylacris, Necymylacris et Archimylacris.

3. Les Blattinae sont représentés par plusieurs genres où dominent principalement les Etoblattinae.

Parmi les autres genres, citons les Gerablattina, Anthracoblattina, Oryctoblattina, etc.

La faune de Commentry renferme un petit pourcentage d'espèces de Blattidae à taille exiguë (Blattinopsiella pygmaea Meun.).

M. Fernand Meunier signale à la section la présence d'un *Tipulidae* du genre *Polymaera de l'ambre de la Baltique,* faisant partie de la collection du Prof. Dr R. Klebs de Königsberg. C'est le seul exemplaire connu après l'examen de 20.000 inclusions.

Notre collègue fait le relevé d'autres Diptères se rencontrant aussi, très rarement, dans le succin du Samland. Dans le monde des Némocères, des anciens auteurs, il y a lieu de citer les familles et les genres suivants :

1. *Culicidae :* Corethra (rare).
   Mochlonyx (rare).
2. *Tipulidae :* Dixa (rarissime, Loew).
3. *Sciaridae :* Zygoneura (rarissime, Loew).

Parmi les Brachycères, on trouve des types intéressants :

4. *Stratiomydae :* Beris (rarissime, Helm) ; Cacosis (rarissime) ; Hermetiella (rarissime).
5. *Asilidae :* Asilus (rare) ; Holopogon (rarissime, Loew).
6. *Xylophagidae :* Lophyropohrus (rare).
7. *Bombylidae :* Corsomyza (Loew, Meunier), rarissime.
8. *Arthropidae :* Arthropeas (rare) ;
   Arthropiella (rare).
9. *Tanypezinae :* Calobata (assez rare).
10. *Ortalinae :* Palaeotimia (rarissime).

Tous ces Diptères, curieux à étudier pour ce qui concerne les relations fauniques, n'offrent cependant que peu d'intérêt au point de vue de la paléoentomologie stratigraphique.

Des découvertes d'empreintes de *Calamostachys Ludwigi* Carruthers dans le Westphalien de la Belgique font l'objet d'une communication de M. A. Renier.

Jeudi, 27 avril. — Discussion du rapport suivant de M. le Dr H. Lebrun sur l'*Influence de l'enseignement des sciences naturelles dans la vie publique.*

L'an dernier, au Congrès des Catholiques à Malines, j'ai montré la nécessité de l'enseignement des sciences naturelles dans les humanités, et l'urgence qu'il y aurait dans notre pays de modifier nos programmes d'enseignement. J'ai indiqué sommairement dans quelles conditions cet enseignement devrait être donné pour atteindre le but éducatif que l'on se propose.

On a fait à mon rapport certaines objections, et l'une de celles qui ont paru avoir le plus d'influence sur les membres du Congrès fut formulée de la façon suivante : « Voyez l'Allemagne qui se trouve à la tête du mouvement scientifique et pédagogique ! »

Le P. Verest écrivait dans son rapport sur la nécessité de maintenir et de relever les humanités gréco-latines : « Les humanités gréco-latines ont donc les titres les plus incontestables à rester le centre de la haute éducation intellectuelle. C'est pour l'avoir compris que l'Allemagne a conquis et détient l'hégémonie du mouvement scientifique et que l'Angleterre garde son prestige dans le monde des idées. Fait non moins significatif, les États-Unis, où tout est dirigé vers les affaires et vers la vie pratique, manifestent néanmoins de plus en plus la préoccupation de mettre l'éducation classique à la base du haut enseignement, et, chose en soi plutôt surprenante, ce sont tout juste les médecins, les ingénieurs, les hommes de science qui se montrent le plus pénétrés de cette nécessité. »

Partisan convaincu de l'enseignement des humanités gréco-latines et de leur importance dans l'éducation de la jeunesse universitaire comme le P. Verest, je ne suis plus du tout de son avis quand il attribue à cet enseignement l'hégémonie du mouvement scientifique détenue par l'Allemagne. Je ne partage pas plus l'avis de M. Mansion qui estime que « l'enseignement des sciences naturelles doit être reporté à la fin des humanités et après les humanités. »

La conclusion du P. Verest me paraît erronée parce qu'il a oublié une chose que tous ceux qui ont vécu en Allemagne connaissent pour l'avoir sentie dans toute la vie publique, c'est l'influence profonde qu'a sur la mentalité du peuple allemand l'enseignement scientifique approfondi qui se donne concurremment aux autres branches du programme, dans toutes les classes de tous les établissements d'instruction.

Pour montrer combien l'opinion du P. Verest était unilatérale et loin de la vérité, j'ai publié une petite brochure dans laquelle j'ai exposé le programme allemand de l'enseignement des sciences naturelles tel qu'il a été adopté à l'unanimité par le Congrès des naturalistes et médecins allemands, après quatre années d'études. Les pédagogues, les ingénieurs, les professeurs d'université les plus éminents, n'ont pas dédaigné de prendre part à cette discussion pour y donner leur avis sur les matières à enseigner, et sur les méthodes à suivre. Or ce programme comprend un minimum de deux heures de sciences dans toutes les classes. Si donc dans les pays germains on maintient dans les programmes les études gréco-latines, c'est une très bonne chose; mais en conclure que c'est à leur influence exclusive que ces pays doivent leur hégémonie scientifique est une erreur à mon avis. Je serai plus près de la vérité en affirmant que c'est grâce à son enseignement scientifique généralisé que l'Allemagne a conquis et détient l'hégémonie du mouvement scientifique contemporain.

On aime et on cultive toutes les sciences dans les pays germains, parce qu'on les enseigne à tous ; dans les pays latins, et la Belgique peut être comptée parmi eux, on s'en désintéresse, et on ne donne pas aux sciences l'importance qu'elles devraient avoir dans la vie publique, parce qu'on ne les enseigne pas suffisamment, ou bien mal ; parce qu'en somme on les ignore.

Je vais essayer de vous montrer aujourd'hui, en prenant comme exemple quelques-unes des sciences naturelles, comment leur enseignement a retenti sur la prospérité économique et scientifique des pays qui l'ont adopté, et comment ceux qui le négligent assistent impuissants aux progrès réalisés sous leurs yeux, sans espoir d'égaler leurs rivaux.

Mais je vous entends me dire : vous exagérez, on enseigne les sciences naturelles d'une manière très brillante dans nos universités. Nous avons des laboratoires très bien outillés, nous formons des médecins, des pharmaciens, des ingénieurs très compétents, très instruits. Sans doute, mais en dehors de ces catégories de personnes quels sont ceux qui s'intéressent aux sciences naturelles ?

Vous conviendrez que c'est bien là une proportion excessivement minime en comparaison du reste de la population.

La vérité est celle-ci, l'enseignement des sciences naturelles dans nos universités n'a pas d'existence autonome. Cela veut dire qu'on ne les enseigne pas pour elles-mêmes, parce que dans notre pays elles ne sont pas des sciences qui conduisent à une carrière.

Elles sont satellites des professions libérales, et on ne les enseigne que pour autant qu'elles peuvent rendre des services au médecin, au pharmacien, à l'ingénieur.

Tous nos professeurs d'universités sont d'excellents préparateurs aux examens, et bien peu sont ceux qui font progresser les sciences qu'ils enseignent ; ils sont avant tout préoccupés de la formation professionnelle. Il en résulte que l'immense majorité du public, ne connaissant rien ou très peu de chose de sciences naturelles, chimie, physique, zoologie, botanique, se désintéresse entièrement des industries modernes qui sont toutes scientifiques.

Toutes nos professions libérales s'encombrent, il y a surproduction de diplômés ; mais ces porteurs de diplômes sont incapables de tenter d'industrialiser leurs connaissances, en dehors de leur profession. Cette pléthore devient un danger social, qui n'a de remède que dans l'expatriation.

On me dira : « Vous broyez du noir, la situation n'est pas aussi mauvaise que vous le prétendez. Voyez comme la Belgique prospère, nos affaires sont en très bonne situation, et vous êtes vraiment mal venu de critiquer, alors que de l'avis unanime la Belgique marche en tête de toutes les nations européennes dans tous les progrès scientifiques et industriels. »

Vous aurez tous entendu des phrases pareilles, débitées par nos hommes politiques avec plus ou moins d'emphase, dans nos réunions électorales.

Quand j'entends nos ministres et nos hommes politiques débiter ces boniments avec autant d'audace que de sérénité, je ne puis m'empêcher de me souvenir de certain tableau allégorique de notre vieux Breughel qui se trouve au Musée de Naples. Il est intitulé *Les Aveugles* : sur une prairie aux tons verdoyants, ils sont sept qui cheminent gauchement en se tenant par la main, les yeux ternes, la démarche hésitante, la tête dressée, ils déclament et ils discutent. Le chef de file arrive au bord d'une rivière, le sol manque sous ses pas et il entraîne tous les autres. Ils passent au milieu du monde ignorant tout de la beauté et des trésors de la nature, ils poursuivent mentalement des chimères, vivent de souvenirs, et meurent entraînés vers l'abîme par leur aveuglement. Je demande à nos dirigeants qu'ils veuillent seulement réfléchir à ce qu'écrivait, en 1896, un grand économiste français, M. Edm. Thiéry :

« L'industrie de l'avenir ne sera jamais plus stationnaire, elle réalisera incessamment des progrès, toujours plus nombreux, toujours plus rapides. En un mot l'industrie de l'avenir, c'est l'industrie scientifique dans toute l'acception du mot, et malheur aux nations insouciantes qui resteront au-dessous de la situation nouvelle : elles seront dévorées par leurs rivales. »

Or ce n'est un secret pour personne, il suffit de réfléchir, de regarder autour de soi, pour s'apercevoir aussitôt que les industries vraiment et purement scientifiques sont quasi inconnues en Belgique.

Jamais je n'ai pu m'en convaincre d'une manière plus précise et plus indubitable que dans une réunion tenue à Bruxelles il y a trois ans, en vue d'une participation officielle de la Belgique à l'Exposition de Bordeaux.

On nous avait convoqués à une vingtaine d'hommes de science pour nous demander de former une section des sciences, appareils et industries scientifiques.

Notre section était présidée par un officier qui est, je crois, actuellement un de nos plus brillants professeurs de l'École de guerre. Il ouvrit donc la séance par un petit discours très patriotique, faisant ressortir l'importance de l'Exposition, et émettant le vœu de voir la Belgique, dont le renom scientifique n'est plus à faire, qui se trouve parmi les nations les plus instruites de la terre, participer brillamment à l'Exposition des Sciences de Bordeaux.

« Elle doit, disait-il, à sa réputation mondiale de montrer qu'elle est à la tête de tous les progrès, et qu'aucune science ne lui est étrangère ! » « Nous voulons former, ajoutait-il, une section essentiellement belge, dans laquelle figureront des produits, des instruments scientifiques de précision, des appareils, fabriqués par des Belges ou inventés par eux. »

Très satisfait de son petit discours et de sa péroraison patriotique, le Président se rassit, et jetant un coup d'œil à la ronde il ajouta : « Quelqu'un demande-t-il la parole » Tout le monde se tut et nous étions tous à nous regarder, et à nous tâter. Il ne pouvait en croire ses yeux et interpellant alors quelques négociants il reçut les réponses suivantes : « Je suis en Belgique le représentant des fabriques allemandes ». « Moi, dit un autre, j'importe surtout les appareils anglais et américains », et ainsi de suite. Après un court échange de vues on se sépara en constatant qu'il n'existe en Belgique aucune fabrique d'appareils de précision, d'instruments scientifiques, d'appareils optiques.

Il existe dans tout notre pays, 4 ou 5 ouvriers qui suffisent à peine à réparer les instruments que nous importons de Paris, d'Allemagne et d'Angleterre.

Nous fabriquons des locomotives, des voitures de chemins de fer, de tramways, des machines à battre le grain, des automobiles, des bicyclettes, nous avons des métallurgistes de première force, des ouvriers qui travaillent le cuivre mieux que personne, mais nous employons cette main-d'œuvre si habile à fabriquer des gros morceaux. Nous fabriquons du verre, des cristaux, nous exportons de la gobeletterie dans le monde entier. Nos ouvriers taillent des cristaux dignes de figurer sur les tables des rois, et nous ne savons pas tailler scientifiquement une paire de lunettes. Nos artisans n'ont jamais appris les sciences optiques : nos médecins emploient des thermomètres, des microscopes, des stéloscopes, nos pharmaciens des balances de précision, nos ingénieurs des tachéomètres, des théodolites, nos sucriers, nos distillateurs, des polarimètres, nos astronomes des télescopes, etc. Nos sociétés photographiques sont très prospères, et nous ne parvenons pas à fabriquer un appareil, ni un objectif photographique, ni à tailler une lentille.

Il n'y a peut-être pas en Belgique un mécanicien capable de fileter convenablement une vis micrométrique.

Il en est de même de tous les appareils de mensuration des courants électriques.

Tous ces instruments, nous les employons quotidiennement, nous les manipulons, nous les corrigeons parfois, mais nous sommes absolument impuissants à les produire industriellement. Tous ces appareils sont aujourd'hui indispensables à toutes les industries qui veulent lutter et suivre les progrès réalisés ailleurs. On ne coule plus une tonne de fonte ou d'acier, on ne brasse plus un hectolitre de bière sans examiner les substances dont on se sert à l'aide du microscope. On fait le diagnostic de toutes les maladies au moyen du microscope, qu'elles atteignent les plantes, les animaux ou l'homme.

Tous les agents physiques sont aujourd'hui employés comme moyens thérapeutiques, l'électricité, le radium, la lumière, et vous aurez tous déjà visité les instituts luxueusement installés où tous ces agents physiques sont utilisés dans un but curatif.

D'où nous viennent ces appareils? Tous indistinctement d'Allemagne. Il n'est plus une industrie, même agricole, qui ne nécessite aujourd'hui des appareils de précision. Les sciences physiques président à notre vie quotidienne, au développement de toutes nos industries, et nous sommes incapables de fabriquer nous-mêmes les instruments qui sont devenus nécessaires à leur fonctionnement et à leurs progrès.

Je me contente aujourd'hui de poser la question suivante : Pourquoi pareille sujétion, et pareille inertie ?

Nous avons pourtant la main-d'œuvre la plus habile peut-être qui soit au monde, et la population étrangère de nos universités serait à coup sûr suffisante pour alimenter notre production et se faire dans les pays éloignés les propagateurs de nos industries scientifiques.

Faut-il vous rappeler qu'il y a vingt-cinq ans, on comptait dans le monde entier 4 ou 5 fabricants de microscopes? Aujourd'hui il y en a trente dont vingt Allemands. Il y a trente ans Carl Zeiss était un tout petit opticien d'Iéna travaillant avec 6 ouvriers, aujourd'hui la firme Zeiss occupe 1600 ouvriers. Pendant ce temps il y a en France une seule maison occupant une dizaine d'ouvriers.

La seule maison Leitz de Wetzlar produit annuellement plus de 6000 microscopes sans compter les autres appareils accessoires.

Il en est de même pour tous les autres appareils médicaux, d'électricité et d'optique. Notre production dans ces industries, dont l'avenir nous démontrera tous les jours l'importance sans cesse croissante, est aujourd'hui absolument nulle.

Vous aurez tous encore présent à la mémoire le remarquable article publié par M. le comte Joseph de Moussac sur l'industrie chimique, paru en octobre 1909, dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Je vous y renvoie pour constater le développement incroyable que cette industrie a pris de l'autre côté du Rhin, depuis vingt-cinq ans. Il a mis en lumière tout ce que nos voisins sont parvenus à extraire du goudron de la houille, matières colorantes, substances médicamenteuses.

Ce goudron de la houille est chez nous un déchet presque sans valeur. Nous le produisons en quantité fabuleuse dans nos fours à coke, dans toutes nos usines à gaz, mais nous ne savons pas l'utiliser scientifiquement.

Nos industriels vont chercher au loin, en Afrique, en Suède, en Sardaigne, des minerais de fer, de cuivre, de zinc, de plomb, qu'ils manufacturent ici, et pour lesquels ils immobilisent des capitaux par millions, et ils ont sous la main des produits qui renferment des richesses inouïes, dont ils sont incapables de tirer parti.

Mais vous m'objecterez « nous avons en Belgique de nombreuses fabriques de produits chimiques ». Oui sans doute, mais que fabriquons-nous ? Les corps les plus communs, de la soude, de la potasse, les acides les plus simples, sulfurique, chlorhydrique, acétique, les sels pour les engrais destinés à la terre et puis c'est tout. Nous en sommes encore à l'enfance de l'art.

En lisant l'article de M. de Moussac, je me remémorais une scène inoubliable dont je fus le témoin il y a quelque vingt ans devant le grand institut chimique de l'Université de Bonn, voisin de l'Institut anatomique où je travaillais alors.

L'Allemagne fêtait le 70^{me} anniversaire de la naissance du grand chimiste Kékulé, Geheimrath et professeur à l'Université, dont les immortels travaux ont été le point de départ de toute l'industrie chimique. Dans les allées ombreuses qui entourent les instituts universitaires à Poppelsdorf, une manifestation grandiose s'organisait. La famille impériale, presque toutes les maisons régnantes, l'armée, la magistrature, les académies de tous les pays, les universités, avaient envoyé des délégations pour se joindre aux savants et aux étudiants qui honoraient le grand savant dont les recherches, les découvertes, et les élèves avaient tant contribué au développement des industries chimiques de son pays.

Je me disais à part moi : « Pourtant, cet homme, la Belgique aurait pu le garder chez elle quand il était professeur à l'Université de Gand ! Si notre gouvernement lui avait fourni alors le bel institut et les laboratoires superbes dont il dispose ici, toute cette industrie aurait pu naître dans mon pays ! »

J'interrogeai alors plusieurs personnes, des professeurs, des bourgeois, des étudiants de diverses facultés, tous avaient conscience de l'immense service que ce seul homme avait rendu à son pays, et de l'importante influence que ses découvertes avaient exercée sur la prospérité industrielle de sa patrie. J'admirais cette communauté, cette généralité de la reconnaissance nationale et j'en arrivais à conclure : Non, cette manifestation n'eût pas été possible en Belgique. Pourquoi ? Parce que dans notre pays les classes dirigeantes ne connaissent rien de la chimie ni des sciences naturelles ; nos hommes politiques sont tous des avocats, ils n'ont aucune formation scientifique, ni aucune compréhension des nécessités actuelles de la science.

Eussions-nous encore aujourd'hui un Kékulé parmi nos professeurs d'université, il ne trouverait pas plus aujourd'hui qu'il y a cinquante ans, dans notre pays, l'appui moral, l'encouragement des autorités ni le concours financier de nos capitalistes. Il ne serait pas mieux compris à l'heure actuelle par notre élite intellectuelle dont les préoccupations sont ailleurs. Parlez leur de chemins de fer, de tramways, de mines de charbon, à la bonne heure !

Le public belge capitaliste, dans l'immense majorité, est guidé dans le placement de son argent par une nuée d'agents de change qui derrière leur comptoir sont renseignés sur la valeur de toutes les entreprises industrielles ; mais, je mets au défi un savant belge de trouver 10 000 francs pour lancer un produit ou une invention purement scientifique qui n'aurait pas fait ses preuves à l'étranger !

Ce que je viens de vous dire des industries physiques et chimiques vous aura, je pense, suffisamment édifiés sur le côté pratique et sur l'importance économique de ces sciences dans le développement industriel des pays germains.

Vous aurez pu constater, d'autre part, en examinant ce qui se passe chez nous, combien nous sommes arriérés et combien les industries similaires de notre pays sont encore, hélas, embryonnaires et très primitives.

Je voudrais, en outre, vous donner un autre exemple non moins démonstratif de la transformation qu'on peut faire subir à des objets sans valeur intrinsèque en y mêlant quelques connaissances scientifiques.

Il existe actuellement en Allemagne plus de 150 maisons de commerce qui se sont fait une spécialité de la vente, la préparation, la récolte des objets d'histoire naturelle, animaux, végétaux, minéraux.

Vous pouvez vous procurer dans ces maisons, les animaux, les plantes, les roches du monde entier.

Les uns récoltent spécialement les insectes, les papillons, les coléoptères, d'autres les peaux d'animaux, d'oiseaux, les œufs de tous les oiseaux, les coquillages de toutes les mers, les coraux de tous les récifs du monde entier.

Ils fournissent ces spécimens aux collectionneurs, aux musées d'histoire naturelle, quand ils les ont au préalable déterminés, et fournis d'un état civil complet, c'est-à-dire qu'ils leur ont donné un nom scientifique, avec la mention de l'endroit précis d'origine.

Certains de ces objets sans aucune valeur, dans les mains d'un indigène ou d'un ignorant, deviennent un objet rare pour un savant, un objet de valeur pour un commerçant. Les Allemands, les Anglais, les Américains sont pratiques, ils se disent qu'une espèce animale, végétale, minérale nouvelle est une source de profits et de ressources pour une foule de personnes. En effet, elle occupe le naturaliste qui le recueille, le savant qui l'étudie ; celui-ci, pour la faire connaître, emploie un dessinateur pour la représenter, un peintre pour lui donner la couleur, un lithographe pour reproduire les dessins et aquarelles, un graveur, un imprimeur pour imprimer le mémoire qui en fournit la première description, et un éditeur pour vendre le livre.

Ces maisons de commerce envoient des chasseurs dans le monde entier, ils se réunissent et font les frais d'expéditions de recherches, les musées ont toujours des savants en voyage d'exploration.

Les objets étrangers et rares ne sont pas les seuls à présenter de l'intérêt pour le naturaliste, il est parvenu aussi à employer les objets les plus vulgaires dans un but éducatif.

Utilisant les connaissances d'anatomie et d'embryologie, il prépare, d'une manière intelligente, les animaux les plus vulgaires pour en démontrer l'organisation. On dissèque des pigeons, des poules, des chiens, des chats, des poissons, pour montrer les systèmes digestif, circulatoire, nerveux. On monte des squelettes, qui restent en partie recouverts de la peau de l'animal pour en faire saisir les rapports.

On recueille les œufs de grenouille, de poissons, en sériant les moments de la récolte et on parvient ainsi à donner dans des séries continues, tous les stades, toutes les formes, par lesquels ces animaux passent pour arriver à l'état adulte. C'est une vulgarisation sommaire d'une science trop peu connue : l'embryologie.

D'autres maisons se sont une spécialité de la fabrication des préparations microscopiques.

D'autres recueillent tous les objets qui peuvent démontrer les lésions et les maladies, et ils les préparent pour servir aux professeurs comme objets de démonstration dans les cours d'universités, d'instituts agricoles ou forestiers.

Une autre industrie très intéressante s'est imposé la tâche de fabriquer en carton pierre, en papier mâché, des modèles pour l'enseignement de toutes les sciences biologiques ; pour composer des tableaux muraux, reproduire artistiquement des scènes de la nature, qui font connaître aux enfants la faune et la flore de leur pays.

Je pourrais allonger encore l'énumération, mais je la crois pourtant suffisante pour vous faire comprendre que l'Allemagne fournit le monde intellectuel et enseignant de son matériel pédagogique.

Pendant que les Allemands, les Autrichiens, les Anglais, les Américains, qui s'inspirent des mêmes principes, entreprenaient cette conquête pacifique du monde, qu'avons-nous fait en Belgique dans cet ordre d'idées ?

Ce commerce scientifique est absolument inconnu chez nous, cette industrie créatrice du matériel pédagogique pour l'enseignement des sciences nous ne la connaissons pas. Nous n'avons jamais eu la pensée de la développer, parce que nous n'en sentons pas le besoin. Nous enseignons les sciences naturelles d'une manière mauvaise, insuffisante et superficielle, quand nous les enseignons, et à ceux qui en ont le plus grand besoin, aux prêtres, aux avocats, aux philosophes, nous ne les enseignons souvent pas du tout. Et pourtant c'est à eux que nous confions l'avenir, la direction morale et économique du pays.

Et pourtant les avertissements, les exemples ne nous ont pas manqué. Le grand savant que fut P. J. Van Beneden, nous avait montré tout ce qu'on pouvait espérer d'une étude systématique de la faune marine, il avait fondé la première station zoologique à Ostende. Aujourd'hui tous les peuples civilisés qui ont un peu de leur territoire au bord de la mer ont une station de biologie marine, la Belgique n'a pas encore la sienne !

Remarquez que nous avons sous la main tous les éléments nécessaires, les matières pour créer, pour utiliser tous ces objets naturels à l'éducation de nos enfants. Il faudrait seulement se pencher sur la terre pour les ramasser, mais nous préférons les laisser pourrir le long de nos chemins.

La Providence nous a, en outre, donné un champ immense et neuf d'exploration. Qu'en avons-nous jusque maintenant retiré au point de vue scientifique ?

La part qui revient aux Belges dans cette exploration est bien minime à côté de ce que les étrangers ont récolté là bas, sous nos yeux, avec l'appui de nos fonctionnaires, avec l'aide de toutes les autorités congolaises.

En effet, à ma connaissance sept expéditions parfaitement équipées, comprenant zoologues, botanistes, minéralogistes, anthropologistes, ont été envoyés au Congo par des musées anglais, américains, autrichiens, allemands qui ont rapporté de notre colonie les trésors scientifiques innombrables, qui remplissent ces musées étrangers.

Pendant ce temps il n'est jamais venu à l'idée des autorités belges ou congolaises d'y envoyer une mission scientifique belge. On a bien envoyé l'un ou l'autre botaniste, ou géologue, isolément, mais dans des buts exclusivement pratiques, et comme ils étaient des hommes de science, tels Laurent et Cornet, ils ont fait une très ample moisson, pour le court temps qui leur restait à employer aux recherches purement scientifiques. A toutes les suggestions qu'on a faites d'envoyer sur place des hommes compétents pour recueillir les objets d'histoire naturelle, il était répondu : « Nous ferons récolter tout cela par nos agents ». Or, ces agents n'ont aucune connaissance des sciences naturelles et l'on peut mesurer tout ce que nous aurions pu réaliser au Congo, aux magnifiques résultats obtenus par notre savant collègue De Wildeman avec l'aide du frère Gillet, si nous avions pu organiser la récolte et la recherche d'une manière vraiment intelligente.

Voulez-vous bien saisir le vice fondamental de notre éducation scientifique, réfléchissez bien aux faits suivants : Le duc de Mecklembourg, dans son exploration du Congo, a rapporté plus de deux mille espèces animales et végétales nouvelles. Les musées de Londres et de Berlin sont plus riches que notre musée de Tervueren, en espèces congolaises, et pour faire les travaux qu'on leur confie, les savants belges sont obligés d'aller à Berlin ou à Londres, et de s'adjoindre les collègues qui conservent ces collections étrangères.

C'est ainsi que Dubois, Matschie, De Wildeman et Warburg se sont réunis. Il arrive souvent ceci : c'est que nos savants belges arrivent à Berlin avec des espèces qu'ils croient nouvelles, et qu'on leur réponde : « En effet, c'est une espèce nouvelle, voici les épreuves du mémoire où nous allons la publier ! »

Tandis que nos nationaux ne trouvent aucun intérêt à la récolte des objets d'histoire naturelle, parce que leur éducation au pays natal a été absolument détournée de toute préoccupation scientifique. Les étrangers qui séjournent au Congo renvoient à leurs nationaux des quantités innombrables d'objets, dont nos savants belges apprennent l'existence par les revues étrangères.

Je ne puis me rappeler sans mélancolie une visite que je faisais au musée de Tervueren en compagnie de deux anciens congolais, officiers d'ailleurs distingués. En entrant dans la salle des mammifères, l'un d'eux s'écrie : « Tiens c'est ça le fameux okapi dont on a tant parlé dans la presse ; mais je le connais très bien cet animal là, j'ai en mangé plusieurs fois, c'est très bon ! » Voilà tout l'intérêt que le curieux animal avait excité chez mon compatriote ! Il ne pouvait en croire ses oreilles quand je lui appris que la peau de l'animal, qu'il n'avait pas même eu l'idée d'écorcher proprement, avait été vendue 15 000 francs.

Un des autres résultats de cette déplorable méthode de récolte, c'est que la moitié des objets que vous verrez au musée de Tervueren portent des indications fausses sur la localité de la récolte. Les objets portent l'indication du chef-lieu du district d'où on les a expédiés. Comment y sont-ils parvenus ? Par qui ont-ils été récoltés ? En quel endroit ? Est-ce une plaine, une montagne, un marécage ? On ne sait. On indique bien parfois une région, de l'Est par exemple. Savez-vous ce que représente cette région de l'Est ? Elle s'étend depuis l'Arruwimi jusque Buluwayo ! Quelle est la cause de cet état d'esprit lamentable ? Ignorance et insuffisance d'éducation scientifique. Le Belge en dehors de sa profession ayant une culture générale insuffisante s'ennuie à son poste de colonisateur, tandis que l'Allemand, l'Anglais, qui ont une idée générale du monde entier, trouvent partout et en tout une occasion favorable de mettre leurs connaissances scientifiques à profit, ce qui leur procure une occupation saine et intellectuelle, dont la science et l'humanité entière tireront des découvertes qui auront peut-être des conséquences incommensurables.

Il y a une seule science naturelle que nous soyons parvenus à industrialiser convenablement, c'est la botanique, l'horticulture et l'agriculture. Pourquoi ? Parce que c'est précisément dans ce domaine que les idées de saine pédagogie et d'enseignement scientifique ont été le mieux réalisées sous la vigilante impulsion de notre savant collègue le professeur Proost. Nous avons eu des hommes comme Van Hout, Lynden, Carnoy, Errera, qui ont transporté dans la pratique leurs connaissances scientifiques. Ils ont organisé des expéditions pour aller dans tous les pays du monde récolter les espèces nouvelles de plantes, des orchidées au Brésil, des palmiers en Afrique, et nous sommes pourtant dépassés sur ce terrain par les Allemands et les Américains. Je n'ai jamais visité plus belles pépinières, plus belles plantations que celle de Burbanck en Californie, qui, à l'heure actuelle, a produit par sélection plus de 1200 variétés de fleurs et de plantes.

Nous sommes fiers de nos floralies gantoises et à juste titre, mais elles sont dépassées par celles de San-Francisco en intérêt purement scientifique. J'y ai vu exposées en quantité innombrable quarante variétés de fleurs nouvelles, gagnées en une seule année par Burbanck. Il en est de même en pomologie, j'ai vu à l'exposition de Buffalo plus de 200 variétés de pommes gagnées et cultivées en grand sur le sol américain, fruits admirables que vous voyez aujourd'hui chez tous nos marchands de primeurs et que les Américains exportent dans le monde entier.

En voilà assez pour vous faire comprendre que le développement de toutes ces industries repose sur l'esprit d'observation et l'éducation scientifique des peuples où elles se sont si magnifiquement épanouies. Si elles ont pu trouver dans le public des encouragements, des initiatives, cela ne tient pas uniquement au côté professionnel de l'éducation, mais à la formation générale, à la culture scientifique généralisée, qui éclaire l'intelligence populaire, sur les nécessités modernes de la science et sur les applications pratiques toujours plus nombreuses.

Ce n'est pas en Belgique qu'un opticien enverrait son fils à l'Université pour y faire un doctorat en sciences physiques et mathématiques, qu'un empailleur ferait faire à son fils un doctorat en sciences zoologiques pour qu'il devienne un naturaliste éclairé ! Nos jeunes gens en possession de leur parchemin ne rêvent qu'une chose : devenir professeurs ou fonctionnaires ! En Allemagne, toutes ces professions sont devenues aujourd'hui des prolongements de l'enseignement scientifique, parce que celui-ci a élargi leur horizon en élevant leur niveau intellectuel ; tandis que chez nous ceux qui les exercent sont restés de simples trafiquants. Nous sommes victimes du professionnalisme.

J'estime, après une enquête personnelle, que les industries allemandes que je viens de vous esquisser sommairement occupent d'une manière très rénumératrice plus de 250 000 personnes des deux sexes.

L'idée de vous en entretenir aujourd'hui m'est venue en pensant à nos ouvriers belges auxquels la France veut interdire l'accès de son territoire. Il m'a paru urgent et opportun de signaler que nous avons encore chez nous les moyens de les occuper et de les diriger vers des professions plus intellectuelles en leur enseignant à tirer parti des objets d'histoire naturelle.

Les nations qui ont développé chez elles l'enseignement scientifique sont incontestablement aujourd'hui les éducatrices du monde civilisé, parce qu'il a un retentissement profond sur tout le caractère national.

Il suffira pour en percevoir les effets frappants de regarder autour de vous.

Les pays de race germanique et anglo-saxonne ont été les premiers à comprendre le rôle vraiment éducatif des sciences de la nature. Ils ont vu avec une clairvoyance admirable que la condition primordiale d'une bonne éducation, c'est d'avoir une idée précise, exacte de la réalité.

Ils ont compris qu'un littérateur avant d'entreprendre la description d'un paysage doit au moins connaître les choses qu'il veut décrire et savoir les appeler par leurs noms.

Ils ont pénétré la pensée de saint Thomas d'Aquin quand il dit : *Nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu.* Rien n'existe dans l'intelligence qui n'y soit éveillé par le moyen des sens, autrement dit par la méthode expérimentale, par l'observation de la nature (De Give).

Le développement et l'exercice conscient de nos moyens de perception a été considéré par eux comme une partie importante de toute formation de la jeunesse.

Voilà, je crois, la vraie raison de la supériorité de l'Allemagne et des pays anglo-saxons sur les peuples latins. Les uns préparent leurs jeunes gens à la vie réelle en leur donnant un aperçu général de l'univers, du milieu où ils auront à lutter pour l'existence. Ils sont armés pour la lutte, ils connaissent le sol sur lequel ils marchent et savent qu'on peut y trouver des pépites et des perles même dans les fumiers.

Les peuples latins sous prétexte d'idéalisme nourrissent leurs enfants, pendant tout le temps de l'écolage, de fictions, d'histoires plus ou moins chevaleresques, qui les entraînent une fois dans la vie publique à la poursuite d'utopies irréalisables.

Lancés après une telle préparation dans un monde qu'ils ignorent, ils y apportent leurs systèmes intangibles, leurs illusions poétiques, leurs idées arrêtées. Ils sont butés sur une formule !

Ils veulent résoudre les questions sociales avec des règles absolues comme des théorèmes de géométrie, sans tenir compte des contingences et de l'imperfection de notre pauvre nature humaine.

N'est-ce pas le socialisme français triomphant et généralisé ! Or, ce n'est un secret pour personne, les peuples latins sont ceux qui font le moins de sacrifices pour les progrès de la science, qui paient le plus mal leurs savants, qui leur donnent les moyens de travail avec le plus de parcimonie. Pourquoi ? Parce que chez eux les classes dirigeantes, imprégnées d'idées païennes, du culte exagéré de la Beauté conventionnelle et de la mode, sont la proie du dilettantisme ou du snobisme. On les a élevées en les nourrissant de grec et de latin, et on leur a fermé les yeux devant le grand livre de la Nature, la source de toute vraie Beauté.

Les peuples latins sont les plus ignorants des choses de la Nature, parce qu'on ne les enseigne pas dans leurs collèges !

Nous sommes encore trop latins dans nos méthodes et dans nos programmes, et aussi longtemps que nous ne nous serons pas affranchis de cette tutelle, pour adopter franchement la pédagogie et les méthodes anglo-saxonnes, nous assisterons impuissants au triomphe de nos voisins.

R. P. H. Bolsius, S. J., président de la section. Votre nombreuse assistance, Messieurs, prouve bien l'intérêt qui vous anime pour la question. Permettez-moi avant d'ouvrir la discussion mise à l'ordre du jour de proposer :

1° que celui qui a obtenu la parole, *ne dépasse pas* les 10 minutes ;

2° que chaque orateur soit entendu *en silence,* sans interruptions, ni exclamations des auditeurs ;

3° que des questions *personnelles,* qui font dévier la discussion, au détriment de la question en litige, soient absolument écartées.

La section approuve-t-elle ce règlement ? Puisqu'il n'y a pas d'opposition, je le déclare adopté et donne la parole à M. le Dr H. Lebrun (1).

M. H. Lebrun. Je dois d'abord vous remercier cordialement d'avoir répondu à l'appel de la *Société scientifique,* le seul fait de votre présence indique suffisamment que la question mise à l'ordre du jour est d'une pressante actualité.

Il ne sera pas inutile de bien préciser en commençant les motifs qui m'ont décidé à écrire le rapport qui va être soumis à vos discussions.

Tous, comme moi, vous aurez entendu depuis vingt ans les doléances des professeurs d'Université, sur l'insuffisance de la préparation de notre jeunesse à recevoir un enseignement vraiment supérieur.

Tous mes collègues des Facultés de Sciences sont unanimes à déplorer le peu de formation des élèves en ce qui concerne les sciences naturelles et surtout les sciences biologiques.

Un défaut que tous constatent, c'est le peu d'aptitude des élèves à faire une observation personnelle consciente.

Il n'y a rien à cela de bien étonnant, attendu qu'on néglige trop de faire l'éducation de leur faculté d'observation.

Or, depuis quelque vingt-cinq ans, depuis le temps où M. Proost à cette même tribune en préconisait l'introduction dans nos collèges, la question du rôle éducatif des Sciences naturelles n'a plus été agitée dans les séances de la *Société scientifique.*

---

(1) Les personnes qui ont pris part à cette discussion sont responsables des idées exprimées à la suite de leur nom, mais non de celles qui, dans le courant de la discussion, leur sont attribuées par leurs contradicteurs et que, faute de temps, elles n'ont pu rectifier *(Secrétariat de la Société scientifique).*

Il m'a paru opportun de ramener votre attention sur cette question en considérant les réformes et les progrès accomplis dans ces branches, en Allemagne et en Amérique.

Elle y a été longuement discutée par les personnalités les plus compétentes et les plus autorisées et j'ai fait connaître en langue française la solution que l'Allemagne lui a donnée après un examen approfondi.

Il m'a semblé que pareilles préoccupations en ce qui concerne notre pays ne seraient pas déplacées dans nos débats, au moment où l'on agite dans d'autres milieux la question de la réforme des humanités.

Or, parmi les personnes que cette réforme préoccupe officiellement les naturalistes sont plutôt rares ! Il m'a semblé que nous, membres d'une Société qui embrasse toutes les sciences dans son champ d'activité, nous pourrions bien avoir aussi quelque chose à dire, quelques idées à exprimer, quelques arguments à faire valoir en faveur de l'enseignement des Sciences.

Cela m'a paru nécessaire pour éclairer les autorités que la chose concerne, et leur donner ainsi une base d'appréciation plus large, une information plus complète de ce que pensent sur ce sujet les hommes de science catholiques.

Pour donner une forme concrète à ces desiderata, j'ai examiné quel retentissement a eu sur la vie publique allemande l'enseignement des sciences naturelles.

J'ai signalé l'éclosion d'un grand nombre d'industries qui se sont imposé comme but immédiat la recherche scientifique et l'exploitation industrielle des découvertes ainsi obtenues.

Ainsi fut constatée l'absence presque complète d'industries similaires en Belgique et j'en ai recherché la cause.

Je crois l'avoir découverte dans l'insuffisance de notre enseignement scientifique du degré moyen.

Si l'on réfléchit au fait que 10 °/₀ seulement de la population de ces écoles se destinent aux carrières universitaires, et que les 90 °/₀ restants rentrent dans leurs familles après sept années d'études, sans avoir reçu une éducation vraiment humanitaire et scientifique, on ne s'étonnera plus que le peuple belge se désintéresse de ces industries scientifiques.

En outre, dans nos plus grands collèges, les jeunes gens arrivent au terme de leurs études sans avoir la moindre notion des sciences biologiques, des sciences de la vie. Or, j'estime qu'on ne peut prétendre avoir formé un homme, si on lui laisse ignorer les lois les plus fondamentales et les plus élémentaires de la vie.

Les conclusions qui découlent naturellement de la question fondamentale que j'ai ainsi soulevée sont les suivantes : Si les industries purement scientifiques sont les industries de l'avenir, si aujourd'hui un homme ne peut prétendre à une culture supérieure sans connaissances scientifiques, faut-il continuer à nos jeunes gens une éducation presqu'exclusivement formelle et linguistique ?

Ou bien faut-il donner à cette éducation un caractère à la fois réel et formel, c'est-à-dire vraiment scientifique ?

Nous pourrons en même temps nous demander s'il est bien nécessaire, au point de vue général de l'éducation, de rechercher un développement harmonieux de toutes les facultés, et quels sont les meilleurs moyens de l'atteindre.

Pour répondre à ces questions nous devrons rechercher :

1° Si les programmes et les méthodes employées réalisent bien ce développement de toutes les facultés de l'enfant.

2° Si l'introduction dans les programmes d'une étude de la nature suivie d'un enseignement des sciences naturelles pourrait y contribuer.

3° Quelles modifications il conviendrait d'apporter aux programmes pour qu'ils atteignent ce but.

Je ne vous apporte pas de réponse toute faite à ces questions, je demande seulement qu'on les soumette à vos délibérations ; et je me berce de l'espoir qu'avec la bonne volonté et la courtoisie qui sont les caractéristiques de notre Société, nous parviendrons aisément à leur donner une solution pour le plus grand bien de la Patrie.

En d'autres termes nous aurons à examiner objectivement s'il est utile, pour l'éducation de nos enfants, de leur donner une idée générale du monde réel par une étude continue et ininterrompue de la Nature, avant qu'ils se spécialisent dans leurs professions. Il sera peut-être utile toutefois que vous connaissiez l'avis des pédagogues allemands et américains.

Ceux-ci estiment qu'un enseignement scientifique de deux heures par semaine, dans toutes les classes, est suffisant pour donner aux sens de l'enfant et à sa faculté d'observation un développement régulier.

M. Mansion expose les arguments suivants qu'il avait déja développés en avril 1910.

I. *Au Congrès de Malines.* Nous croyons que les souvenirs de M. Lebrun sur le Congrès de Malines ne sont pas entièrement exacts. Voici, selon nous, comment les choses se sont passées.

M. Lebrun a présenté au Congrès, *dans l'une des sections,* un rapport sur la nécessité d'introduire l'enseignement des sciences naturelles (1) dans toutes les classes des humanités des collèges catholiques.

J'ai combattu cette proposition pour les raisons que j'ai exposées depuis longtemps à la *Société scientifique de Bruxelles* et au Congrès de l'enseignement moyen de 1901, et j'ai fait une contre-proposition qui résumait mes critiques : enseigner les sciences biologiques après la physique et la chimie dans une classe spéciale à créer après la rhétorique; on y enseignerait aussi l'allemand et l'anglais.

La proposition de M. Lebrun et la mienne ont été toutes deux rejetées par la section, pour des raisons dont on trouvera l'exposé dans le Compte rendu du Congrès.

Dans une autre section, ou plutôt, en réalité, dans une séance plénière du Congrès, le R. P. Verest a fait un rapport *sur la nécessité de maintenir et de relever les humanités gréco-latines.* Il y combattait les vues de ceux qui veulent remplacer les humanités gréco-latines par des humanités modernes sans grec ni latin ; il ne s'est pas occupé du rapport de M. Lebrun et ce n'est qu'incidemment que, pour les sciences physiques et naturelles, il a signalé, en s'y ralliant, ma proposition de 1901.

Mais la section du Congrès à laquelle s'adressait le rapport du P. Verest n'a rien voté relativement à l'enseignement des sciences physiques et naturelles ; ce qu'elle a admis, c'est la thèse du rapporteur touchant la supériorité des humanités gréco-latines sur les humanités modernes au point de vue éducatif général.

---

(1) M. Lebrun désigne par ces mots, suivant l'usage allemand (*Naturwissenschaften),* ce que l'on appelle en France *sciences physiques* (physique, chimie et, si l'on veut, astronomie) et *sciences naturelles* (minéralogie et géologie, botanique, zoologie, biologie, etc.).

II. *Le programme allemand de Méran n'est pas le programme suivi dans les gymnases de l'Allemagne ; ce n'est qu'un projet.*

M. Lebrun appelle programme allemand *un projet de programme* voté dans sa réunion de Méran, en 1906, par la *Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aertzte.* Les physiciens, chimistes, biologistes et médecins qui, réunis à des délégués de sociétés d'ingénieurs, ont voté le programme de Méran, conformément aux résolutions antérieures, appelées thèses de Hambourg, *condamnent*, par là même, *le programme actuel de l'enseignement des sciences physiques et naturelles* dans les gymnases, Realgymnases et Oberrealschulen de l'Allemagne.

En effet, d'après ce programme actuel, sauf les deux circulaires ministérielles du 19 mars 1908 et du 4 novembre 1910, on enseigne les sciences biologiques AVANT — avant seulement — la physique et la chimie et, par suite, comme l'affirment nettement les thèses de Hambourg, l'enseignement biologique de ces établissements est sans base scientifique et *sans portée éducative générale* (¹).

C'est précisément ce que j'ai soutenu au Congrès de l'enseignement moyen en 1901 et au Congrès de Malines en 1909.

Dans les lycées français, au contraire, après comme avant la réforme des programmes en 1902, il y a toujours eu un solide enseignement de la biologie, après celui de la physique et de la chimie.

Il suffit pour s'en convaincre de consulter les programmes d'après et d'avant 1902. Il y a d'ailleurs, dans ces lycées, un premier enseignement élémentaire de la zoologie et de la botanique dans les classes inférieures.

De fait, c'est donc en France que les thèses de Hambourg et le programme de Méran sont à peu près réalisés ; en Allemagne, thèses et programme n'existent encore qu'à l'état de vœux et de projet.

III. *L'Allemagne a conquis et détient l'hégémonie du mouvement scientifique contemporain*, dit M. Lebrun.

(¹) Cfr. à la fin de ces Notes le texte de la thèse de Hambourg, à laquelle je fais allusion.

C'est là une assertion bien grave et il faudrait des connaissances bien vastes dans tous les domaines pour justifier pareille assertion. En mathématiques, en astronomie, en physique, en chimie, il serait facile de citer des noms de savants créateurs français devant lesquels tout le monde s'incline, en Allemagne comme ailleurs.

En biologie, même les profanes savent qu'aucune célébrité étrangère ne peut être mise aussi haut que Pasteur.

IV. *Sur l'enseignement des sciences [physiques et] naturelles dans les Universités belges*, d'après M. Lebrun.

Pour réfuter ces critiques, il suffit de rappeler quelques noms de savants belges qui se sont acquis une renommée européenne : le physicien J. Plateau, le chimiste Stas, le géologue André Dumont, les deux biologistes J. P. Van Beneden et Éd. Van Beneden et, avant eux tous, d'Omalius d'Halloy. Nous ne citons que des morts. C'est en Belgique que Schwann et Kékulé ont fait leurs découvertes fondamentales. Tous d'ailleurs ont eu des disciples et des continuateurs qui font bonne figure dans le monde scientifique.

V. *Suivant M. Lebrun, nous n'avons en Belgique que très peu d'industries dont la base scientifique se trouve dans les sciences [physiques et] naturelles.*

En réalité, M. Lebrun prouve uniquement que nous ne fabriquons pas des instruments de précision (optique, électricité, etc.), que l'industrie des dérivés du goudron de houille n'existe pas en Belgique, et que nous importons d'Allemagne notre matériel pédagogique. Il énumère lui-même, mais sans y insister assez, nombre d'industries belges fondées sur les sciences de la nature (mécanique appliquée, physique, chimie, géologie, sciences biologiques) de manière qu'il se réfute lui-même : construction des machines, métallurgie, verrerie, agriculture, zootechnie, horticulture, arboriculture, fabriques de soude, de potasse, d'acides divers, d'engrais chimiques, exploitation des mines et il serait facile d'ajouter à sa liste beaucoup d'industries qu'il ne cite pas : fabrication de l'éther, de la soie artificielle, de la poudre à canon, des armes de guerre, constructions navales, sucreries, etc.

Les Belges ne font pas *tout*, sans doute, *parce que* notre pays n'est pas grand et qu'*en industrie surtout, il y a lieu d'appliquer entre les diverses nations le principe de la division du travail.*

VI. *Kékulé.* D'après son autobiographie, c'est en France, chez Gerhardt, que Kékulé a rencontré le plus d'encouragement pour ses vues théoriques sur la valence des éléments ; c'est en Belgique qu'il a trouvé une chaire et un laboratoire (1858) ; c'est en Belgique qu'il a fait sa découverte fondamentale sur C_6H_6. J'ai eu la chance de suivre son cours de chimie, à cette époque. La mort de sa femme, qui brisait tous les liens qui l'attachaient à la Belgique, et l'appel de l'Université de Bonn occasionnèrent, en 1867, son retour en Allemagne, où il avait été méconnu dans sa jeunesse (il avait été deux ans privat-docent à Heidelberg avant de venir à Gand). Nos lois ne permettaient pas, au reste, de lui offrir une position équivalente à celle qu'il allait occuper à Bonn. Mais ni lui, ni personne, ne pouvait prévoir quelles découvertes de chimie appliquée allaient sortir de ses études théoriques sur la benzine et la série aromatique ; lui-même s'étonnait un jour d'être nommé président d'honneur d'un Congrès de *chimie appliquée* à Berlin. Fût-il resté en Belgique, d'ailleurs, rien ne prouve que les industries chimiques qui ont été la conséquence de ses découvertes se fussent développées dans notre pays : *ce sont les conditions économiques de chaque pays qui y provoquent le développement de telle ou telle industrie.*

VII. *Le Congo.* M. Lebrun a prouvé que les étrangers plus que les Belges ont pu explorer le Congo, au point de vue scientifique, dans le domaine de la botanique et de la zoologie (¹), et que les agents de l'État Indépendant n'ont pas contribué autant qu'on eût pu l'espérer à enrichir le Musée Colonial de Tervueren.

Nous voulons bien passer condamnation sur ce point. Mais le Souverain du Congo, surtout au début de son entreprise, n'a pas toujours pu choisir ses agents dans une élite. Il faut tenir compte aussi de l'immensité de la tâche : prendre possession d'un territoire grand comme l'Autriche, l'Allemagne, la France et la Péninsule Ibérique réunies et en chasser les trafiquants d'esclaves était la première œuvre à accomplir et Léopold y a réussi. D'ailleurs il a aussi fait explorer, au point de vue scientifique et industriel, les richesses minières et végétales du Congo. Il a provoqué et fait

---

(¹) C'est ici, en particulier, que M. De Wildeman est intervenu dans la discussion, pour confirmer les renseignements donnés par M. Lebrun (P. M.).

publier des monographies savantes sur les lianes à caoutchouc, sur l'Okapi, etc. et a encouragé les recherches sur la maladie du sommeil et les autres maladies tropicales.

Il est naturel que des amateurs étrangers, sans responsabilité, *et moins enclins à la critique que les Belges* aient pu, sous la protection des agents du Congo, s'occuper de recherches théoriques sur la flore et la faune du Congo : Léopold II employait son personnel à des besognes plus pressantes au point de vue politique et social.

VIII. *Critique de l'enseignement des sciences physiques et naturelles dans les établissements belges d'enseignement moyen.*

Selon M. Lebrun, « nous enseignons les sciences naturelles d'une manière mauvaise, insuffisante, superficielle, quand nous les enseignons, et à ceux qui en ont le plus grand besoin, aux prêtres, aux avocats et aux philosophes, nous ne les enseignons souvent pas du tout. »

Il y a là une exagération tellement manifeste que nous croyons que M. Lebrun n'a pas consulté les programmes récents des athénées ou des collèges libres.

Dans tous ces établissements, on enseigne au moins la physique élémentaire, en rhétorique ou en rhétorique et poésie.

Dans tous les athénées et collèges communaux, dans presque tous les collèges libres, dans toutes les écoles moyennes, on enseigne les éléments de chimie, de botanique et de zoologie. Tous les aspirants au sacerdoce, pendant leurs années de philosophie, au petit séminaire, ont un enseignement complémentaire de sciences naturelles. Dans les Universités, tous les futurs philosophes et avocats apprennent des notions d'anatomie et de physiologie.

Presque tous ceux qui passent par l'enseignement secondaire ont donc en Belgique, comme ailleurs, un enseignement des sciences physiques et naturelles.

En Belgique comme partout, sauf en France, la partie de cet enseignement qui se rapporte aux sciences biologiques est, selon nous, sans grande portée éducative, non parce qu'on les enseigne plus mal qu'ailleurs, mais pour les raisons que nous avons développées au congrès de l'enseignement moyen de 1901, à Malines en 1909, et dont on retrouve la principale dans les thèses de Hambourg : *On ne peut enseigner scientifiquement la biologie qu'après* *la physique et la chimie.* « Ce n'est que quand l'étudiant aura acquis une certaine connaissance de la physique et de la chimie, disait Huxley il y a plus de trente ans, que l'enseignement systématique de la biologie pourra être fructueux pour lui, car si les phénomènes de la vie dépendent des forces vitales et non des forces physiques ou chimiques, les résultats de ces phénomènes sont pourtant des changements physiques et chimiques qu'on ne peut bien comprendre qu'à l'étude des lois de ces deux sciences *(Lay Sermons,* traduction française. p. 129). »

NOTE. Voici le texte de deux thèses de Hambourg auxquelles j'ai fait plusieurs fois allusion et que je n'avais pas sous la main pendant la discussion d'avril 1910.

I. « Une connaissance du monde organique doit être considérée comme un élément indispensable d'une culture générale appropriée au temps présent. Elle ne profite pas seulement au futur naturaliste ou au futur médecin à qui elle facilite l'accès de leurs études spéciales, mais elle a une importance tout aussi grande pour ceux qui, au sortir des études secondaires, ne trouveront plus, dans leur carrière, une occasion directe de se livrer à l'étude de la nature. »

II. « L'enseignement actuel des sciences naturelles ne peut atteindre ce but, parce qu'il est exclu des classes supérieures et que — comme l'expérience nous l'apprend — seuls les élèves qui ont acquis plus de maturité et qui possèdent les principes fondamentaux de la physique et de la chimie, peuvent comprendre les processus biologiques et les relations des différents organismes avec leur milieu. »

IX. *Remarques.* 1° A propos du texte ancien attribué à S. Thomas : *Nihil est in intellectu quod non fuerit prius in sensu,* j'ai fait remarquer que sous cette forme incomplète, il impliquerait la négation *a priori* de toutes les sciences du monde spirituel et moral. Il faut y ajouter au moins : *nisi ipse intellectus.* De ce texte complet, on déduit aisément l'ordre d'importance décroissante des branches de l'enseignement secondaire : *A)* religion ; langues et littératures anciennes et modernes ; mathématiques ; *B)* histoire et géographie ; sciences physiques ; sciences naturelles. 2° Enfin, j'ai aussi signalé une cause spéciale qui, en Belgique, restreint plus qu'ailleurs la part accordée aux sciences naturelles : nous devons, outre les langues anciennes et les grandes langues étrangères, apprendre à fond nos deux langues nationales : le français et le flamand. En Hollande, la même situation n'existe pas : on n'est pas forcé de savoir le français aussi bien qu'en Belgique ; il suffit de le savoir comme l'allemand et l'anglais.

Dans les Athénées belges, on consacre 55 heures de leçons au français et au flamand, en sept ans ; en Hollande, dans les gymnases, 24, en six ans.

En réponse à une affirmation de M. H. Lebrun, MM. *A. Renier*, *Van Ortroy*, le R. P. *Bosmans, S. J.* signalent, parfois avec noms à l'appui, la présence d'assez nombreux prospecteurs belges au Katanga. Aussi M. *Deroitte* estime-t-il qu'il faut saper la légende que nous n'avons pas d'hommes compétents à envoyer dans les districts miniers de la Colonie.

M. le Dr *Swolfs*. Il ne faut pas seulement réformer l'enseignement moyen, mais aussi l'enseignement supérieur. Les progrès réalisés ne sont pas suffisants ; des professeurs en sont encore aux anciennes pratiques, donc aux anciens errements.

M. *Kaisin*. C'est l'enseignement moyen qu'il faut d'abord reviser ; il est à la base de l'édifice. Si de nombreux titulaires de chaires universitaires belges se rendent en Allemagne, avant de professer, ce n'est pas que notre enseignement supérieur soit défectueux ; mais ils veulent s'initier à d'autres méthodes et remédier à la formation, trop sommaire, qu'ils ont subie pendant leurs études moyennes. Il ne faut pas conclure d'ailleurs de cette pratique, qui est excellente, qu'il faille bouleverser tout le programme des études latines et grecques. Conservons-les jalousement ; elles nous ont fait trop de bien.

J'ajoute au surplus que les professeurs d'université sont incompétents pour procéder à la réforme de l'enseignement moyen.

R. P. *Bolsius*, *S. J.* M. Mansion trouve que l'élève marche, de degré en degré, vers la connaissance du latin et du grec. Pourquoi ne pas appliquer le même système aux sciences ? La faculté d'observation, si essentielle, si précieuse, se développera au grand avantage des jeunes gens, qui seront bien préparés de la sorte à l'étude des sciences naturelles. Quant aux matières comprises dans les programmes, je ferai observer à M. Mansion, en ma qualité de Hollandais, que les Belges n'ont que deux langues à apprendre, en dehors de leurs langues nationales ; dans les Pays-Bas au contraire, nous devons, pour nous mettre à la hauteur de nos voisins du Sud, posséder, outre le néerlandais, trois langues étrangères : français, anglais et allemand.

R. P. *Bosmans*, *S. J.*, est d'avis d'ajouter, aux humanités actuelles, une 7^e année. Pour les mathématiques, cela se pratique avec succès aux collèges S^t-Louis et S^t-Michel, à Bruxelles, S^t-Servais, à Liége, et Notre-Dame, à Anvers, en vue d'une catégorie spéciale d'élèves.

R. P. *De Munnynck*, *O. P.*, examine la question des humanités en psychologue. Se basant sur le témoignage d'un maître illustre, M. le professeur Henry, il note que la plupart des élèves, arrivant à l'Université pour y aborder l'étude des sciences, y perdent au début un temps considérable. C'est qu'ils n'ont pas été initiés, au cours de leurs humanités, à l'observation de la nature, ce qui n'implique pas nécessairement la science de la nature. Si l'esprit d'observation des jeunes gens était développé, on pourrait peut-être ne pas allonger le temps consacré aux humanités.

M. l'abbé *Lenssen* demande que les sciences naturelles jouent un rôle plus accentué dans l'enseignement moyen. Il montre, par des exemples, combien il est aisé de les enseigner aux élèves des humanités anciennes, et demande que deux heures par semaine soient consacrées à cet objet ; ce temps sera employé à aiguiser l'esprit critique des élèves.

R. P. *Castelein*, *S. J.* Sans me rallier au réquisitoire de M. Mansion, je dois dire que je reste un partisan convaincu des études gréco-latines traditionnelles, qui ont pour but la formation complète de l'esprit. Tout aussi bien que les sciences naturelles, y compris la biologie, elles éveillent l'esprit d'observation des élèves, et leur apprennent à réfléchir, à induire et à déduire. Aussi faut-il laisser intact le programme du latin et du grec, si l'on juge opportun de réformer et de développer l'enseignement des sciences.

M. le chanoine *Remy* reconnaît que l'ignorance des sciences naturelles l'a souvent embarrassé ; il en souffre surtout en ce moment où l'enseignement géographique prend une orientation si radicalement différente de ce qu'il était autrefois. Mais s'il est partisan de l'enseignement des sciences naturelles, il est entendu que ce n'est pas au détriment des études gréco-latines.

R. P. *Mélotte, S. J.* Sans toucher le fond de la question, je me demande si la réforme des humanités gréco-latines, avec introduction des sciences naturelles, est *possible*.

M. *Mansion*. Je demande à ajouter un mot : 1° Le programme de Méran, pour la physique, est impraticable dans n'importe quel établissement secondaire, parce qu'il introduit en cinquième, en troisième et en seconde, des théories qui présupposent la connaissance du calcul infinitésimal. En revanche, l'enseignement scientifique de la biologie après la physique et la chimie, que nous défendons depuis longtemps, est recommandé de plus en plus, en Prusse, par des circulaires ministérielles (19 mars 1908 ; 4 novembre 1910). 2° *Observer = faire attention à.* Les enfants et les jeunes gens observent sans cesse spontanément, chacun à sa manière *(receptum est in recipiente per modum recipientis). Mais ils n'observent pas ce que les naturalistes voudraient, d'une manière prématurée, leur faire regarder attentivement,* et ils ont raison. L'enseignement prématuré de la biologie, avant la physique et la chimie sur lesquelles il doit s'appuyer pour être éducatif, est fatalement donné par voie d'autorité. Il produit la crédulité scientifique, si répandue même chez les naturalistes de profession : qu'on se souvienne de leur long engouement pour *l'évolutionnisme sous forme darwinienne*, dont ils ont honte aujourd'hui. 3° Les branches de l'enseignement moyen les plus fortement éducatives sont celles du groupe *A* signalé plus haut : *religion*, *langues et littératures anciennes et modernes*, *mathématiques*, parce que *ce que les élèves apprennent sur ces matières, ils le possèdent vraiment comme leurs professeurs.* Les branches du groupe *B*, au contraire, qui reposent en dernière analyse sur le témoignage d'autrui, ne peuvent être connues *scientifiquement* qu'à l'université et encore par le petit nombre de ceux qui en poussent l'étude assez loin et ont, à la fin, acquis l'esprit critique. 4° La vraie discipline de l'attention, de l'observation intelligente, c'est surtout, au collège, dans l'étude des langues anciennes qu'elle se pratique sans cesse ; on ne peut traduire une ligne d'un classique latin ou grec, ni faire un thème sérieux, sans mettre en jeu simultanément toutes ses facultés. De là, la supériorité souvent constatée, dans les universités et les écoles spéciales, des humanistes sur les non-humanistes, toutes choses égales d'ailleurs. On l'a signalée tout récemment encore, pour les ingénieurs commerciaux, dans le Rapport sur l'École de Commerce Solvay à Bruxelles. 5° Il est donc juste et conforme aux vraies exigences de la pédagogie de laisser aux langues anciennes la place privilégiée qu'elles ont dans les études d'humanités ; les élèves, d'ailleurs, pas plus que les maîtres, ne peuvent qu'exceptionnellement avoir à la fois deux enthousiasmes, deux amours, celui des lettres et celui des sciences. Celles-ci doivent être représentées dans les collèges surtout par les mathématiques élémentaires, qui initient sérieusement les jeunes gens aux idées de nombre et de forme (à la quantité), tandis que les autres branches principales du programme les familiarisent, d'une manière concrète, avec les idées morales et religieuses qui sont le patrimoine deux fois millénaire de l'humanité civilisée.

M. *H. Lebrun.* Il ne s'agit nullement, dans la présente discussion, de la supériorité des humanités gréco-latines sur les humanités modernes. Je ne me suis jamais occupé, ni exprimé de quelque manière que ce soit sur cette question. J'ai cité un passage du P. Verest et M. Mansion doit bien reconnaître que la citation est exacte.

Je me suis déclaré partisan convaincu des humanités gréco-latines, mais complétées par un enseignement scientifique de deux heures par semaine. M. Mansion et le P. Verest se sont prévalus de l'opinion d'ingénieurs, médecins, militaires et savants allemands pour maintenir et renforcer les humanités gréco-latines. Ils ont raison de se prévaloir de pareils témoignages ; mais j'ai raison aussi, je pense, de faire connaître l'opinion de ces mêmes personnes sur l'enseignement des sciences.

En publiant ma brochure *(Moins de Grec et de Latin. Plus de sciences naturelles)*, j'ai voulu opposer à l'opinion très répandue encore dans notre pays, que les sciences naturelles n'ont pas de valeur éducative, celle des naturalistes et savants allemands les plus éminents de l'Allemagne tels que Verworn, Hertwig, Waldeyer, Detmer, Reinke.

Toutes les sociétés scientifiques allemandes se sont ralliées au programme de Méran sans exception.

Celles-ci, après avoir discuté la question pendant quatre années consécutives, estiment au contraire que l'enseignement des sciences naturelles a une très grande valeur éducative, et réclament deux heures par semaine dans toutes les classes.

J'ai cru être agréable aux humanistes belges en leur donnant l'avis mûrement réfléchi de personnes dont ils prisent si haut l'opinion quand il s'agit du grec et du latin, branche où pourtant leur compétence est relativement minime.

Je me suis bercé de l'espoir qu'ils accorderaient autant de confiance à ces mêmes personnes quand elles expriment leurs idées sur des matières qu'elles connaissent et pratiquent en spécialistes.

Je n'attaque donc pas la thèse du P. Verest sur les humanités gréco-latines, mais bien ce que M. Mansion et lui ont écrit de l'enseignement des sciences.

M. Mansion dit que le programme de Méran n'est qu'un projet qui ne sera pas appliqué. Il se trompe, il est appliqué maintenant en Prusse et dans plusieurs autres états de la Confédération germanique, notamment à Francfort, à Hambourg. Il se répand tous les ans. Il est néanmoins l'expression des desiderata de toute l'Allemagne scientifique. En France, voici quelle est la répartition d'après le programme du Lycée Louis-le-Grand que j'ai sous les yeux ; en quatrième, 1 heure de sciences naturelles, en troisième, néant ; en seconde et en première des sections A Latin-grec, B Latin-langues vivantes, néant, en section C Latin-sciences. 5 heures de sciences par semaine plus deux heures d'exercices pratiques. Ce programme ne correspond donc pas du tout à ce qu'en dit M. Mansion.

Il faut au surplus distinguer entre *Naturkunde*, *Nature Study*, que l'on donne dans les classes inférieures et *Naturwissenschaft*, *Natural Sciences* que l'on enseigne dans les cours supérieurs. Il faut servir aux enfants des sciences naturelles sous une forme appropriée à leur âge et à leur degré d'intelligence.

Quand M. Mansion énumère un grand nombre d'industries belges à base scientifique, ou utilisant des notions scientifiques, il ne détruit pas mon argumentation. Je le prie de me relire, je n'ai parlé que d'industries purement scientifiques, industries qui ont mobilisé des capitaux pour faire progresser la science, et non de celles qui ne font qu'exploiter des applications et des procédés connus.

M. Mansion veut bien reconnaître que les industries que j'ai mentionnées n'existent pas en Belgique.

Il ne s'agit pas d'industries qu'un seul homme instruit peut diriger, mais de celles qui demandent à tous les ouvriers qu'elles emploient des connaissances scientifiques. Je prie M. Mansion de relire l'article de M. de Moussac sur les usines chimiques de Leverkusen.

La découverte d'Ehrlich, qui a expérimenté 606 corps nouveaux ou combinaisons nouvelles pour opérer sa *Therapeutica magna,* serait-elle possible dans les laboratoires les mieux outillés de nos Universités ?

En parlant de Kékulé, il ne s'agit pas de savoir où il a d'abord trouvé de l'appui pour ses vues théoriques, mais de montrer combien le peuple entier, en Allemagne, avait conscience de l'importance économique de ses découvertes et de ses travaux de laboratoire. M. Mansion en fournit lui-même une éclatante démonstration en racontant que Kékulé s'étonnait un jour de ce que des industriels allemands avaient organisé une fête en son honneur, ne sachant pas pourquoi on le fêtait. Par ce trait, il démontre que le monde industriel avait conscience des services rendus par le grand savant à sa patrie et que si ces industries ont trouvé en Allemagne des capitaux pour se développer, c'est grâce à l'instruction donnée au peuple par les nombreux élèves qui ont été formés à son école, dans son magnifique institut de Bonn.

Pour le Congo, M. Mansion plaide seulement les circonstances atténuantes. Aux faits que j'ai soulignés je n'en ajouterai qu'un.

Dans les dernières réunions du conseil de surveillance du Musée, on nous a soumis un herbier récolté par un agent belge. Il avait recueilli une foule de plantes médicinales, dont il avait appris l'usage par les indigènes. Les notes qui accompagnaient les objets étaient rédigées dans un français très pur et un style que n'auraient pas désavoué les Pères Jésuites.

Il avait recueilli une feuille de chaque plante croyant que cela suffisait pour en déterminer l'espèce !!!

Je sais très bien que dans certains diocèses et dans les athénées on enseigne les sciences naturelles, mais je sais aussi que nos plus grands collèges refusent encore de mettre les sciences biologiques dans leurs programmes.

Et puis comment les enseigne-t-on ? Je préfère m'abstenir de juger les méthodes employées !

Le R. P. Bosmans voudrait nous imposer une pédagogie à part ! Pourquoi ? Nous demandons qu'on nous laisse simplement employer la même méthode que les philologues pour le grec et le latin.

Que dirait M. Mansion si nous affirmions que les élèves sont bien plus mûrs pour apprendre le latin quand ils ont 16 ou 17 ans? Il répondrait sûrement qu'il faut d'abord connaître les mots, les déclinaisons, les conjugaisons, la grammaire avant d'enseigner la syntaxe. Nous demandons qu'on nous laisse nous servir d'objets naturels pour faire l'analyse du monde réel.

Cette analyse a sur l'analyse grammaticale l'avantage d'être beaucoup plus vivante, plus attrayante pour l'enfant.

Dans tout ce qu'il dit, le Père Castelein a oublié qu'il avait un corps, et que ce corps vivant était soumis aux lois fondamentales de la vie. Il ne pense pas que 10 % seulement de la population scolaire se destinent aux carrières universitaires et que les 90 % qui restent sont renvoyées dans leurs familles ignorant tout des lois de la vie et des notions les plus élémentaires des sciences biologiques. La Compagnie de Jésus veut faire de ses religieux des hommes dans la vraie acception du mot; c'est pourquoi elle enseigne la biologie à ses séminaristes : je demande qu'elle en fasse autant pour les élèves de ses collèges !

Je me permettrai de signaler au P. De Munnynck qu'il existe en Suisse un enseignement des sciences, une étude de la nature dans toutes les classes ; c'est en Suisse qu'on les a introduites dans les programmes en tout premier lieu. Les élèves des humanités gréco-latines y ont donc puisé une idée de la totalité du monde réel.

M. Mansion veut-il noter que dans la statistique fournie par l'Institut commercial de l'Université de Bruxelles, il faut tenir compte que ces élèves viennent des Athénées où l'enseignement scientifique est en général très bien donné dans les humanités gréco-latines par des docteurs en sciences? Cet argument n'a donc aucune valeur contre la nécessité de l'introduction des sciences dans les programmes de nos collèges catholiques.

M. *A. Proost* constate que, depuis la fondation de la *Société scientifique* il y a trente-six ans, les idées qu'il a défendues (¹) *dans la première assemblée générale* ont fait bien du chemin et que beaucoup d'adversaires de la thèse qu'il soutient avec M. le Dr Lebrun ont compris toute la portée des réformes qu'il préconise. Il rappelle aux partisans irréductibles des anciens programmes

---

(¹) Voir ANNALES, avril 1876, pp. 120 et suivantes.

que, dès lors, il n'a cessé de préconiser l'enseignement *intuitif* et non *livresque* des sciences naturelles, depuis l'*école primaire*, pour développer l'*esprit d'observation* que les humanités laissaient en friche et engendrer LE GOÛT DE L'ÉTUDE au lieu d'en provoquer le dégoût par l'enseignement d'éléments arides de grammaire et de mathématiques. L'ancienne pédagogie, inconsciente des lois naturelles, était *nécessairement empirique* et violait, sans le savoir, les lois du développement du corps et de l'esprit.

Ainsi, l'on marchait trop souvent à l'encontre du but que l'on voulait atteindre et l'on sacrifiait au culte trop exclusif de la *Forme* le temps précieux des six années d'*humanités*. — Apprendre A VOIR et à décrire exactement ce que l'on voit, pour abstraire et généraliser ensuite, voilà ce que la méthode scientifique nous enseigne et ce que l'on a trop négligé jusqu'ici, car il faut juger *l'arbre d'après ses fruits* et on ne peut nier que l'*esprit d'observation* est ce qui manque le plus à nos jeunes gens absorbés par l'étude *des mots* et des tournures de phrases des langues mortes.

M. Proost invoque en terminant le témoignage peu suspect de Mgr de Harlez, son savant collègue à l'Université de Louvain, qui n'était pas un naturaliste, mais un *philologue* et qui déclarait comme lui que l'on pouvait apprendre *plus de latin et de grec en moins de temps qu'aujourd'hui,* en abandonnant les vieilles méthodes, pour faire place aux langues vivantes et aux sciences naturelles.

Il prie M. le président de donner lecture du passage de la lettre de Mgr de Harlez qu'il a publiée intégralement dans son livre *La Réforme des humanités* en 1896.

En voici le texte.

« Il ne s'agit pas de savoir quelles sont les vertus intrinsèques des langues classiques, quels effets elles peuvent avoir, *mais ce qu'elles font en réalité.* Or, si nous considérons le résultat des études d'humanités, nous constatons que *les trois quarts* des jeunes gens sortent du collège sachant peu de latin, très peu de grec et TRÈS MAL LE FRANÇAIS, grammaire et orthographe comprises.

» Pour les partisans des vieux programmes, il n'y a qu'un moyen d'apprendre à parler et à écrire le français. C'est une étude approfondie du grec et du latin. En soi, c'est fort surprenant ; c'est soutenir que, pour apprendre à bien manier le sabre, il faut s'escrimer au bâton.

» Il est donc clair que le système est vicieux. »

M. Proost constate que les anciennes humanités classiques développaient outre mesure la *mémoire machinale*, le psittacisme au détriment de l'*esprit d'observation* et d'initiative.

Il invoque l'exemple des écoles *ménagères agricoles* qu'il a créées en Belgique où l'enseignement INTUITIF des sciences naturelles appliquées à l'hygiène et à la culture a donné des résultats inespérés (¹), tandis que les programmes surchargés des écoles normales de filles produisent trop souvent des résultats désastreux par un gavage absurde de l'esprit presque toujours préjudiciable à la santé de l'âme et du corps.

La discussion étant épuisée, l'assemblée vote l'ordre du jour suivant, présenté par le R. P. Bolsius, S. J. : « Il y a utilité à pratiquer l'enseignement des sciences naturelles, pour arriver à développer l'esprit d'observation des élèves. »

Quatrième section

Mercredi 26 avril 1911. — Le rapport, d'un si haut intérêt, présenté par le R. P. Boule, lors de la session de Pâques de l'année dernière, sur les rapports de la philosophie avec les sciences biologiques et médicales (²), méritait mieux qu'une discussion écourtée. La section a voulu la continuer et avait inscrit cette question en tête de son ordre du jour.

M. le Dʳ *Cuylits* a regretté doublement de n'avoir pu assister à la dernière réunion. Il aurait pu rendre hommage à la belle étude du R. P. Boule et rencontrer quelques objections qui se sont produites au cours de la séance.

Le R. P. Vermeersch estimait que *les névroses ne peuvent pas être considérées comme des maladies purement psychiques, mais*

(¹) Résultats auxquels les étrangers rendent périodiquement hommage dans les concours et les congrès internationaux (Voir REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison de juillet 1911, pp. 73, 84 et suiv.).

(²) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, t. XXXIV, p. 261. Séance de la quatrième section du 6 avril 1910.

qu'elles ont à leur base une lésion organique. « S'il en était autrement, il faudrait dire que c'est l'âme qui est malade », ajoutait le R. P. Vermeersch.

Cet argument qui paraît péremptoire ne l'est pas du tout. Quand nous parlons des maladies de l'esprit, des maladies de la volonté, des maladies de l'âme, nous n'envisageons pas l'âme dans son essence mais l'âme dans son union intime avec le corps et formant avec celui-ci une même substance et nous entendons maintenir que cette âme dans ses expressions diverses et son extériorisation peut être malade sans qu'il y ait apparence ou réalité de lésion organique.

Et il n'y a pas que certaines névroses qui figurent dans ce chapitre des maladies de l'esprit sans lésions. Nous allons le démontrer immédiatement.

Prononcées à la *Société scientifique* par le R. P. Vermeersch, ces appréciations ont un intérêt particulier.

Elles sont formulées par un spiritualiste (qui en douterait ?) dans une société qui se fait gloire d'être spiritualiste, précisément à un moment où le nombre des médecins positivistes, matérialistes ou déterministes qui déclarent abdiquer leurs doctrines, devant certaines maladies dont le mécanisme leur échappe, devient vraiment considérable. Voici donc les rôles renversés et nous ne savons vraiment pas pourquoi.

Déjà Guislain, cet observateur inégalé, estimait que 66 °/₀ des maladies mentales étaient des maladies morales, dues à une cause émotive, et échappaient à une lésion organique tout au moins au cours de leurs périodes préliminaires.

En fait, comment évoluent ces névroses, ces psychoses, ces manies, ces mélancolies, ces délires ?

Elles ne se constituent pas de toutes pièces.

Dans une première période, parfois très longue, le malade se sent souffrant, plus impressionnable, plus irritable.

Dans une seconde période, il se découvre des idées anormales et il lutte contre ces idées. Elle est justement désignée sous le nom de période d'élimination psychique.

Dans une troisième période, la conscience est encore entière, le jugement n'est pas faussé mais le malade reconnaît son impuissance à savoir vouloir. C'est la paralysie de la volonté.

Plus tard surviennent l'obnubilation de l'intelligence, des exaltations ou des dépressions morbides, des hallucinations, des illusions, tous désordres que l'on est plus ou moins fondé à attribuer à des altérations organiques.

Mais veuillez bien remarquer qu'au cours des trois périodes il s'agissait de déviations intellectuelles ou morales n'ayant rien de commun avec une lésion organique et que celle-ci ne s'est constituée que tardivement sous l'influence de celles-là.

Voilà donc un groupe compact de maladies de l'esprit sans lésion. Et nous ne sommes pas sans savoir quelque chose du mécanisme des influences morales sur l'organe.

On est généralement d'accord pour admettre que ces influences purement psychiques engendrent à la longue des hyperémies cérébrales et même médullaires et que, sous l'influence de ces hyperhémies, le chimisme cellulaire est troublé. Les ferments spéciaux qui dans la cellule hydrolysent, déshydratent, oxydent, désassimilent ne reçoivent plus du noyau cellulaire la direction et l'impulsion normales. La cellule se désagrège : la lésion est constituée : voilà pour les vésanies en général. Purement psychiques d'abord, elles deviennent organiques par la suite.

Mais il existe un non moins grand nombre de maladies mentales uniquement constituées par des désordres intellectuels ou moraux, qui le restent indéfiniment et ne se compliquent d'aucune altération matérielle.

Il serait banal de citer encore les névroses. Mentionnons plutôt toutes ces psychoses constitutionnelles, toutes les folies morales, les psychasthénies, les folies du doute, les obsessions, les délires systématisés, aigus ou chroniques et cette affection, d'un intérêt spécial dans ce domaine, l'apraxie aiguë, transitoire. Vous savez que l'apraxie consiste dans un trouble psycho-moteur ou idéo-moteur survenant chez un individu qui n'est ni un taré, ni un délirant, ni un dément, qui comprend les ordres qu'on lui donne, qui est capable de reconnaître par les différents sens les objets qu'il manipule, qui n'est ni paralysé ni ataxique.

Pourtant il ne peut exécuter des actes dirigés vers un but conscient et déterminé et accomplit à leur place des mouvements sans signification ou différents de celui qu'il veut exécuter.

Cette apraxie idéo-motrice n'atteint que certains groupes musculaires et n'est souvent qu'unilatérale.

Elle se traduit par cette phrase du malade : « Je sais bien comment il faut faire, mais je ne peux pas », et il ne sait exécuter de la main ou de l'avant-bras droits, par exemple, des mouvements qu'il exécutera parfaitement du membre gauche. On le voit, par exemple, de la main gauche normale tenir correctement une boîte d'allumettes, tandis que la droite ataxique fera des mouvements n'ayant rien à voir avec l'acte d'allumer une allumette.

Pourtant la droite n'est pas paralysée et tous les autres mouvements lui sont aisés.

Auto-suggestion ! dira-t-on. Encore serait-ce un état purement psychique, une maladie idéo-motrice. Mais il n'en est pas question. Le patient n'a qu'un souci : c'est de s'astreindre à une suggestion en sens inverse. Nous n'hésitons pas à dire que c'est une maladie transitoire purement psychique, sans lésion.

On dira peut-être que toutes ces maladies sont de celles qui impliquent une lésion, mais que jusqu'ici les moyens dont nous disposons sont insuffisants pour la découvrir et que nous ne sommes pas fondés à la nier.

Je ferai remarquer que si le système nerveux a un défaut, celui d'être extrêmement complexe et mystérieux, il a au moins cette qualité, c'est de manifester au dehors par des désordres notoires le moindre trouble qui l'atteint, dussent la chimie et la physique les plus pénétrantes rester impuissantes à le déceler.

C'est ainsi qu'à l'Académie de Médecine de Belgique, dernièrement, un rapporteur distingué a pu dire, sans être contredit : « Vous affirmez que le sujet ne présentait aucune trace de trouble intellectuel, moteur ou sensible. J'affirme que son système nerveux était intact. »

Il existe donc un grand nombre d'affections nerveuses que l'on peut dire purement psychiques, maladies de l'esprit, maladies de l'âme, sans lésion imaginable. De nos jours, les médecins les plus férus de matérialisme le reconnaissent. Le moment est mal choisi pour les contredire.

Il faut en conclure que plus que jamais les études psychologiques s'imposent au médecin, à moins que, de parti pris, il n'exclue de ces études nombre de maladies mentales et nerveuses.

Comme le disait Richet : « En regard de celles-là, s'il faut parler anatomiquement psychologie, il faut renoncer à la psychologie. »

M. le Dr *Masen* se rallie, de préférence, à la manière de voir du R. P. Vermeersch : l'âme n'est jamais, ne peut pas être malade, et elle le serait s'il pouvait exister des névroses sans lésion anatomique. Dans chaque corps qui naît, Dieu infuse une âme. Or, celle-ci est nécessairement tributaire, pour la mise en jeu de ses facultés, du cerveau qui doit leur servir d'instrument.

L'organe cérébral est-il mal développé, déformé, insuffisant, ou dépourvu d'une ou de plusieurs des conditions de structure qui sont l'apanage d'un cerveau normal, on aura affaire à une intelligence inférieure, qui pourra descendre jusqu'à l'idiotie. Plus, au contraire, la masse cérébrale sera pourvue d'une organisation adéquate aux exigences des manifestations de l'âme, plus le sujet sera intelligent, il pourra même s'élever jusqu'à mériter l'appellation de génie. Une lésion, même minime, vient-elle atteindre ses hémisphères, il pourra sombrer dans la folie.

De ce qu'aucun substratum anatomique n'a été décelé dans un certain nombre d'affections nerveuses, il ne résulte nullement que ce substratum n'existe pas. Le tétanos n'était-il pas autrefois assimilé aux névroses ? Qui doute, aujourd'hui, qu'il s'agisse d'une maladie infectieuse, à microbes ?

Des troubles circulatoires, réglés par les vaso-moteurs, se présentent souvent à notre observation, trouble amenant des hyperémies ou des anémies passagères, fugaces, avec douleurs névralgiques ou paralysies et cela sans production de lésions anatomiques proprement dites.

Savons-nous, au surplus, en quoi consiste l'influx nerveux ? et comment dès lors pourrions-nous, par une autopsie, trouver le point de départ des perturbations dont il est l'auteur ?

Cent hypothèses se présentent, permettant d'interpréter tous ces troubles — circulatoires ou nerveux — d'une durée plus ou moins longue qui ne se révèlent pas par des traces anatomiques *susceptibles de constatation posthume.*

L'analogie que trouve le R. P. Boule entre une maladie purement dynamique à son origine et une machine dont les rouages ne recevraient pas « le minimum de force nécessaire à les mettre en mouvement » ou seraient soumis « à l'action d'une force qui leur impose un travail anormal », cette analogie est très contestable. La machine, en effet, reçoit sa force d'ailleurs, tandis qu'un organisme vivant fabrique sa force lui-même, et si cette force est en déficit, c'est que la fabrique-cerveau est lésée quelque part ou que les organes de transmission sont endommagés.

Sur tout ceci d'ailleurs, je serais bien aise d'entendre exposer la vraie doctrine théologique; ou bien la question est-elle libre ?

Le R. P. *De Munnynck, O. P.,* prend ensuite la parole :

Le travail du R. P. Boule mériterait un examen approfondi, et je crois pouvoir affirmer que quelques détails apparaîtraient comme inexacts ou au moins comme équivoques. Mais la thèse fondamentale est indiscutable : il me paraît acquis que les études philosophiques sont extrêmement utiles, et même indispensables, à tous ceux qui doivent ou veulent approfondir les questions d'ordre biologique ou médical.

En ce moment un seul point fixe mon attention ; c'est celui qui a provoqué les préoccupations du R. P. Vermeersch. Celui-ci croit qu'admettre, comme le R. P. Boule, un trouble psychique sans lésions équivaut à une profession de matérialisme. J'ai soumis la proposition du R. P. Vermeersch : « il n'y a pas de maladies psychiques sans lésion organique » à un homme non prévenu, suffisamment renseigné et très intelligent. Il y a vu, — je cite ses paroles : « une dangereuse tendance matérialiste » !

Cette aventure plaisante nous avertit que la question est mal posée. Le R. P. Boule dit lui-même dans son rapport que l'âme et le corps ne sont pas simplement juxtaposés ; or au cours de la controverse on semble l'avoir totalement perdu de vue. — Si l'on envisage l'âme, principe de nos états psychiques, à l'état isolé, cela n'aurait aucun sens de parler de maladies *essentielles ;* parce que dans ce cas on comprend par « maladie » une désorganisation supposant des parties plus ou moins nombreuses. C'est évidemment ce qu'a voulu dire le R. P. Vermeersch ; et dans ce sens il a infiniment raison. — Mais déjà dans l'ordre *substantiel*, il y a très vraisemblablement entre les âmes des différences de perfection. S. Thomas l'affirme expressément (*S. Theol.*, I, qu. 85 a 7) ; et Cajetan croit qu'il faut être aveugle pour ne pas le voir. Or rien n'empêche de qualifier les degrés inférieurs de maladifs, puisqu'on peut appeler « maladie » une infériorité qui abaisse la valeur fonctionnelle au-dessous de la valeur normale ou moyenne. — Enfin dans l'ordre *accidentel* il y a sans conteste possible des états d'âme que par une analogie des plus légitime, on peut qualifier de « maladie ». Nous n'allons pas au réel avec une âme vierge ; les trois ordres de nos activités psychiques dépendent essentiellement de nos acquisitions anciennes ; et il serait singulièrement osé, singulièrement « matérialiste », de chercher exclusivement leur nature dans quelque disposition matérielle. Nous représentons donc, nous sentons et nous voulons, non pas en dépendance nécessaire, mais toujours en dépendance relative de nos anomalies natives, de nos erreurs, de nos préjugés. Les fonctions spécifiques de l'âme peuvent en être alourdies, entravées, troublées. Or des troubles analogues, dans l'aspect organique de notre être, s'appelleraient certainement des « maladies ».

Si donc le R. P. Vermeersch a raison, le R. P. Boule n'a pas tort. Il n'est pas douteux qu'à deux titres différents, même si l'on considère l'âme à l'état isolé, nous pouvons parler de maladies psychiques. Si nous nous en abstenons habituellement, c'est parce que nous ne pouvons pas admettre des maladies spirituelles dans un troisième sens, qui est celui souligné par le R. P. Vermeersch.

Mais tout cela est assez artificiel. En réalité, nous ne sommes pas des âmes isolées : nous sommes *uns ;* et il n'est pas un état psychique qui, au moins indirectement, n'intéresse toute la substance humaine. Nous touchons ici à de très graves et très nombreux problèmes. Je serais désolé si l'on cherchait dans mes paroles la solution de toutes les questions qui doivent se poser. Je n'envisage donc que l'aspect de la réalité qui nous intéresse et je crois pouvoir poser les principes directeurs suivants :

1° L'âme est incontestablement spirituelle ; on peut rigoureusement le démontrer.

2° L'homme est une seule substance, et une seule personne. Le concept de sa nature totale ne peut être construit, à partir de ses propriétés, qu'en considérant à la fois l'aspect corporel, physique, chimique, anatomique, physiologique, et l'aspect psychique qui se manifeste dans le triple ordre de la connaissance, de la vie affective et de la volonté. Ce sont là deux aspects d'une seule et même substance.

3° La substance humaine est attaquable, ou au moins accessible, et par son côté physique et par son côté psychique ; toute modification à l'un quelconque de ces points de vue a son retentissement plus ou moins accentué dans l'autre. C'est ainsi, pour ne citer qu'un exemple banal, que l'action physique des corps extérieurs provoque la sensation; et que certaines représentations influencent la circulation ou les fonctions glandulaires.

4° Une affection peut donc être primairement psychique ou primairement physique. C'est dans ce sens qu'on peut parler de psychoses, de névroses, qui au moins au début ne correspondent à aucune lésion organique.

Il n'y a là absolument rien qui soit le moins du monde contraire à la spiritualité de l'âme. On peut s'attendre peut-être à ce qu'un trouble psychique produise finalement une lésion ; mais c'est là un fait que l'expérience seule peut constater. Au moyen de ces principes tout peut s'expliquer ; et rien n'empêche d'admettre des maladies de l'âme dans l'homme intégral sans lésion organique, pourvu qu'on entende par là des éléments psychiques perturbateurs, qui s'introduisent dans l'unique substance humaine par la voie de sa réceptivité psychique.

M. le Dr *Masen* insiste sur les observations qu'il a présentées tout à l'heure. Il n'est pas convaincu par la fin de non recevoir opposée par le R. P. De Munnynck à l'opinion qui fait des affections *sine materia* des affections à lésions *non encore constatées*. S'il est illogique de conclure à l'existence de celles-ci, il est tout aussi illogique de conclure à leur absence.

M. le Dr Degive appuye la manière de voir de M. le Dr Masen. Je ne pense pas, dit-il, qu'en bonne logique il soit permis d'admettre l'existence possible d'une maladie fonctionnelle pure, qui atteindrait l'âme, comme vient de le dire, si je ne me trompe, le R. P. De Munnynck, à l'exclusion de toute altération organique.

Si l'on admet avec S. Thomas que l'être humain constitue une seule substance, une unité substantielle résultant de l'union de l'âme (forme) et du corps (matière), je me demande comment il se pourrait que la forme ou l'âme soit modifiée ou altérée, sans que la matière ou le corps participe à cette modification, à cette altération ? Il me paraît impossible de concevoir un trouble fonctionnel ou formel qui ne soit en même temps organique ou matériel.

Mon avis est que toute affection est à la fois fonctionnelle et organique, et que dans les maladies ou dans certaine phase des maladies nerveuses, considérées comme exclusivement fonctionnelles, les modifications organiques, bien que réelles, sont trop peu prononcées pour être perceptibles.

A cette simple réflexion je dois ajouter les observations qui m'ont particulièrement déterminé à prendre la parole.

J'ai d'abord à faire remarquer l'erreur dans laquelle a versé le R. P. Boule dans son appréciation des paroles prononcées par Lacordaire dans la chaire de Notre-Dame à Paris, concernant la caractéristique essentielle de la vie.

« Si personne, dit le R. P. Boule, n'a jugé à propos de les relever, c'est apparemment que tout le monde n'y a vu qu'une façon oratoire de désigner ce que nous appelons vulgairement, entre nous, des forces physico-chimiques. »

Pour établir la méprise du R. P. Boule, il me suffira de vous lire le passage de la conférence à laquelle j'avais fait allusion (1). Ce passage est ainsi conçu :

« Qu'est-ce que la vie ? Pour l'entendre il faut nous demander ce que c'est que l'être, car la vie est évidemment un certain état de l'être.

» Nous arrivons ainsi à cette question première et suprême : qu'est-ce que l'être ? Et nous la résoudrons en cherchant ce qu'il y a de permanent et de commun dans les êtres infiniment variés dont le spectacle est sous nos yeux. Or, en tous, quels que soient leur nom, leur forme, leur degré de perfection ou d'infériorité, nous découvrons une *force* mystérieuse qui est le principe de leur subsistance et de leur organisation et que nous appelons l'*activité*.

» Tout être, même le plus inerte en apparence, est une activité ; il se condense en lui-même, il résiste aux efforts étrangers, il attire et il s'incorpore des éléments qui lui obéissent.

» Un grain de sable est en lutte et en harmonie avec l'univers entier, et il se conserve par cette *force* qui est le fond même de son être et sans quoi il s'abîmerait dans l'incapacité absolue du néant.

» L'activité étant le caractère permanent et commun de tout ce qui est, il s'ensuit que l'être et l'activité sont une seule et même chose et que nous avons le droit de poser cette définition : *l'être*

---

(1) 46e Conférence : De la vie intime en Dieu, 1848.

est l'activité. S. Thomas d'Aquin nous en a donné l'exemple lorsque, ayant à définir Dieu, qui est l'être dans sa réalité totale, il a dit : *Dieu est un acte pur.*

» Mais l'activité entraîne l'action et l'action c'est la vie. La vie est à l'être ce que l'action est à l'activité. Vivre c'est agir.

» Il est vrai que l'action spontanée et surtout libre, étant l'action parfaite, on marque ordinairement la naissance ou l'apparition de la vie là où se manifeste ce genre d'action. Ainsi l'on dit que la pierre est, que la plante végète, que l'animal vit ; mais ces différentes expressions ne signalent que les gradations de l'activité dont la présence, si faible qu'elle soit, constitue partout *l'être vivant.* »

N'est-il pas évident, dit M. Degive, que ces paroles ne constituent aucunement « une façon oratoire de désigner des forces physico-chimiques », mais qu'elles expriment d'une façon très claire, et nullement figurée, une vue philosophique mûrement réfléchie concernant la *nature dynamique* de la substance qui constitue les êtres ?

D'après cette vue on serait autorisé, selon M. Degive, à voir dans chaque être simple ou atomique une force, une substance dynamique sous une forme déterminée.

Si, comme il semble incontestable, tout être fini est une participation aux attributs essentiels de l'être infini, M. Degive se demande s'il est possible qu'un être fini participe à l'un de ces attributs, telle *l'activité pure*, à *l'exclusion absolue* des autres, notamment de *l'attribut psychique ou conscient ?* La négative ayant, pour lui, toutes les apparences de la vérité, il estime que Leibniz était fondé à voir dans chaque être simple ou monadique une *force consciente.*

Les êtres finis n'étant sous des modes et à des degrés divers que des réductions, des vestiges, des reproductions imparfaites de l'essence parfaite, de la substance même de l'Être infini, M. Degive est amené à penser que, sous la *Force consciente parfaite*, en pleine actualité, en acte pur, qui constitue l'Être spirituel, l'Être immatériel, l'Être positif absolu, existent les *forces conscientes imparfaites,* dont l'activité est limitée par plus ou moins de négatif, de potentiel, qui forment les êtres finis ou créés.

Suivant leur degré de développement, suivant la *proportion relative d'actuel et de potentiel* qu'ils possèdent, les êtres finis seraient dits : a) *spirituels* ou *immatériels* lorsque l'*actuel*, le *psychique* prédominent notablement et que le *potentiel* ou *matériel* est rudimentaire, peu ou point perceptible ; b) *corporels* ou *matériels*, quand le *potentiel* est très prononcé et que l'*actuel*, le *spirituel*, le conscient est très rudimentaire, imperceptible. Il semble à M. Degive qu'un *dynamisme* reposant sur ces données serait de nature à dissiper bien des malentendus et à mettre fin au triste antagonisme que créent, entre les penseurs, les vues exclusives du matérialisme et du spiritualisme. Vu le grand intérêt qui s'attache à l'élucidation de cette question, M. Degive se propose d'en faire le sujet d'une communication lors de la session d'avril 1912.

Le R. P. *De Munnynck* répond :

La thèse du Dr Masen ne paraît vraiment pas défendable. De ce qu'on n'a découvert aucune lésion, il ne s'ensuit pas qu'il n'y ait aucune lésion. C'est l'évidence même. Mais la logique appliquée nous apprend que les hypothèses gratuites, basées sur une pure possibilité, doivent être écartées *a priori* dans les sciences positives. Or c'est bien une hypothèse gratuite que nous présente le Dr Masen, car de ce qu'on a trouvé des lésions qui tout d'abord ont échappé à l'examen, on ne peut évidemment pas conclure qu'on en trouvera partout.

De fait la question se pose ailleurs. Il s'agit de savoir, non s'il y a toujours lésion, mais si un trouble mental est possible sans lésion organique. Et à ce dernier problème, sans la moindre hésitation, je crois pouvoir répondre affirmativement.

Dans le cours du débat, un membre (M. le Professeur Desplats) fait observer que, d'après l'enseignement de la doctrine chrétienne, nous sommes composés d'une âme et d'un corps. Comment concilier ce dogme avec l'affirmation du R. P. De Munnynck : nous sommes une substance unique ? L'éminent Professeur de Fribourg répond à cette objection en ces termes :

Il ne me paraît guère utile de traiter à fond ce problème qui est extrêmement vaste et subtil. L'*unicité* de la substance humaine se conçoit le mieux par le système aristotélicien de la matière et de la forme. Suivant cette doctrine *tout* corps est composé de deux principes, la matière première et la forme substantielle. Dans l'homme l'âme est la forme substantielle, et ses opérations nous contraignent à lui attribuer une nature spéciale qui la rend indépendante, en soi, de sa jonction avec la matière. C'est pourquoi, bien que l'homme ne soit qu'une seule substance, la raison aussi bien que la foi nous imposent la spiritualité de l'âme. — Mais je répète que ce sont là des doctrines très complexes, que nous ne pouvons pas utilement discuter en ce moment.

Avant de déclarer cette discussion close, M. le Dr Struelens, président, félicite et remercie les orateurs qui y ont pris part. Il exprime spécialement au R. P. De Munnynck la gratitude des membres de la Section pour le concours si autorisé et si précieux qu'il a bien voulu leur apporter, après le R. P. Boule et le R. P. Vermeersch, dans l'étude d'une question qui nécessitait l'intervention d'interprètes sûrs de l'enseignement philosophique.

Le R. P. *Vermeersch, S. J.*, empêché d'assister à cette réunion, nous transmet la note suivante en nous priant de la joindre au résumé de la discussion :

L'âme peut-elle être malade ? — La contradiction que deux interprètes autorisés, l'un de la science médicale, M. le Dr Cuylits, l'autre des sciences philosophiques et naturelles, le R. P. De Munnynck, ont opposée à une assertion qui nous paraissait et nous paraît encore certaine et même évidente nous a fort surpris ; et nous ne pouvons nous l'expliquer que par un malentendu. Puisse cette note dissiper les équivoques et nous mettre d'accord, si déjà nous ne le sommes pas à notre insu même !

A la différence de la philosophie cartésienne, qui place la sensation dans l'âme seule, et des systèmes dynamistes plus récents, qui n'unissent l'âme et le corps que dans leurs opérations, nullement dans leur existence, la philosophie scolastique en général, et tout spécialement la philosophie thomiste, fait du corps lui-même, en tant qu'il est et qu'il vit, la résultante de l'union de l'âme spirituelle avec un principe matériel. Dans cet état d'union, il n'y a pas, pour toutes les fonctions de la vie végétative et sensible, à distinguer l'âme du corps : il n'y a qu'un être unique, composé, qui vit, se nourrit, se meut, éprouve des sensations, qui est en un mot le sujet de tous les actes et de toutes les passions. L'âme n'a en propre que les fonctions de la vie spirituelle : les pensées et les vouloirs ; et encore, dans les conditions actuelles, ces actes supérieurs eux-mêmes ne se font pas sans un certain concours (extérieur celui-ci) de l'imagination et des sens.

Dès lors, si nous restreignons la question aux *névroses,* qui seules étaient mises sur le tapis, du point de vue *philosophique,* notre conclusion est si voisine de sa source qu'on a peine à l'en distinguer et à l'isoler. Une névrose, en effet, de par son nom même, affecte les nerfs, donc l'organisme. Donc, encore, elle réside dans le composé ; donc, enfin, elle suppose une lésion ou, si l'on préfère ce terme, une altération matérielle, physiquement perceptible, quoique peut-être on ne soit pas encore parvenu à la percevoir.

Spiritualiser la névrose, en faire quelque chose de purement psychique, est, dans la philosophie scolastique ou thomiste, aussi impossible que de spiritualiser notre organisme lui-même.

Nous plaît-il de reprendre le problème par son aspect *scientifique* ou *expérimental ?* Nous ne saurions concéder au R. P. De Munnynck que M. le Dr Masen avance une hypothèse gratuite, en supposant qu'à toute névrose correspond une lésion matérielle. On ne peut, en effet, qualifier de gratuite une hypothèse que l'observation ne cesse de confirmer. Des lésions, des troubles somatiques apparaissent là où longtemps on ne les avait pas soupçonnés. Tous les médecins d'ailleurs n'en sont-ils pas à prescrire pour les névroses et même pour les maladies plus strictement dites mentales, et cela dès le premier stade, des traitements physiques : douches, massages, abstinences, alimentation rationnelle, repos (1) ? N'avouent-ils pas ainsi implicitement croire à une lésion, à un dérangement matériel ?

Et serait-il bien exact de dire que de nos jours « les médecins les plus férus de matérialisme » reconnaissent « un grand nombre d'affections nerveuses que l'on peut dire purement psychiques… sans lésion imaginable » ?

Un spécialiste bien connu pour ces maladies, M. le Dr Albert Deschamps, cite ces paroles d'un autre spécialiste, M. le Dr J. Raymond : « Personne, je crois, à l'heure présente, ne songe à admettre la possibilité de troubles morbides complètement indépendants de toute modification organique. Un tel langage nous semblerait inintelligible, puisqu'il se ramènerait à cette affirmation, qu'il peut exister des effets sans cause. Des altérations organiques, aujourd'hui encore insoupçonnées, nous apparaissent donc comme nécessaires dans les névroses aussi bien que dans les affections nerveuses dites organiques. Les névroses sont des maladies à *lésions ignorées* plutôt que des maladies sans lésions (1). » Et M. Deschamps ajoute : « C'est l'évidence même (2). »

---

(1) Voir, à ce sujet, A. Leclère, *Le mécanisme de la psychothérapie* ; REVUE PHILOSOPHIQUE, t. 71 (1911), p. 128 et suiv.

Et comme, d'ailleurs, l'hypothèse de la lésion nécessaire fournit un but de travail que des découvertes viennent récompenser, nul ne peut contester, pensons-nous, qu'elle ne mérite de prendre rang parmi les hypothèses scientifiques, alors même qu'on néglige la raison philosophique qui la démontre.

Mais, grâce au R. P. De Munnynck, le débat ne s'est pas limité aux névroses : il s'est élargi pour gagner en intérêt. Nous suivons d'autant plus volontiers le docte professeur de Fribourg sur ce terrain plus vaste que nous y trouvons le moyen de nous rapprocher de lui en précisant le sens du mot *maladie.*

Le R. P. emploie ce mot dans un sens plus général que nous. Il nous parle d'une âme dont les facultés éprouveraient « une infériorité abaissant la valeur fonctionnelle au-dessous de la moyenne » : pareille âme n'est pas strictement malade, non plus qu'un homme n'est malade pour être nain, géant ou même difforme de corps. La maladie dit un état pathologique survenu dans l'individu, et non une situation inférieure de l'individu dans l'espèce. Notons, en passant, qu'à suivre S. Thomas, cette différence des âmes tient à la disposition des corps. « A corps meilleur âme meilleure », dit le saint docteur à l'endroit même cité par le R. P. De Munnynck (3). Et il en donne pour raison le principe général : « L'acte-forme est reçu dans la matière, selon la capacité de celle-ci ». Si nous voulions appeler maladie une infériorité anormale des facultés, c'est donc encore dans la partie matérielle que nous en trouverions la cause subjective.

Les empêchements relatifs qu'amène l'erreur, le préjugé, ne peuvent, non plus que l'erreur elle-même, s'appeler morbides. L'erreur n'est pas une maladie : elle est le faux pas d'un homme d'ailleurs capable de marcher sans trébucher ; l'usage maladroit de fonctions demeurées intactes. Une attention meilleure eût suffi à prévenir l'erreur, et suffit encore maintenant à la dissiper. Aussi, qui songe à prescrire des cures somatiques, pour redresser une erreur, corriger un préjugé ? Ces cures ne retrouvent leur raison d'être que lorsque l'homme qui se trompe est un malade, un halluciné, un cerveau dérangé. Cette exception, on le voit, confirme elle-même notre thèse.

---

(1) M. J. Raymond, *Névroses et Psychoses*, L'Encéphale, 21 janv. 1907, p. 2.

(2) *Les maladies de l'énergie*, 2e édit., Paris, 1909, p. 3.

(3) *Somme théol.*, 1e part., q. 85, art. 7.

La maladie dit un trouble, un dérangement dans la puissance qui agit, dans la fonction elle-même. L'âme, substance spirituelle, ne saurait, comme telle, être réceptive de l'action extérieure d'une autre créature. Dès lors, un désordre moral pourra bien, par le paroxysme des passions qu'il excite, surmener un organe, le fatiguer à l'excès et produire ainsi des incapacités fonctionnelles qui sont la maladie ; mais la maladie, même celle qui puise dans l'âme son origine, ne saurait y trouver son siège.

Résumons tout ceci en peu de mots. La maladie est un trouble qui réside dans la fonction : une incapacité, une irrégularité fonctionnelle, elle n'est pas un usage défectueux tenant à des causes étrangères à la fonction elle-même.

L'âme, par ses actes spirituels, peut engendrer la maladie, mais elle ne peut, dans ses fonctions spirituelles, être atteinte d'aucune maladie.

Donc tout état pathogène appartient au composé humain.

Bien plus, la *raison* formelle du désordre morbide ne pouvant être dans l'esprit comme tel, réside dans le principe matériel qui, avec l'âme, forme le corps. Donc ce désordre, considéré dans sa formalité et non dans sa cause, est primairement organique et somatique mais non psychique. « La croyance à une imperfection physique s'impose à l'occasion de toute infirmité psychique (1). »

Voilà les observations que nous aurions voulu présenter à la quatrième section, si nous avions eu l'occasion et l'honneur de prendre part au débat du 26 avril 1911. Nous remercions la quatrième section d'avoir bien voulu nous offrir de motiver, par cette note, une assertion précédemment émise. Simplement énoncée dans cette autre séance, elle pouvait être mal comprise. Nos explications, loyalement offertes à des contradicteurs pour qui nous professons la plus profonde estime, feront voir à tout le moins qu'aucun spiritualisme n'est compromis en subjectivant dans le corps toutes les maladies, en refusant à l'esprit la passivité de la matière.

---

(1) A. Leclère, *art. cité*, p. 129.

M. le Dr Degrave entretient ensuite ses collègues, en une étude très complète et très documentée, de la « Meiostagmin-réaction », il fait connaître la valeur et la signification qu'il faut lui attribuer dans le diagnostic du cancer et des maladies infectieuses ; le travail sera publié ultérieurement.

M. le Dr Solé présente d'intéressantes pièces anatomiques ; il donne la relation succincte des cas qui ont donné lieu à l'intervention chirurgicale :

1° *Deux tumeurs solides de l'ovaire.* — La première est un fibrome volumineux que M. Solé enleva, il y a un an environ, à une jeune femme de 28 ans, sans qu'il y ait eu à relever d'antécédents personnels ni héréditaires ; mariée depuis deux ans, elle a été menstruée régulièrement. M. Solé, consulté, put délimiter, dans la fosse iliaque droite, une tumeur dure, irrégulière, légèrement bombée, très mobile. L'examen bimanuel démontre que le corps utérin, de dimensions normales, était légèrement refoulé vers la gauche, mais absolument indépendant de la tumeur. Pas d'ascite. Il était difficile de poser d'une manière catégorique le diagnostic de tumeur solide ou de fibrome utérin pédiculé. L'opération n'en était pas moins indiquée ; elle put être pratiquée sans amener de complications. La matrice était absolument saine, sans trace de noyau fibromateux. Il en était de même de l'ovaire gauche ; les annexes droites seules furent enlevées. La tumeur pèse deux kilos et cent grammes. Elle est constituée de tissu fibreux et de tissu musculaire, mais à prédominance de tissu fibromateux ; c'est un fibro-myome.

La seconde tumeur est un fibro-myome qui fut enlevé à une jeune fille de 25 ans, en novembre 1909 ; celle-ci se plaignait seulement de la sensation « d'une boule qui roulait dans le ventre ». L'examen abdominal démontre la présence d'une tumeur solide, indépendante de l'utérin, sans ascite. L'opération ne présenta pas de difficultés, le péritoine, au voisinage de la tumeur, était absolument sain. M. Solé a revu l'opérée il y a quelques jours, son état reste satisfaisant. La tumeur est constituée par du tissu fibreux et du tissu musculaire avec, peut-être, une tendance à la dégénérescence sarcomateuse.

2° *Carcinomes primitifs des deux seins.* — Il s'agissait d'une femme de 60 ans ; les deux seins étaient atteints de dégénérescence carcinomateuse. La malade, trois mois auparavant, s'était aperçue de l'apparition, dans l'épaisseur des seins, de petites tumeurs légèrement douloureuses. L'absence de ganglions dans l'aisselle et l'état général satisfaisant plaidaient en faveur d'une opération. Comme on peut le voir sur les pièces présentées ici, l'ablation de deux tumeurs fut faite en une fois, l'exploration du creux axillaire n'y fit pas découvrir de ganglions. Suites immédiates normales ; mais huit mois après se déclare une récidive du côté gauche, avec retentissement général, qui emporte rapidement la malade.

Il est exceptionnel de voir les deux mamelles entreprises simultanément ; sur 1664 cas de cancer mammaire, Gross n'a noté ce fait que deux fois. C'est ce qui a engagé M. Solé à relater ce cas.

3° *Un cas de maladie de Paget.* — Ce cas offre quelque intérêt, tant à cause de la rareté de la lésion que de son histoire.

L'affection primitive a débuté il y a environ six ans par un eczéma tenace de mamelon, qui résista à tous les traitements. Deux ans après, se produisit, à la surface, une ulcération bien nette, qui fut traitée avec succès par huit séances de roentgenthérapie. La guérison se maintint pendant deux ans, puis apparut une nouvelle ulcération qui fut traitée par le radium par un spécialiste très averti. La cicatrisation se fit normalement. Le malade vint alors consulter M. Solé, se plaignant de douleurs avec irradiations. L'état de la glande indiquait l'opération. L'examen des tissus enlevés atteste l'existence d'une cicatrisation superficielle parfaite, mais une entreprise des parties profondes.

4° *Kyste volumineux d'échinocoques du foie.* Il s'agit ici de la relation d'un cas, également digne d'être décrit.

La malade avait 31 ans quand elle reçut, il y a trois ans environ, un coup sur le sein droit. Un mois plus tard s'était produit, dans cet organe, une petite tumeur, douloureuse, qui amena le médecin traitant à pratiquer (juin 1908) une amputation totale de la glande mammaire. Un peu plus de deux ans après (septembre 1910), l'opérée s'aperçut que son ventre augmentait rapidement de volume, ne ressentant, d'ailleurs, ni malaise, ni douleur.

M. le Dr Solé la vit pour la première fois au commencement de mars 1911. C'est une femme de taille moyenne, dont l'abdomen avait à peu près les dimensions de celui d'une femme arrivée au terme d'une grossesse. Par la palpation on délimitait une tumeur remontant à 7 ou 8 centimètres au-dessous de l'ombilic, qui remplissait les flancs et allait se perdre dans le petit bassin. C'était une tumeur liquide, comme l'indiquait la fluctuation. Par le toucher et la palpation bimanuelle on sentait l'utérus couché au-devant du pubis, en antéversion, un peu dévié à gauche ; les culs-de-sac étaient remplis par la tumeur. Le diagnostic posé fut : kyste de l'ovaire droit. L'opération fut décidée et fixée au 14 mars. Une incision sous-ombilicale permit d'introduire la main dans la cavité abdominale, mais grand fut l'étonnement de l'opérateur de ne pas trouver de pédicule dans la partie inférieure, et de constater que cette tumeur provenait du foie, dont elle ne formait que le prolongement. M. Solé agrandit l'incision vers le haut, et à l'aide d'un trocart, fit une ponction, après avoir bien protégé la cavité abdominale par des compresses.

Le liquide qui sortit présentait une coloration verdâtre contenant de la bile. Après la disparition du liquide, il fut facile de reconnaître tous les caractères d'un kyste hydatique. Les tentatives en vue de former un pédicule furent infructueuses, mais, la tumeur faisant corps avec le foie sur une trop grande étendue, il fallut faire la marsupialisation, après avoir reséqué une grande quantité de la membrane. Ce qui restait de la poche fut fixé, par quelques sutures faites à la soie, à la partie supérieure de l'incision abdominale.

Les suites opératoires furent normales. A l'heure actuelle, la malade est encore à l'Institut, mais la poche diminue chaque jour de capacité. Tous les jours, pour hâter le travail de cicatrisation, quelques gouttes de teinture d'iode y sont introduites.

M. le Dr Solé est porté à croire — et ceci rend le cas particulièrement intéressant — que la tumeur du sein, qui fut prise pour une tumeur maligne, était également un kyste à échinocoques au début.

Cette communication, très écoutée, a fait l'objet d'un échange d'observations entre les membres présents.

Avant de se séparer, la section a procédé à l'élection de son bureau. Elle a réélu celui de l'année écoulée :

Président : Dr Struelens.
Vice-Présidents : Dr De Lantsheere.
Dr L. Stouffs.
Secrétaire : Dr Warlomont.

Cinquième Section

Mardi, 25 avril 1911. — M. Julin donne communication d'un fragment de son étude relative aux *indices des progrès économiques de la Belgique, de 1880 à 1908.*

Il traite des méthodes de recherche. Cette étude a paru *in extenso* dans la Revue des Questions scientifiques, 3e série, t. XIX, 20 avril 1911, pp. 369-401, et t. XX, 20 juillet 1911, pp. 109-150.

M. Van der Smissen étudie les moyens de relever les cours de la rente belge 3 % par l'action naturelle des lois économiques.

Il montre d'abord la différence profonde qu'il y a en Belgique entre l'endettement réel et l'endettement apparent de l'État. En d'autres pays, le poids de la dette retombe entièrement ou presque entièrement sur les contribuables : c'est le cas de l'Angleterre où la dette n'a pas de contre-partie. La nôtre est de 4 1/2 milliards approximativement. Les deux tiers sont représentés par le chemin de fer. Trois milliards de dette environ sont le capital obligations de la vaste entreprise de transport que gère l'État, celui-ci est le plus grand industriel du pays.

Si l'on tient compte de cette circonstance qu'une dette d'un demi-milliard de francs fut la rançon de l'indépendance de la Belgique, on constate que l'État a emprunté un milliard pour développer l'outillage économique du pays, toutes les autres dépenses publiques ayant été couvertes par les ressources ordinaires du budget, soit directement, soit par le jeu de l'amortissement. Il est bien clair que l'ensemble de nos travaux publics représente bien plus que ce milliard, alors surtout que les travaux en cours à Anvers et à Bruxelles ont donné lieu à des expropriations qui auront leur contre-partie. Les travaux maritimes et militaires d'Anvers terminés, la *jonction* effectuée à Bruxelles, l'État revendra avec bénéfice les terrains dont la disposition lui sera restée.

Si dans ces conditions la rente 3 %, qui est la rente type, a vu ses cours s'écarter du pair à la suite de la crise de 1907, il serait totalement inexact d'en conclure que le crédit du pays soit atteint. L'éducation du public se fait, il recherche les placements avantageux (même les Belges sont, en ceci, aventureux), et la rente 3 %, alors que les cours touchaient le pair, a perdu son attrait. Tel a été d'ailleurs le sort des rentes des pays voisins abandonnées à l'action naturelle des lois économiques : les cours ont glissé jusqu'au point d'arrêt naturel, celui où la baisse même a ramené les acheteurs qui ont trouvé, dans la différence entre les cours de la Bourse et la valeur nominale des titres, à la fois un intérêt supérieur au taux nominal et des chances de gain. Car l'attrait d'un titre croît en raison inverse des cours, pourvu que le titre ait une valeur intrinsèque sûre.

La baisse de la rente néanmoins a ses inconvénients. Quand l'État débiteur rachète plus de rentes qu'il n'en émet il y trouve, c'est vrai, son intérêt immédiat. Tel n'est point le cas de l'État belge, qui crée plus de rentes qu'il n'en amortit, tant en vue de développer le trafic du réseau ferré que pour les autres travaux publics. D'autre part, comme il crée des rentes perpétuelles qu'il ne doit point rembourser à la valeur nominale, l'émission et la vente à 90 francs, par exemple, d'un titre de rente 3 % d'une valeur nominale de 100 francs, équivaut à l'émission au pair d'un titre de rente de 90 francs à l'intérêt de 3.30 %. L'État en émettant, sous le pair, de la rente perpétuelle ne perd donc pas la différence entre le cours du jour et le pair.

Les circonstances sont telles que le glissement des cours constaté en ces derniers temps a pris fin récemment : il y a reprise, et il devait en être ainsi pourvu que les rentiers vissent les choses comme elles sont.

Eu égard à la faible importance de notre dette réelle par rapport aux ressources du pays, eu égard aussi à la part relativement peu importante des charges de la dette à laquelle les impôts doivent faire face, il serait désirable de mettre ces réalités si satisfaisantes en pleine lumière et pour cela de séparer le budget fiscal du budget industriel de l'État. La réforme que réclame M. Van der Smissen est une réforme de comptabilité et non de gestion, elle n'est pas non plus une refonte des attributions des départements des finances et du chemin de fer.

D'autre part, il attend de cette transformation de la comptabilité budgétaire des répercussions heureuses sur la gestion du réseau ferré et des finances publiques.

Bref, M. Van der Smissen compte sur l'action naturelle des lois économiques pour ramener des clients à la rente 3 %, surtout si le budget met en lumière le faible endettement réel du pays. Il se prononce contre les moyens artificiels de soutenir les cours, moyens qu'il trouve dangereux. Il déconseille la création d'un type de rente nouveau, idée séduisante sans doute, mais mesure qui serait préjudiciable à la rente 3 %, à ses détenteurs d'abord, et finalement à l'État dont la clientèle se détacherait.

M. Léon Joly relève le mot *remède* employé par M. Van der Smissen. Il ne considère point les cours actuels de la rente comme un mal.

Selon lui il est déjà fait usage de trop d'artifices juridiques pour soutenir les cours. Il se déclare adversaire des mesures qui contraignent à placer en fonds d'État l'avoir de certaines personnes et de certains établissements publics.

M. Blondel appuie le premier de ces points de vue. Il cite l'exemple de l'Allemagne dont les rentes sont cotées plus bas que la rente belge à cause du grand attrait que les placements industriels exercent sur les capitalistes.

Mercredi, 26 avril 1911. — M. Blondel fait une communication relative au projet *Paris port de mer*. Ce travail est publié *in extenso* dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, 3e série, t. XX, 20 juillet 1911, pp. 219-237 ; en voici un résumé :

M. Blondel explique que la question de *Paris port de mer* est agitée depuis longtemps.

Mais cette année on a discuté de nouveau les divers projets qui ont été mis en avant à la suite des études de M. Bouquet de la Grye. On a pensé en effet que ce projet grandiose n'aurait pas seulement pour résultat d'augmenter l'activité économique de la vallée de la Seine. Il aurait, dit-on, une importance capitale pour protéger Paris contre les inondations. Celle de 1910 a causé de grands dégâts. Elle a justement effrayé les habitants de la capitale et ceux de la banlieue qui a été particulièrement éprouvée.

On est unanime à penser qu'il faut prévenir le retour possible d'un pareil fléau.

M. Blondel fait d'abord remarquer que c'est d'une façon toute factice qu'on a solidarisé la question *Paris port de mer* avec le désir de protéger Paris contre les incartades possibles de la Seine.

Le projet dont on parle n'aurait vraiment de raison d'être que s'il devait avoir une grande utilité économique, permettre par exemple au port qu'on propose de créer à Clichy de rivaliser avec des villes comme Londres, Anvers ou Rotterdam.

Il semble qu'on se soit fait beaucoup d'illusions. L'argumentation sur laquelle on s'appuie est très fragile.

La vallée de la Seine, quoi qu'on fasse, ne pourra jamais avoir l'importance de la vallée du Rhin. Ce n'est jamais par là que passeront la plupart des marchandises venant de l'Europe centrale. Paris est loin d'avoir un hinterland industriel comparable à ceux d'Anvers ou de Rotterdam. Les navires de mer qui viendraient par hypothèse jusque là ne pourraient y trouver assez de fret. Au surplus, on ne peut espérer que des navires de plus de 100 m. puissent jamais remonter la Seine, les courbes sont trop accentuées ! Or la plus grande partie des navires de mer ont aujourd'hui plus de 100 mètres de long et partout on s'oriente vers les grands navires et les gros tonnages.

Il faut aller plus loin : on peut contester l'utilité qu'il y aurait pour les navires de moins de 100 mètres à éviter le transbordement qui se fait aujourd'hui à Rouen. Les frais de transbordement dépassent rarement 40 c. par tonne ; ils descendent parfois à 20 c. Le jour où Clichy serait devenu port de mer, c'est là qu'il faudrait faire une partie des transbordements qui se font actuellement à Rouen. Et ils y seraient probablement effectués dans de plus mauvaises conditions.

On cite l'exemple de Bruxelles port de mer ; c'est bien à tort.

Les deux cas ne sont pas comparables. Bruxelles est à peine à 50 kil. de l'Escaut. Il en est séparé par une région plate où il n'y a pas d'accidents de terrain. Le canal à construire ne comporte aucune des difficultés inhérentes au projet qu'on discute au sujet de Paris.

Enfin, il faut se mettre en présence des grosses dépenses auxquelles on serait entraîné. C'est une société, dit-on, qui se chargerait de l'opération. Mais, justement pour ce motif, il faut se dire que des spéculations se produiraient certainement sur les terrains avoisinant le canal. On peut même voir avec inquiétude le déplacement du mouvement d'affaires qui se produirait et la nouvelle attraction qui serait exercée sur la province, qui déjà se dépeuple trop.

Et si l'entreprise réussissait mal, il faudrait que l'État intervînt. Il serait sans doute finalement amené à assurer à tout prix l'achèvement des travaux nécessaires à l'exploitation de ce très coûteux canal. Et ce n'est pas un perspective séduisante.

Beaucoup d'autres travaux se rattachant à l'outillage *national* seraient plus utiles. Tout le monde le reconnaît. Aussi le projet Paris port de mer n'est pas à la veille d'être voté. Parmi les 211 députés qui ont signé le projet soumis à la Chambre, il y en a déjà un certain nombre qui reconnaissent loyalement qu'ils étaient imparfaitement renseignés, et l'opposition grandit à tel point que vraisemblablement le projet, qui avait d'abord paru à beaucoup de Français très séduisant, n'aboutira pas.

Jeudi, 27 avril 1911. — M. Morisseaux étudie les moyens de mettre en valeur *l'Hinterland nord du port de Beira*. La conférence, consacrée principalement au chemin de fer vers les lacs Nyassa et Tanganika, est publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, 3^{me} série, t. XX, 20 juillet 1911, pp. 200-218.

M. Goffart traite du *Commerce belge au Katanga*. Voici un résumé de cette communication.

La présence au Katanga d'un certain nombre de négociants anglais et l'impossibilité de s'en protéger par des mesures douanières ont fait naître en Belgique des appréhensions. Elles proviennent de la méconnaissance des principes du commerce international. Une étude attentive des faits le prouve.

On peut estimer à 30.000.000 fr. environ la capacité d'achat du Katanga, dont 18 millions pour les besoins des services publics et 12 millions pour ceux des particuliers. La compétition étrangère n'est guère dangereuse pour le premier groupe d'affaires qui comprend surtout des dépenses de gros outillage que nos usines sont particulièrement aptes à satisfaire. La concurrence dans la fourniture aux particuliers paraît engagée entre producteurs belges et sud-africains. En réalité, cela n'est vrai que pour les denrées alimentaires. Pour les produits métallurgiques et manufacturés, l'Afrique australe est tributaire de l'Europe tout comme le Katanga. Dès lors la compétition se ramène à une question d'organisation, de prix de transport et de change. Bien que les possessions britanniques accordent un régime préférentiel au Royaume-Uni, la Belgique a réussi, sans organisations spéciales, à s'y créer un marché d'une importance égale à celui qu'elle dispute au Katanga. Comment se laisserait-elle évincer de celui-ci alors que ses besoins correspondent précisément — sauf pour les produits agricoles — aux aptitudes productrices de la métropole? Le régime de libre échange auquel la Belgique est astreinte au Katanga ne mettra pas en péril son hégémonie commerciale ; au contraire il tiendra son activité en éveil et facilitera le développement de ses importations sur le marché dix fois plus vaste de l'Afrique australe (1).

Sixième Section

Mardi, 25 avril 1911. — Le bureau sortant est réélu à l'unanimité des membres présents.

La question de concours de 1909 et 1910 est maintenue. Elle est libellée comme suit :

« Faire une étude sur la résistance de l'air au point de vue particulier de l'aviation ».

M. P. Daubresse présente une communication sur les *Transmissions par câbles.*

M. V. Renaud fait ensuite un exposé des *Procédés d'affinage sur sole et du procédé Hœsch.*

Mercredi 26 avril. — La section se joint à la cinquième pour entendre la communication de M. G. Blondel sur *Paris, port de mer*. Cette communication est publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison du 20 juillet 1911.

---

(1) Cette étude paraîtra dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 octobre 1911.

Jeudi 27 avril. — M. A. Renier présente à la section une communication avec projections sur *Le plus grand ennemi du mineur ; les dernières recherches sur les explosions des poussières de houille*. Cette étude paraîtra dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison du 20 octobre 1911.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 25 AVRIL 1911

La séance s'ouvre à deux heures et demie, sous la présidence du R. P. Van den Gheyn, Vice-Président de la Société.

La parole est donnée à M. Mansion, secrétaire général, pour lecture du rapport suivant sur les travaux de la Société en 1910-11.

Publications. La Société a fait paraître, du 1er avril 1910 jusqu'au 1er avril 1911, les trois derniers fascicules du tome XXXIV des ANNALES, correspondant à l'année sociale 1909-1910 et un fascicule du tome XXXV, de l'année 1910-1911 ; ensuite quatre livraisons de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (t. LXVII, 2e livraison ; t. LXVIII ; t. LXIX, 1re livraison) ; en résumé, les tomes 101, 102 et une partie des tomes 103, 104 de nos publications.

1° ANNALES. Le tome XXXIV des ANNALES a 645 pages réparties comme il suit entre les diverses sections :

Sciences mathématiques	165	pages
Sciences physiques	180	»
Sciences naturelles	125	»
Sciences médicales	55	»
Sciences techniques.	20	»
Documents	100	»
	645	»

Divers mémoires de sciences naturelles, médicales, économiques ou techniques présentés dans les sections ont été publiés dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES et même dans un autre recueil; c'est ce qui explique le moindre nombre de pages consacrées dans nos ANNALES aux travaux de ces sections. Par exemple, *la grande enquête de la 5^e^ section sur les Ports et leur fonction économique* se trouve reportée dans la REVUE, comme les années précédentes. La collection maintenant terminée de ces remarquables monographies sur les ports a paru aussi en fascicules séparés, dont l'ensemble forme un volume de plus de mille pages avec un grand nombre de plans.

2° REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Les quatre livraisons publiées pendant l'année écoulée sont dignes de ce recueil de haute vulgarisation. Outre l'enquête sur les ports dont nous venons de dire un mot, signalons deux articles de philosophie scientifique, l'un du R. P. Donau, intitulé : *Un vitaliste idéaliste, H. Driesch,* l'autre du R. P. de Sinéty sur *Le monisme psychobiologique.* M. P. Duhem, dans son travail sur *La physique néoplatonicienne au moyen âge*, renouvelle, sur un point important, l'histoire des doctrines astronomiques entre Ptolémée et Copernic. Dans le domaine de la physiologie, il faut citer les études du R. P. Maréchal intitulées : *Colloïdes ; enzymes et catalyseurs ; antigènes et anticorps,* où les savants même trouveront quelque chose à apprendre.

La REVUE a publié sur le duc Théodore, le père de notre Reine bien aimée, une notice extrêmement sympathique due à la plume de deux de nos confrères. S. M. la Reine et S. A. R. la duchesse Théodore ont été très sensibles à l'hommage que la Société leur a fait d'exemplaires de cette notice et, par l'intermédiaire du Secrétariat, elles ont fait parvenir aux auteurs anonymes de la biographie les remerciements les plus flatteurs.

Voici d'ailleurs la liste des principaux articles de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES dans les quatre livraisons dont il vient d'être question.

1. *R. P. B. Lefebvre.* A propos d'une histoire des mathématiques.
2. *F. Kucharzewski.* Une question de statique débattue au XVII^e^ siècle.
3. *P. Duhem.* La physique néoplatonicienne au moyen âge.

4. *Th. Moreux.* Le Soleil.

5. *Van der Mensbrugghe.* Ce que l'on peut apprendre en voyant couler l'eau.

6. *M. d'Halluin.* La photographie à travers les corps opaques.

7. *R. P. J. Maréchal.* Pour faciliter la lecture des travaux récents de physiologie. Colloïdes ; enzymes et catalyseurs ; antigènes et anticorps.

8. *La Rédaction.* J.-H. Fabre.

9. *R. P. de Sinéty, S. J.* Un demi-siècle de darwinisme.

10. *Ch. de Kirwan.* Les monts, les bois et les eaux.

11. *R. P. Thirion, S. J.* Le Frère Alexis-Marie G.

12. *Th. Moreux.* L'assaut du pôle Sud.

13. *L. Fabry.* Le tremblement de terre de Provence et la théorie des tremblements de terre.

14. *F. Kaisin.* Les cavernes et les rivières souterraines de la Belgique.

15. *J. Mansion.* Le pays d'origine des Indo-européens.

16. *M. Boubier.* La nomenclature scientifique et la langue internationale.

17. *R. P. L. Boule, S. J.* Le concept actuel d'hystérie.

18. *X. Y.* S. A. R. Charles Théodore, duc en Bavière.

19. *Ern. Viaene et F. Bernard.* L'art de guérir chez les indigènes du Congo belge.

20. *J.* En marge de la guerre. Blessures et maladies.

21. *C. Beaujean.* La contribution de l'État à la constitution des retraites.

22. *M. Rondet-Saint, M. Dewavrin, Ch. Terlinden, Meuwissen, G. Blondel.* Les Ports et leur fonction économique.

23. *R. P. J. Charles, S. J.* L'Administration des ports.

24. *F. Deschamps.* Proposition d'enquête sur les marchés monétaires.

25. *R. P. Van den Gheyn, S. J.* L'institut Carnegie à Washington.

26. *A. Witz.* Quelques pages de l'histoire du fer au XIX^e^ siècle.

27. ***. La réorganisation de l'École de guerre en Belgique.

28. *R. P. Donau, S. J.* Un vitaliste idéaliste : Hans Driesch.

29. *R. P. R. de Sinéty, S. J.* Le monisme psychobiologique.

30. J. T. Nécrologie : A. Delvigne ; Domet de Vorges.

Le petit texte de la Revue contient l'analyse, soit brève, soit détaillée de soixante-dix ouvrages relatifs à toutes les sciences dont s'occupe la Société scientifique, puis des Revues des recueils périodiques sur l'histoire des mathématiques, l'astronomie et la physique du globe, la chimie, la géologie, la géographie, la botanique économique, l'entomologie, la géographie, l'ethnographie et les sciences médicales.

Sessions. Les sessions de Pâques 1910 et de janvier 1911 se sont tenues à Bruxelles, celle d'octobre 1910 à Charleroi.

La première conférence de la session de Pâques, sur *Le monisme psychobiologique*, par le R. P. de Sinéty, appartenait à ce domaine mixte des confins de la science et de la philosophie dont notre Société s'est toujours préoccupée depuis l'époque où le R. P. Carbonnelle publiait dans la Revue ses pénétrantes études sur les questions les plus hautes de physique générale et de biologie. Le R. P. de Sinéty a exposé avec une grande clarté et critiqué avec beaucoup de finesse les arguments des psychobiologistes monistes, qui n'osent plus admettre le mécanisme matérialiste, trop contraire à la science actuelle, et que leurs préjugés philosophiques ou antiphilosophiques empêchent encore de se rallier au finalisme traditionnel de la philosophie aristotélicienne.

Les brillantes conférences de vulgarisation de M. d'Halluin sur *La photographie à travers les corps opaques* et de M. l'abbé Moreux sur *Le Soleil*, l'une plus objective, l'autre renfermant à la fois les hypothèses de l'auteur et les résultats admis par tous les astronomes, ont eu le plus éclatant succès auprès des nombreux auditeurs réunis au local *Patria*. M. d'Halluin nous a fait connaître les progrès vraiment merveilleux de la radiographie, particulièrement au point de vue médical ; M. l'abbé Moreux nous a développé, avec une verve éblouissante, les espérances que les savants peuvent avoir, selon lui, dans le domaine des prédictions sismologiques et météorologiques.

A la session de janvier dernier, le R. P. Schmitz, directeur du Musée géologique des bassins houillers, nous a entretenus de *La formation sur place de la houille et de la tourbe.* Il nous a montré en projections les nombreuses tourbières du Tyrol, du Danemark, de la Suède qu'il a été visiter et qui lui ont fourni des preuves nouvelles à l'appui de sa thèse, thèse qui est d'ailleurs traditionnelle en Belgique, si j'en crois les spécialistes sur la matière. Nous regrettons que cette conférence solide et savante du R. P. Schmitz n'ait pas été publiée dans la REVUE. L'auteur nous en doit au moins un résumé substantiel pour les ANNALES.

Les circonstances ne m'ont pas permis d'assister à la conférence de M. A. Witz à Charleroi : *Les moteurs de la métallurgie,* mais j'ai pu la lire dans la livraison de janvier 1911 de la REVUE. Sous le titre : *Quelques pages de l'histoire du fer au* XIX^e^ *siècle,* le savant professeur de l'Université catholique de Lille nous a décrit, avec une rare compétence, les transformations de l'industrie du fer, sous l'influence du progrès de toutes les parties de la physique. Grâce à ces progrès, elle est parvenue à ce résultat merveilleux de se procurer toute la puissance motrice dont elle a besoin en récupérant le calorique qu'elle perdait autrefois, et un ingénieur anglais a pu dire, en exagérant un peu, que la fonction principale d'un haut-fourneau, à l'avenir, sera de produire un gaz combustible, en donnant de la fonte comme sous-produit.

La savante conférence de M. Witz n'a pas eu, m'a-t-on dit, autant d'auditeurs qu'elle aurait dû en avoir dans un milieu industriel comme Charleroi. En d'autres milieux belges pourtant les derniers progrès de l'industrie du fer sont connus et appliqués et l'on recourt volontiers à la science de notre savant confrère de Lille.

Les travaux des sections ont été nombreux et variés. Environ soixante-dix notes ou mémoires ont été présentés dans les diverses sections et seront publiés dans nos ANNALES. Signalons en particulier, à la quatrième section, la communication du R. P. Boule, S. J., sur *La philosophie dans ses rapports avec les sciences biologiques et médicales.* Cette conférence a donné lieu à une discussion ou échange de vues qui a abouti à cette conclusion que les médecins et les philosophes ont tout intérêt à étudier ensemble, dans un esprit de confraternité, les questions mixtes que l'on rencontre bon gré mal gré dans la pratique de l'art médical.

État actuel de la Société. Nous avons admis 19 nouveaux membres en 1910 ; 16 ont donné leur démission, 7 nous ont été enlevés par la mort, de manière que le nombre de nos membres a diminué de 4 ; il est donc descendu à 520. Le nombre des abonnés à la REVUE est resté à peu près stationnaire.

Parmi ceux que nous avons perdus nous devons citer l'éminent ingénieur Nyssens-Hart (1859-1910), bien connu par ses travaux au port de Zeebrugge ; le bon chanoine Delvigne, l'un de nos membres fondateurs, qui dans les débuts de la Société a tant fait pour nous gagner de nouveaux membres ; M. le comte Domet de Vorges (1829-1910), qui a servi, pendant tant d'années, de trait d'union entre notre Société et la Société bibliographique de Paris. M. Domet de Vorges, très au courant de la philosophie néo-scolastique dans ses rapports avec les sciences, a maintes fois apporté des lumières décisives dans les discussions sur les principes de la cosmologie qui ont surgi dans nos sections. Il avait été Président de la Société en 1890-1891, année critique où il était bon que celui qui représentait la Société fût connu à Rome, comme un des plus fermes adeptes du péripatétisme chrétien.

Nous avons aussi à déplorer la mort du Frère Alexis-Marie (1835-1910), l'éminent géographe, et du R. P. De Smedt (1832-1910), le savant Bollandiste, ce dernier à la fois correspondant de l'Institut de France et membre de l'Académie de Belgique, tous deux membres très dévoués de la Société depuis son origine ou à peu près.

On doit au Frère Alexis-Marie un progrès essentiel de la cartographie scolaire et savante : il a introduit dans les cartes, si élémentaires soient-elles, la troisième dimension qui y manquait ; elles sont devenues hypsométriques en même temps que planimétriques.

Nous n'avons pas à parler ici de l'œuvre historique du R. P. De Smedt, mais nous devons dire un mot de ce qu'il a fait pour la *Société scientifique* à ses débuts. On sait que Draper a publié un livre d'une érudition tout à fait américaine sur les *Conflits* prétendus *de la science avec la religion*. C'est le manuel de ceux qui, hélas, ne savent rien ni de la religion, ni de l'histoire de la science, pour attaquer celle-là soi-disant au nom de celle-ci. Le R. P. De Smedt a rectifié dans un savant article de la REVUE les plus grosses erreurs de Draper à l'époque où l'on répandait son mauvais livre en Europe en le traduisant en français, en allemand et en italien. M'est-il permis de signaler à mes auditeurs un autre écrit du R. P. De Smedt, ses *Principes de critique historique* (1880) ? Nous avons tous grand besoin de méditer ces Principes à la *Société scientifique*, car la plupart des sciences dont nous nous occupons reposent, comme l'histoire, sur le témoignage d'autrui : astronomes, physiciens, chimistes, géologues, géographes, biologistes, médecins, économistes, techniciens, nous ne pouvons pas faire toutes les expériences, les observations, les lectures, sur lesquelles reposent nos sciences ; nous devons donc peser les témoignages et pratiquer tous le principe des probabilités accumulées de Newman dont le P. De Smedt a si bien montré l'importance ; pratiquer aussi la défiance à l'égard des hypothèses séduisantes en histoire naturelle comme en histoire humaine, et peser le degré de confiance à accorder à chacune de nos conclusions. Les *Principes de critique* du P. De Smedt nous apprennent tout cela et sont pour ainsi dire les principes du bon sens même.

Pendant l'année écoulée, de nombreuses distinctions honorifiques ou scientifiques ont été accordées à des membres de la Société.

M. Louis Henry, l'éminent professeur de Louvain, a été nommé membre d'honneur de la Société chimique de France et, en même temps, commandeur de la Légion d'honneur. M. le D^r^ Meessen, notre confrère de la quatrième section, a reçu les insignes de chevalier de l'ordre de l'Aigle rouge de Prusse. MM. les Docteurs Stouffs (de Nivelles) et Struelens ont été nommés, le 29 avril dernier, chevaliers ; MM. Poullet et de Limbourg-Stirum, officiers ; MM. Van der Bruggen et Heynen, grands-officiers de l'Ordre de Léopold. Un peu plus tard, en octobre, de nombreux médecins belges ont fêté le cinquantenaire professionnel de notre confrère le D^r^ Heynen. Le 3 mai 1910, M. Ch. Lagasse-de Locht, l'un de nos membres fondateurs, a été nommé Directeur général des Ponts et Chaussées. En France, pendant notre session de Pâques de l'an dernier, de nombreux savants, à la tête desquels se trouvait M. Edmond Perrier, le Directeur du Muséum d'histoire naturelle de Paris, fêtaient, à Sérignan, le jubilé de l'illustre entomologiste J.-H. Fabre, que nous avons l'honneur de compter parmi nos membres et nos collaborateurs depuis longtemps. Nous avons envoyé, à cette occasion, une médaille au modeste savant avec une inscription où nous lui exprimions la reconnaissance de la *Société scientifique de Bruxelles* pour les travaux de premier ordre qu'il a publiés dans la Revue.

En août 1910, M. le Dr Deletrez, de la quatrième section, était nommé correspondant de l'Académie royale de médecine de Belgique ; un peu plus tard, M. J. J. Van Biervliet, notre confrère de Gand, entrait comme correspondant à l'Académie royale de Belgique.

Enfin, le 15 décembre dernier, M. Édouard Branly était nommé associé de l'Académie royale de Belgique et, le 23 janvier suivant, membre de l'Académie des Sciences de Paris, aux applaudissements de tous ceux qui ont pu suivre les profondes recherches de l'inventeur de la télégraphie sans fil ; disons mieux, aux applaudissements de tout le monde civilisé, parce que personne n'ignore la portée immense de cette admirable invention. M. Branly est membre de la Société scientifique depuis 1878 ; elle est fière de ses succès si bien mérités, comme elle est fière aussi des succès de ceux de ses membres dont je viens de faire une énumération probablement incomplète.

M. le Secrétaire général propose de nommer commissaires pour l'examen des comptes du Trésorier, M. Ch.-J. de la Vallée Poussin et le P. Thirion. Cette proposition est adoptée.

La parole est ensuite donnée à M. A. Proost, pour une conférence sur *La fertilisation des rochers, des garigues et des marais en Italie et en Provence.*

Cette conférence est publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison du 20 juillet 1911.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 26 AVRIL 1911

La séance s'ouvre à deux heures et demie, sous la présidence de M. le Dr Desplats, président de la Société.

La parole est donnée à M. Mansion, secrétaire général, pour la lecture du rapport suivant sur *La Société bibliographique de Paris*, adressé par M. le Bon Charles de Selle de Beauchamp, son secrétaire général.

« Un des membres les plus distingués du Conseil d'administration de la *Société bibliographique* avait la douce coutume de se rendre, chaque année, à l'assemblée générale de la *Société scientifique de Bruxelles*, et d'y présenter un aperçu des travaux de notre association. C'était pour lui une joie ; et il revenait conter à ses collègues la bienveillance de l'accueil reçu, l'intérêt des rapports entendus, la haute portée de l'influence d'une société sœur, dans un pays ami.

» C'est que, depuis le jour où il quitta la carrière diplomatique, M. le comte de Vorges avait voulu donner à la *Société bibliographique* son dévouement fidèle, et sa collaboration appréciée. Mais la mort est venue le frapper, le 17 août, en son château de Maussans. Tous ceux qui ont connu la droiture de son esprit, la vigueur et l'étendue de son intelligence, son zèle au service des œuvres, garderont de lui un souvenir ému.

» La dernière assemblée générale de la *Société bibliographique* s'est tenue à Paris, le 23 mai 1910, sous la présidence de Mgr Baudrillart ; elle ne put pas davantage entendre, suivant encore une précieuse habitude, un de ces rapports très étudiés, que savait lui offrir M. le comte Aymer de la Chevalerie. L'éloignement de notre président qui avait recueilli, comme un héritage sacré, le mandat que lui destinait M. le marquis de Beaucourt, était dû à des causes, qui, en frappant la Société, attristaient tous ses membres. Je ne puis mieux faire ici que citer les expressions de M. Geoffroy de Grandmaison : « Depuis longtemps, M. Aymer de la Chevalerie
» menait une vie laborieuse, espérant compenser par l'énergie
» morale les forces physiques qu'il sentait décroître, et nous
» n'avions pas nous-mêmes la sagesse de lui conseiller le repos,
» trompés par la vaillance avec laquelle il se dépensait sans mesure.
» Il se retire emportant notre gratitude à tous, pour la parfaite
» aménité de ses relations, la délicatesse de sa bonne grâce, la
» constance de son zèle, la simplicité de ses vertus... Le Conseil a
» donc pensé que M. Aymer voudrait bien accepter le seul témoi-
» gnage qu'il est permis à notre gratitude de lui offrir, en lui
» décernant le titre de Président honoraire de la *Société biblio-
» graphique*. » L'assemblée générale a ratifié par acclamation cette décision de respectueuse courtoisie.

» Quelques jours plus tard, le Conseil demandait à M. Geoffroy de Grandmaison une nouvelle preuve de son profond dévouement, et, à l'unanimité des membres présents, l'élisait président. Ce fut l'occasion pour la *Société bibliographique* de recevoir, une fois de plus, la bénédiction apostolique de Sa Sainteté Pie X, des lettres fort bienveillantes de Son Excellence le Cardinal Secrétaire d'État, de la plupart des archevêques et évêques de France, et une, qui nous a particulièrement touchés, de M. Mansion.

» Ces marques de précieuse sympathie n'ont pu que grandement encourager la *Société bibliographique.*

» Dans le cours de l'année 1910, un archevêque, cinq évêques, le recteur de l'Institut catholique de Paris, S. A. R. Monseigneur le Duc de Vendôme, et 97 nouveaux sociétaires, ont demandé leur inscription sur nos registres.

» Le Comité de fonds et le Comité de propagande ont réalisé le moyen de développer notre salle de lecture ; un local mieux approprié, situé en face de nos bureaux de la rue Saint-Simon devenus insuffisants, vient de s'ouvrir à la disposition des lecteurs, heureux de consulter les 186 revues françaises, et les 77 périodiques étrangers, que nous pouvons mettre à leur disposition.

» Le Comité de publication a terminé l'étude d'un manuscrit, qui lui avait été soumis, sur l'importante question du procès de Jeanne d'Arc.

» La commission de lecture s'est vivement préoccupée des livres de prix à donner dans les écoles primaires, pour élever l'esprit et former la volonté des jeunes lauréats. Par ailleurs, après des examens et des discussions approfondis, elle a fait paraître l'analyse de 128 ouvrages de choix, pour la formation de bibliothèques populaires. Les résumés ont paru dans le Bulletin mensuel, et les titres ont été groupés en fin d'année, afin de former le 23ᵉ supplément au catalogue de livres, destinés aux bibliothèques paroissiales, d'usines, de patronages, de cercles ouvriers, de soldats.

» Une seconde étude a permis de rechercher les œuvres les meilleures, et de composer, avec elles, deux séries de 25 volumes, qui ont pris place dans les bibliothèques renouvelables de la *Société bibliographique.* La 1ʳᵉ série, spécialement destinée aux hommes, a été composée à 40 exemplaires, et 50 exemplaires ont été jugés nécessaires pour la seconde série, intéressant particulièrement les femmes.

» En effet, les demandes de bibliothèques arrivent, d'année en année, plus nombreuses ; elles ont atteint, en 1910, le chiffre de 800.

» D'un dernier comité, à qui incombe la rédaction du *Polybiblion,* on peut dire : « pas de nouvelles, bonnes nouvelles». Il veut continuer à trouver pour cette Revue bibliographique universelle, des lecteurs dans tout le monde civilisé ; afin d'atteindre ce but, il recherche et possède comme collaborateurs, des hommes d'une compétence scientifique reconnue, et d'une absolue orthodoxie religieuse et morale.

» Plus que jamais, aujourd'hui, les hommes d'étude et de dévouement doivent mettre en commun leurs efforts au service de l'Église et de la Science, la *Société bibliographique* semble donc s'imposer, avec ces principes, mieux qu'à toute époque ; elle doit chercher, par des labeurs soutenus et continus, à ne pas faillir à sa noble mission.

» Elle s'honore en particulier de compter parmi ses plus anciens membres et par conséquent les plus fidèles, l'illustre professeur Branly ; et il lui semble que la nature même des travaux de ce grand savant lui crée un lien spécial avec la *Société scientifique de Bruxelles.* » *(Applaudissements).*

La parole est ensuite donnée au R. P. De Munnynck, O. P., pour une conférence sur *La Psychologie du Spécialiste.*

Cette conférence est publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison du 20 juillet 1911.

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 27 AVRIL 1911

La séance s'ouvre à deux heures et demie, sous la présidence de M. Dubois, président de la V^e section de la Société.

La parole est donnée à M. Mansion, secrétaire général, pour faire connaître les conclusions des commissaires chargés d'examiner les comptes du Trésorier relatifs à l'année 1910. Ces comptes sont approuvés par l'assemblée. En voici le détail :

RECETTES ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE PENDANT L'ANNÉE 1910

Revue des Questions scientifiques

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des abonnements fr.	9504,48	Impression, illustration et expédition fr.	6511,56
Vente d'anciennes livraisons	500,00	Collaboration	4194,76
Vente des volumes « Les Ports »	266,35	Impression du tome V « Les Ports »	365,25
Subside de la Société	1374,84	Administration et propagande	574,10
	11645,67		11645,67

Annales

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des cotisations	6847,30	Impression, illustration et expédition	2955,89
Vente d'anciens volumes	70,00	Indemnités aux secrétaires	2420,00
Vente des brochures publiées par la Société	2,80	Frais de session, location des locaux	1002,00
		Excédent passé à la Société	542,00
	6920,10		6920,10

Société

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des coupons (capital social)	3727,72	Subside pour recherches scientifiques	200,00
Intérêts du compte courant	806,38	Subside à la *Revue*	1374,84
Excédent du compte *Annales*	542,00	Excédent	3501,26
	5076,10		5076,10

M. le secrétaire général fait connaître le résultat des élections pour le Conseil général et les bureaux des sections.

La composition du Conseil pour l'année 1911-1912 est la suivante [1] :

Président d'honneur : M. A. BEERNAERT.
Président : M. ÉD. VAN DER SMISSEN (1915).
Vice-Présidents : M. ÉD. BRANLY (1912).
M. le chanoine GRÉGOIRE (1913).
Secrétaire : M. P. MANSION (1915).
Trésorier : M. ED. GOEDSEELS (1912).

---

[1] Le nom de chaque membre du Conseil est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat.

Membres : MM. Ch. Beaujean (1912).
le M^is^ de la Boëssière-Thiennes (1914).
L. Cousin (1913).
Ed. De Wildeman (1915).
Fr. Dewalque (1914),
le D^r^ X. Francotte (1912).
Ch. Lagasse-de Locht (1913).
le C^te^ Ad. de Limbourg-Stirum (1912).
E. Pasquier (1913).
A. Proost (1914).
Ch.-J. de la Vallée-Poussin (1914).
le R. P. Van den Gheyn (1914).
G. Van der Mensbrugghe (1915).
le D^r^ A. Van Gehuchten (1912).
le D^r^ R. Warlomont (1915).
Conseiller honoraire : M. L. De Lantsheere.

BUREAUX DES SECTIONS :

1^re^ Section

Président : le R. P. Bosmans, S. J.
Vice-Présidents : M. Goedseels.
M. Lecat.
Secrétaire : M. Dutordoir.

2^e^ Section

Président : M. A. de Hemptinne.
Vice-Présidents : R. P. Schaffers, S. J.
M. le Chanoine De Muynck.
Secrétaire : R. P. Lucas, S. J.

3^e^ Section

Président : M. le Chanoine Grégoire.
Vice-Présidents : M. le Curé Claerhout.
M. le D^r^ H. Lebrun.
Secrétaire : M. F. Van Ortroy.

4^e^ Section

Président : M. le D^r^ Struelens.
Vice-Présidents : M. le D^r^ De Lantsheere.
M. le D^r^ Stouffs.
Secrétaire : M. le D^r^ R. Warlomont.

5^e^ Section

Président : M. E. Dubois.
Vice-Présidents : M. Beernaert.
M. Morisseaux.
Secrétaire : M. Éd. Van der Smissen.

6^e^ Section

Président : M. P. Daubresse.
Vice-Présidents : M. Renaud.
M. Decoster,
Secrétaire : M. R. Van der Mensbrugghe.

M. le secrétaire général donne lecture des questions de concours proposées par les sections, pour l'année 1911-1912.

La parole est donnée à M. C. Morisseaux pour une conférence sur *L'Hinterland Nord du port de Beira, communications par chemins de fer avec les lacs Nyassa et Tanganika.*

Cette conférence est publiée dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 juillet 1911.

La parole est ensuite donnée à M. F. Goffart pour une conférence sur *Le Commerce belge au Katanga.*

Cette conférence sera publiée dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 octobre 1911.

Le président félicite les orateurs et déclare close la session de Pâques 1911.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

du 1er mai 1910 au 1er mai 1911

I. Livres et brochures

A. Acloque. Sous les flots. Un vol. grand in-8° de 367 pages, orné de nombreuses figures. Tours, A. Mame et fils, 1911.

H. Andoyer. Cours d'Astronomie, 1re partie : Astronomie théorique, 2e édition entièrement refondue. Un vol. in-8° de v-383 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1911.

Henryk Arctowski Studies on climates and crops. Variations in the distribution of atmospheric pressure in North America (Extrait du Bulletin of the American Geographical Society). Une broch. in-8° de 13 pages, 1910.

L. Bachelier. Mouvement d'un point ou d'un système matériel soumis à l'action de forces dépendant du hasard (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences). Une broch. gr. in-4° de 3 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

—— Les probabilités à plusieurs variables (Extrait des Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3e série, t. 37). Une broch. gr. in-4° de 22 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Éd. Barbette. Le dernier théorème de Fermat. Une broch. in-8° de 18 pages. Paris, Gauthier-Villars, s. d.

—— Les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance. Un vol. gr. in-8° de 154 pages. Paris, Gauthier-Villars, s. d.

Ch. Beaujean. Le Statut de la Caisse d'Assurances et les Assurances populaires en Belgique (Extrait de la Revue Économique internationale, octobre 1910). Une broch. in-8° de 19 pages. Bruxelles.

F. Bellomia Barone. Il problema fondamentale dell' Essere. Un vol. in-8° de 159 pages. Milan, Palerme, Naples, R. Sandron, 1910.

E. Belot. L'origine dualiste des Mondes. Essai de Cosmogonie tourbillonnaire. Un vol. gr. in-8° de xi-280 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

L. Biette. Les travaux du chemin de fer métropolitain municipal de Paris à la traversée de la Seine (Extrait des Annales des Travaux publics de Belgique, août 1910). Un vol. in-8° de 60 pages avec 27 figures. Bruxelles, Goemaere.

Marcel Boll. Précis d'optique, publié d'après l'ouvrage de Paul Drude, tome I. Un vol. in-8° de x-375 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Gaston Bonnier. Les noms des fleurs trouvés par la méthode simple sans aucune notion de botanique. Un vol. in-18 de IV-332 pages. Paris, Librairie générale de l'Enseignement, s. d.

J Bosler. Les théories modernes du Soleil (Collection : *Encyclopédie scientifique, Bibliothèque d'Astronomie et de Physique céleste*). Un vol. in-18 de 380 pages. Paris, O. Doin, 1910.

H. Bosmans, S. J. Correspondance de Jean-Baptiste Maldonado, de Mons, Missionnaire belge au Siam et en Chine au XVII^e siècle (Extrait des ANALECTES POUR SERVIR A L'HISTOIRE ECCLÉSIASTIQUE DE BELGIQUE). Une broch. in-8° de 105 pages. Louvain, 1910.

D^{ro} M. Boubier. Internaciona Biologial Lexico, en Ido, Germana, Angla, Franca, Italiana ed Hispana. Un vol. in-18 de 73 pages. — Iena, Gustav Fischer, 1911

P. Camboué, S. J. Les dix premières années de l'enfance chez les Malgaches. Circoncision, nom, éducation (Extrait de ANTHROPOS) Une broch. in-8° de 12 pages. Vienne, 1909.

—— Un marché dans la brousse à Madagascar (Extrait du BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DE GÉOGRAPHIE DE BORDEAUX). Une broch. in-8° de 9 pages. Bordeaux, 1909.

P. Chaplet et H. Rousset. Le Blanchiment, chimie et technologie des procédés industriels de blanchiment *(Encyclopédie des aide-mémoire)*. Un vol. in-18 de 169 pages. Paris, Gauthier-Villars et Masson, s. d.

—— Blanchissage et nettoyage *(Encyclopédie des aide-mémoire)*. Un vol. in-18 de 160 pages. Paris, Gauthier-Villars et Masson, s. d.

A. Claude et L. Driencourt. Description et usage de l'astrolabe à prisme. Un vol. gr. in-8° de XXX-392 pages et 7 planches hors texte. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

A. Collard. Catalogue alphabétique des livres, brochures et cartes de la Bibliothèque de l'Observatoire royal de Belgique à Uccle. Fascicule 1er. Un vol. in-8° de 192 pages. Bruxelles, Hayez, 1910.

—— La vie et l'œuvre d'un astronome illustre, Jean Virginius Schiaparelli (Extrait de CIEL et TERRE, 1910, n^{os} 11 et 12). Une broch. in-8° de 13 pages. Bruxelles.

Maria Croce. Noi stessi (brani di un album). Un vol. petit in-8° de 194 pages. Rome, Giov. Fraioli, 1910.

M^{me} P. Curie. Traité de Radioactivité. Deux vol. gr. in-8° de XIII-426 et 548 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Emm. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, tome II, 2^e édition. Un vol. in-8° de X-470 pages. Leipzig, Teubner, 1910.

G De Lescluze. Les secrets du coloris. La classification des couleurs. Un vol. gr in-8° de 88 pages. Louvain, Imprimerie « Nova et Vetera », 1910.

G. Delmarcel. La fabrication électrochimique de l'acide nitrique, des nitrates et des nitrites au moyen des éléments de l'air (Extrait du BULLETIN DE L'UNION DES INGÉNIEURS SORTIS DES ÉCOLES SPÉCIALES DE LOUVAIN). Une broch. in-8° de 30 pages. Bruxelles, Imprimerie nationale, 1910.

Paul Descombes. La défense forestière et pastorale (Collection : *Encyclopédie Industrielle*). Un vol. in-8° de xv-410 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

W De Veer, S. J. Lezingen en toespraken. Derde Bunde. Un vol. petit in-8° de 168 pages. Amsterdam, F. Van der Vecht, 1910.

E. De Wildeman. Compagnie du Kasai. Mission permanente d'études scientifiques. Résultats de ses recherches botaniques et agronomiques. Un vol. gr. in-8° de VIII-463 pages avec 2 cartes et 45 planches hors-texte. Bruxelles, A. Lesigne, 1910.

Paul Drumaux. La théorie corpusculaire de l'Électricité. Les électrons et les ions. Un vol. in-8° de 168 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Pio Emmanueli. I tre prossimi eclissi totali di Sole (Extrait de la RIVISTA DI ASTRONOMIA E SCIENZE AFFINI). Une broch. in-8° de 11 pages. Turin, 1910.

—— L'Eclisse totale di Sole del 28-29 Aprile 1911 (Extrait des MEMORIE DELLA PONTIFICIA ACADEMIA ROMANA DEI NUOVI LINCEI, vol. XXVIII). Une broch. in-4° de 30 pages. Rome, 1910.

—— Sulla velocità che ha al perielio ed all' afelio la cometa di Halley (Extrait des ATTI DELLA PONTIFICIA ACADEMIA ROMANA DEI NUOVI LINCEI). Une broch. in-4° de 4 pages. Rome, 1910.

Louis Fabry. La théorie des Tremblements de Terre et les récents mouvements sismiques de Provence (Extrait du BULLETIN DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE ET INDUSTRIELLE DE MARSEILLE). Une broch. in-8° de 35 pages avec une carte. Marseille, 1910.

R. Francé. Les sens de la plante. Traduction de M^{me} J. Baar. Un vol. petit in-8° de 7 pages. Paris, Tedesco, s. d.

G. Friedel. Leçons de Cristallographie. Cours de l'École nationale des Mines de Saint-Étienne. Un vol. in-8° de IV-310 pages avec 383 figures dans le texte. Paris, Hermann et fils, 1911.

Edmond Gabriel. Éléments de Topographie. Un vol. in-8° de XXIV-575 pages. Tours, A. Mame et fils, 1911.

Éric Gérard. Leçons sur l'Électricité, 8^{e} édition. Deux vol. in-8° de XI-975 et VII-989 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

A. Gerste, S. J. Notes sur la Médecine et la Botanique des Anciens Mexicains, 2^{e} édition, revue et corrigée. Un vol. in-8° de 191 pages. Rome, Impr. Polyglotte Vaticane, 1910.

Ph. Girard et **W. Dubi.** Lignes électriques aériennes. Étude et construction (BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉLÈVE INGÉNIEUR). Un vol. gr. in-8° de 181 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

—— Lignes électriques souterraines. Étude, pose, essais et recherches de défauts (BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉLÈVE INGÉNIEUR). Un vol. gr. in-8° de 181 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Justus Grassmann und **Friedrich Engel.** Hermann Grassmann's Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Dritten Bandes erster Teil. Un vol. in-8° de 353 pages. Leipzig, Teubner, 1911.

Sp -C Haret Mécanique sociale. Un vol. in-8° de 256 pages. Paris, Gauthier-Villars ; Bucharest, Ch. Göll, 1910.

Haton de la Goupillière. Étude géométrique et dynamique des roulettes planes ou sphériques. Un vol. gr. in-8° de 107 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

—— Sommation de suites terminées (Extrait des MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE, 3e série, t. IX). Bruxelles, Hayez, 1910.

G. Henriksen. Geological notes. Une broch. in-18 de 26 pages. Christiania, Groendahl & Son, 1910.

Ch. Henry. Sur la fonction qui relie les masses atomiques aux accélérations de leurs constituants et sur la possibilité de calculer des masses nouvelles (Extrait des COMPTES RENDUS DE L'ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SIENCES, Congrès de Lille, 1909). Une broch. in-8° de 17 pages. Paris, Hôtel des Sociétés Savantes.

J. Hognon. Traité d'analyses chimiques métallurgiques. Un vol. in-8° de IX-155 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

F. Houssay. La morphologie dynamique. Une broch. in-8° de 29 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1910.

Charles Janet. Sur la morphologie de l'Insecte. Un vol. gr. in-8° de 75 pages. Limoges, Decourtieux et Gout, 1910.

—— Sur l'ontogénèse de l'Insecte. Un vol. gr. in-8° de 129 pages. Limoges, Decourtieux et Gout, 1909.

—— Sur un nouveau mode très simple de représentation proportionnelle exacte. Une brochure in-8° de 11 pages. Limoges, Decourtieux et Gout, 1910.

Ed. Janettaz. Les Roches et leurs éléments minéralogiques, 4e édition. Un vol. in-8° de III-704 pages, avec de nombreuses cartes et planches. Paris, A. Hermann et fils, 1910.

H. Janne. Note sur le couple qui produit, dans le gyroscope, la tendance des axes au parallélisme (Extrait du BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'ASSOCIATION DES ÉLÉVES DES ÉCOLES SPÉCIALES, 13e année, nos 1 et 2). Une broch. in-8° de 32 pages. Liége, Imprimerie moderne, 1911.

C. de Kirwan. La Sociologie « scientifique » ou moderniste (Extrait des QUESTIONS ECCLÉSIASTIQUES, avril-mai 1910). Une broch. gr. in-8° de 24 pages. Lille.

M. C. Lamb. Teinture, corroyage et finissage du cuir (traduit par Louis Meunier et Jules Prévot ; collection : *Encyclopédie Industrielle)*. Un vol. gr. in-8° de VI-470 pages, avec gravures et échantillons. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

A. de Lapparent. La Philosophie minérale (Collection : *Études de Philosophie et de Critique religieuses)*. Un vol. in-16 de VI-316 pages. Paris, Bloud et Cie, 1910.

Maurice Lecat. Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions, avec applications à l'algèbre, à la géométrie, etc. Un vol. gr. in-8° de XIX-223 pages. Gand, Hoste, 1910.

H. Lenicque. Géologie nouvelle. Théorie chimique de la formation de la terre et des roches terrestres. Un vol. in-8° de 271 pages. Paris, Hermann et fils, 1910.

J. Lewinski. L'Évolution industrielle de la Belgique. Instituts Solvay : Travaux de l'Institut de Sociologie (Collection : *Études Sociales*). Un vol. in-8° de XIII-444 pages. Bruxelles, Misch et Thron, 1910.

D^r H. Lorenz et **D^r Ing. C. Heinel.** Les Machines frigorifiques. Construction. Fonctionnement. Applications industrielles (Traduit de l'allemand par F. Petit et Ph. Jacquet. Collection : *Encyclopédie industrielle*) 2^e édit. Un vol. gr. in-8° de VIII-424 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Arthur Loth. La photographie du Saint Suaire de Turin. Authenticité du Suaire. Documents nouveaux et concluants. Un vol. gr. in-8° de 133 pages. Paris, H. Oudin, s. d.

Ernest Mahaim. Les abonnements ouvriers sur les lignes de chemins de fer belges, et leurs effets sociaux (Instituts Solvay. Travaux de l'Institut de Sociologie. *Notes et Mémoires*, Fasc. 11). Un vol. gr. in-8° de XVI-259 pages. Bruxelles, Misch et Thron. 1910.

E. Marec. Les enroulements industriels des machines à courant continu et à courant alternatif. Théorie et pratique. Un vol. gr. in-8° de X-240 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

F. Meunier. Nouveaux Paléodictyoptères du Houiller de Commentry (Extrait du BULLETIN DU MUSÉUM D'HISTOIRE NATURELLE). Paris, Imprimerie nationale, 1910.

—— Catalogue du Muséum d'Histoire naturelle de la Société royale de Zoologie d'Anvers. Faune de Belgique, 2^e partie. Un vol. in-8° de 80 pages. Anvers, Laporte et Dosse, 1910.

D^r Aug. Michieli. L'immagine nell' insegnamento geografico (Extrait du BOLLETTINO DELLA SOC. ITAL. DI ESPLORAZIONI GEOGRAFICHE E COMMERCIALI). Une broch. in-4° de 40 pages. Milan, Stampa commerciale, 1908.

—— Pour un cours international géographique de vacances (Extrait du BOLL. DELLA SOC. ITAL. DI ESPLOR. GEOGR. E COMM.). Une broch. in-4° de 7 pages. Milan, Stampa commerciale, 1908.

—— Sulla sfera d'influenza dei Porti e le carte destinate a rappresentarla (Extrait du BOLL. DELLA SOC. ITAL. DI ESPLOR. GEOGR. E COMM.). Une broch. gr. in-4° de 12 pages. Milan, Stampa commerciale, 1910.

D^r A. Moeller. Le Radium. Ses applications thérapeutiques. Un vol. in-8° de 79 pages. Bruxelles, H. Lamertin, 1910.

A. Montel. Le case nelle regioni sismiche e la scienza delle costruzioni. Un vol. in-8° de 116 pages. Turin, S. Lattès et C^{ie}, 1910.

Abbé Th. Moreux Quelques heures dans le Ciel. Un vol. in-8° de 126 pag. avec de nombreuses figures. Paris, Fayart, s. d.

Ch. Moureu. Notions fondamentales de chimie organique. Un vol. gr. in-8° de 354 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

W. Nernst. Traité de chimie générale. Première partie. Propriétés générales des corps. Atome et Molécule (Traduit sur la 6^e édition allemande par A. Corvisy). Un vol. gr. in-8° de II-510 pages. Paris, Hermann, 1911.

M. d'Ocagne. Notions élémentaires sur la probabilité des erreurs. Une broch. gr. in-8° de 26 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Dr Charles Perrier. Le buste et ses rapports avec la taille chez les Criminels (Extrait des ARCHIVES D'ANTHROPOLOGIE CRIMINELLE ET DE MÉDECINE LÉGALE, nos 201-202). Une broch. in-8o de 68 pages. Lyon, A. Rey et Cie, 1910.

P.-J. Pession. Considérations théologiques sur le Paradis, considéré surtout comme lieu, sur ses relations avec le reste de l'Univers. Un vol. gr. in-8o de 1031 pages. Aoste, Imprimerie catholique, 1902.

Sir William Ramsay. La chimie moderne (traduit de l'anglais par H. de Miffonis). Deux vol. in-18 de 162 et 276 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Martin Ramström. Emmanuel Svendeborg's investigations in natural sciences and the basis for his statements concerning the functions of the brain. Un vol. gr. in-8o de 69 pages. Upsala, 1910.

J. Résal. La poussée des terres, 2e partie (*Encyclopédie des travaux publics*) Un vol. in-8o de XI-346 pages. Paris, Béranger, 1910.

P. J. Richard. Étude sur l'assurance complémentaire de l'assurance sur la vie, avec de nombreux développements sur les assurances contre la maladie et l'invalidité. Un vol. in-18 jésus de 118 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1911.

Augusto Righi Comete ed elettroni. Discorso inaugurale pronunciato il 22 giugno 1910 nella seduta plenaria della R. Academia delle Scienze di Bologna. Une broch. in-8o de 63 pages. Bologne, Tanichelli, 1911.

G. Rousset. Les machines à écrire *(Encyclopédie scientifique des Aide-mémoire)*. Un vol. in-18 de 180 pages avec 58 figures. Paris, Gauthier-Villars et Masson, 1911.

Umberto Savoia. La métallographie appliquée aux produits sidérurgiques. Un vol. in-18 de X-218 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

O. Schrader. Die Indogermanen. Un vol. in-18 de 165 pages. Leipzig, Quelle und Mayer, 1911.

Jules Séverin. Toute la chimie minérale par l'Électricité. Complément à la 2e édition. Une broch. in-8o de 16 pages. Paris, Dunod et Pinat, 1910.

Dr J. Sommer Introduction à la théorie des nombres algébriques (traduit de l'allemand par A. Lévy). Un vol. in-8o de VII-376 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1911.

Ch. Toury. Le contrôle chimique dans les raffineries *(Encyclopédie scientifique des Aide-mémoire)*. Un vol. in-16 de 175 pages. Paris, Gauthier-Villars et Masson, s. d.

J. B. Trivett. The official year book of new South Wales, 1908-9. Un vol. in-8o de VII-772 pages. Sydney, W. A. Gullick, 1910.

Dr D. P. Valls Compàs divisor del Angulo. Une broch. in-8o de 7 pages. Barcelone, Subirana, 1910.

G. Vanderlinden Étude sur les phénomènes périodiques de la végétation dans leurs rapports avec les variations climatiques. Un vol. gr. in-8o de 80 pages, avec 16 pl. hors texte. Bruxelles, Hayez, 1910.

L. N Vandevyver. Annuaire Météorologique de la Station de Géographie mathématique de l'Université de Gand, 3e année, mars 1909-février 1910.

E. Wassmann, S. J Die psychischen Fähigkeiten der Ameisen. 2e édition. Un vol. in-4o de XI-190 pages. Stuttgart, E. Nägele, 1909.

Aimé Witz. Dernière évolution du moteur à Gaz. Un vol. gr. in-8° de 465 pages avec 169 figures. Paris, Louis Geisler, 1910.

—— Le mouvement perpétuel de deuxième espèce (Extrait des Comptes rendus de l'Association Française pour l'avancement des Sciences). Une broch. in-8° de 6 pages. Paris, Hôtel des Sociétés Savantes, 1909.

Dr J. Zenneck. Précis de télégraphie sans fil (traduit de l'allemand par H. Blanchin, G. Guérard, F. Picot). Un vol. in-8° de x-385 pages, avec 333 fig. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Swedish explorations in Spitzbergen. 1758-1908. A. G. Nathorst : Historical Sketch. — J. M. Hulth : Bibliography. — G. de Geer : List of Maps. Reprinted from Ymer, 1909, H. 1. Un vol. in-8° de 89 pages. Stockholm, Central Tryckeriet 1909.

Exposition Internationale de Bruxelles 1910. L'Exposition collective des charbonnages de Belgique. Notice explicative (Extrait des Annales des Mines de Belgique et de la Revue universelle des Mines). Un vol. in-8° de 177 pages. Bruxelles, L. Narcisse, 1910.

Carta geral do Estado do Saô Paulo, éditée par la « commissaô geographica e geologica do Estado do São Paulo » (Brésil).

Université catholique de Louvain. *Liber memorialis* des fêtes jubilaires, 1834-1909. Un vol. in-4° de 322 pages. Louvain, Ch. Peeters, 1909.

Specula Vaticana. Inaugurazione, 17 novembre MCMX. Une broch. gr. in-8° de 16 pages. Roma, Tipografia poliglotta Vaticana, 1910.

B. G. Teubner, 1811-1911. Geschichte der Firma in deren Auftrag. Leipzig, im Jahre 1911. Un vol. gr. in-8° de 520 pp. avec nombreux fac-simile et planches hors texte.

II. Périodiques

Académie des Sciences (Paris) : Comptes rendus hebdomadaires des séances.

Académie royale de médecine de Belgique (Bruxelles) :
  Bulletin, 4e série, t. XXIV et XXV.
  Mémoires couronnés et autres mémoires, t. XX.
  Procès verbaux des séances.

Annales de l'Académie de Mâcon (France), 3e série, t. XIII.

Annales de la Faculté de Toulouse, 2e série, t. X, 3e série, t. I.

Annales de la Société d'Agriculture, Sciences et Industries de Lyon.

Annales de la Société géologique de Belgique (Liége), t. XXXVI et XXXVII.

Annales de la Société royale zoologique et malacologique de Belgique (Bruxelles), t. XLIV.

Annales de Philosophie chrétienne (Paris).

Annuaire pour l'an 1911, publié par le Bureau des Longitudes (Paris).

L'Anthropologie (Paris), t. XXI et XXII.

Association des Ingénieurs sortis de l'École de Liége :

Annuaire, 5e série, t. XXIII.
Bulletin, t. XXIV et XXX.
Bulletin agricole du Congo Belge.
L'Astronomie. Bulletin de la Société Astronomique de France (Paris).
Bulletin de la Société Bibliographique (Paris).
Bulletin de la Société Centrale Forestière de Belgique (Bruxelles).
Bulletin de la Société royale belge de Géographie (Bruxelles).
Bulletin de la Société royale de Botanique de Belgique (Bruxelles).
Bulletin des Travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.
Ciel et Terre, Bulletin de la Société belge d'Astronomie (Bruxelles).
Le Cosmos (Paris).
L'enseignement mathématique (Genève).
Les Études (Paris).
Institut international d'Agriculture : Bulletin de Statistique agricole.
Journal de Physique (Paris).
Journal des Sciences médicales de Lille.
Laboratoire de Zoologie et de Physiologie maritimes de Concarneau (Finistère, France). Travaux scientifiques, t. I.
Livres et Revues (Paris).
Ministère de la Justice de Belgique (Bruxelles) :
Statistique judiciaire de la Belgique. Douzième année.
Annales du Musée du Congo (Ministère des Colonies de Belgique, Bruxelles) :
Botanique.
Ethnographie et Anthropologie.
La Nouvelle France (Québec, Canada).
Observatoire de Zi-Ka-Wei (Chine) :
Bulletin sismologique.
Observatoire royal de Belgique (Bruxelles) :
Annuaire astronomique pour 1911.
Annuaire météorologique pour 1911.
Annales astronomiques.
Annales météorologiques.
Bulletin météorologique.
Physique du Globe.
Le Polybiblion. Partie littéraire et Partie technique (Paris).
La Réforme sociale (Paris).
Revue de Lille (Arras, France).
Revue de l'Ingénieur (Bruxelles).
Revue de Métaphysique et de Morale (Paris).
Revue de Philosophie (Paris).
Revue Économique de Bordeaux.
La Revue Générale (Bruxelles).
Revue Montalembert (Paris).
Revue Néo-Scolastique (Louvain).
Revue Philosophique (Paris).

Revue pratique d'Apologétique (Paris).
Revue semestrielle des publications mathématiques (Amsterdam).
Société belge de paléontologie et d'hydrologie (Bruxelles) :
  Mémoires, t. XXIII et XXIV.
  Procès-verbaux des séances, t. XXIV et XXV.
Revue d'Électricité : Bulletin mensuel de la Société belge d'Électriciens (Bruxelles.
Bulletin des séances de la Société des sciences de Nancy.
Société française de Physique (Paris).
  Bulletin des séances.
  Résumé des communications.
Société Mathématique de France (Paris) :
  Bulletin, t. XXXVIII et XXXIX.
Bulletin de la Société Médicale de S. Luc, S. Côme et S. Damien (Paris).
Union des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Louvain (Bruxelles) :
  2e série, t. V.
L'Université Catholique (Lyon).
Ministerie van Landbouw, Nijverheid en Handel (La Haye) : Handelsberichten.
Koninklijke Akademie van Wetenschappen (Amsterdam) :
  Proceedings of the section of sciences, vol. XII, p. I and II.
  Verhandelingen.
Nieuw Archief voor Wiskunde (Amsterdam).
Wiskundige Opgaven met de Oplossingen (Amsterdam).
Atti della Reale Accademia dei Lincei (Rome), vol. XIX et XX.
Civiltà Cattolica (Rome).
Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei (Rome) : Atti. Memorie.
Rivista di Filosofia Neo-scolastica (Florence).
Rivista di Fisica, Matematica e scienze naturali (Pavie).
Rivista internazionale di Scienze sociali e disciplini ausiliarie (Rome).
La Scuola Cattolica (Milan).
Specola Vaticana (Rome).
Boletin de la Sociedad Aragonesa de Ciencias naturales (Barcelone).
Boletin mensual de la Estacion Sismologica de Cartuja (Granada, Espagne).
Boletin mensual dei Observatorio astronomico de Cartuja (Granada, Espagne).
Boletin mensual del Observatorio meteorologico de Cartuja (Granada, Espagne).
Las Ciencias medicas (Barcelone).
Razon y Fe (Madrid).
Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto (Portugal).
Broteria (S. Fiel, Portugal).
Anales del Museo nacional di Montevideo.
Boletin del Servicio Sismologico de Chile.
Instituto Geologico de Mexico :
  Bulletin.
  Parergones.
Matto Grosso (Cuyaba, Brésil).

Sociedad cientifica « Antonio Alzate » (Mexico) : Memorias y Revista.
The Month (Londres).
Royal Society of Edimburgh :
  Proceedings, vol. XXX, XXXI.
  Transactions, vol. XLVII.
Université d'Upsala (Stockholm) : Bref och skrifvelser af och till Carl von Linné. Första Afdelingen.
America (New-York).
The American Catholic Quarterly Review (Philadelphia).
American Journal of Mathematics (Baltimore).
American Mathematical Society (New-York) :
  Bulletin.
  Annual Register (1911).
American Museum of Natural History (New-York) :
  Annual Report (1909).
  Bulletin.
  Memoirs.
The Catholic World (Washington).
International Catalogue of Scientific Literature, seventh and eight annual issues.
Missouri Botanical Garden (St-Louis. Mo.), Report 1910.
Ohio State University Bulletin, vol. XIII, XIV.
Smithsonian Institution (Washington) : Report 1909, 1910.
Technical World Magazine (Chicago).
United States Department of Agriculture (Washington) :
  Library of Congress, Card Section, Bulletin.
United States Geological Survey (Washington) :
  Annual report (1910).
  Bulletin, 403-432.
  Professional Papers, 68.
  Water-Supply Papers, 243-260.
United States Naval Observatory (Navy Department) : Synopsis of the Report of the Superintendent for the fiscal year ending june 30, 1910 (Washington).
University of California Publications (Sacramento) :
  Astronomy : Lick Observatory Bulletin.
  Physiology : vol. III-IV.
  Zoology : vol. VI-VII.
University of Nebraska (Lincoln) :
  Bulletin of the Agricultural Station.
  Press Bulletin.
  Report of the Agricultural Station, n° 23.
Western Australia Geological Survey (Sydney) ; Bulletin, n^os^ 38, 39.
Yale University (New Haven) :
  Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, vol. XV, XVI.
Bibliotheca mathematica (Leipzig).
Deutsche Seewarte (Kaiserliche Marinen, Berlin) :
  Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie.

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften (Munich) :
  Math. Phys. Klasse Sitzungsberichte.
  Abhandlungen.
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft (Bâle) : Bd. XX, XXI.
Arhiva (Soc. scientif. et litt. de Jasi, Roumanie).
Artâ Romanâ (Jasi, Roumanie).
Journal de la Société physico-chimique russe (en russe) (Saint-Pétersbourg).

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

LA RADIOACTIVITÉ
ET LE
SYSTÈME PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS

PAR

THÉOD. WULF, S. J.

L'hypothèse de la désagrégation des atomes, émise par Rutherford en 1903, a ouvert en chimie une ère nouvelle. Depuis Lavoisier, les chimistes admettaient que non seulement la masse totale de la matière, mais aussi celle des divers éléments, tels que l'hydrogène, le fer, etc., restait absolument constante dans la nature. Rutherford démontra qu'il n'en est pas ainsi. En 1903, il expliqua les phénomènes radioactifs par la désagrégation des atomes et appuya son hypothèse sur des expériences nombreuses et variées. Aujourd'hui la désagrégation des atomes est admise par tous les savants : de fait, nous voyons disparaître certaines formes de la matière et d'autres apparaître. Sans doute, jusqu'ici on n'a donné la démonstration de ces transformations que pour un très petit nombre de corps, de poids atomique très élevé, et il n'y a qu'un seul élément, l'hélium, de poids atomique 4, le plus léger après l'hydrogène, que nous observons en voie de formation.

Les expériences faites jusqu'à ce jour nous ont habitués à ne voir dans la nature que des différences graduelles dans les qualités des corps. Ainsi les différences prétendûment essentielles d'autrefois entre les corps solides, liquides et gazeux ont disparu, et il n'est resté qu'un point différent d'ébullition. Il était donc tout naturel de se poser cette question : n'existait-il pas d'autres corps radioactifs que ceux qui se sont révélés tout d'abord ? Les savants suivirent une double direction pour résoudre ce problème.

D'une part, Ramsay s'est demandé si, outre l'hélium, d'autres éléments ne se formaient pas par de pareils procédés. Le R. P. de Greeff a donné l'année dernière un exposé détaillé (voir REVUE DES QUEST. SCIENT., avril 1910, p. 678) des essais dans lesquels Ramsay crut avoir produit, outre l'hélium, le lithium et le cuivre au moyen de procédés radioactifs. Toutefois des recherches ultérieures ont permis de penser que les traces observées de ces matières tiraient leur origine des récipients employés.

D'autre part, d'autres savants cherchèrent de nouvelles matières, rayonnant ou se décomposant. Ils furent un peu plus heureux. On peut, dès à présent, considérer comme démontré avec certitude, qu'outre les matières des séries du radium, du thorium et de l'actinium, le potassium et le rubidium émettent une radiation faible, mais certainement appréciable.

De pareils essais, suivis de résultats négatifs, ne sont pas évidemment d'une valeur probante définitive ; ils montrent seulement qu'au cours du temps pendant lequel on laisse agir les matières par exemple sur des plaques photographiques d'une sensibilité déterminée, il ne se produit aucun noircissement apparent. Mais puisque le temps dans lequel la matière se décompose de moitié oscille entre une seconde et des milliards d'années, pour les matières connues jusqu'à présent, on ne voit pas pourquoi cette valeur ne pourrait pas être dépassée des deux côtés. La seule question donc qui se posera dans la suite sera de savoir jusqu'à quel point nous pourrons perfectionner nos méthodes d'observation, afin de pouvoir nous fier à de pareils procédés. Dans les transformations qui s'accomplissent trop vite, quelques produits intermédiaires peuvent nous échapper. Si au contraire le temps de décomposition se mesure en billions d'années, les corps nous apparaîtront comme inaltérables.

Aussi longtemps que les preuves expérimentales directes nous manquent, nous en sommes réduits à chercher des raisons qui appuient plus ou moins l'une ou l'autre manière de voir. Plusieurs savants ont déjà mis en relief la grande unité du système des éléments. Je voudrais donner aujourd'hui une raison spéciale en faveur de l'opinion suivant laquelle *tous les éléments se sont formés par décomposition des atomes les plus lourds.*

Le trait caractéristique de tous les phénomènes radioactifs observés jusqu'à ce jour est, ou bien que des particules (rayons β) sont émises, particules très petites même en comparaison des atomes d'hydrogène, et dont le départ ne change pas sensiblement le poids atomique du corps qui les émet, *ou bien qu'une ou plusieurs particules lourdes* (rayons α) *sont émises, qui se présentent comme des atomes d'hélium, de poids atomique 4.* Voici le point d'attache de nos considérations présentes : *Si nous admettons que tous les éléments naissent des atomes les plus pesants par des décompositions analogues aux procédés observés dans les séries du radium et du thorium, il s'ensuit que les différents éléments doivent posséder un poids atomique, qui se différencie chaque fois de 4 ou d'un multiple de 4.*

Un premier coup d'œil sur le tableau des poids atomiques nous montre, en effet, une série de nombres qui présentent tous un écart l'un de l'autre de quatre unités : ainsi les nombres 12, 16, 20, 32, 40, 44, 48, 52 appartiennent tous à des éléments connus. De même les nombres 19, 23, 27, 31 offrent tous aussi un écart de 4. Dès lors j'ai adopté la méthode suivante, pour trouver tous les éléments ou séries d'éléments, distants l'un de l'autre de 4.

Si l'on divise par 4 tous les poids atomiques, les quotients des nombres qui présentent un écart de 4 (environ), ne se distingueront l'un de l'autre que par la partie entière, tandis que les fractions resteront presqu'identiques. Par exemple, 19 et 23 diffèrent entre eux de 4. Si l'on divise les deux nombres par 4, on a $\frac{19}{4} = 4{,}75$ et $\frac{23}{4} = 5{,}75$. Tous les nombres, qui ont pour partie décimale 0,75, se différencient de 19 et 23 de 4 ou d'un multiple de 4. Nous négligeons par conséquent les nombres entiers et ne considérons que les décimales. Comme nous connaissons maintenant 80 éléments environ, chacune des huit séries de 10 éléments devrait présenter les dix chiffres différents à la première décimale, si les poids atomiques sont répartis au hasard.

Nous allons voir qu'il n'en est pas ainsi. Comme les tableaux des poids atomiques ne sont pas toujours identiques, on pourrait être tenté de choisir ceux qui favorisent l'effet attendu. Pour éviter cette inexactitude, je me suis tenu rigoureusement aux nombres que la Commission internationale des poids atomiques a fixés pour l'année 1911, sans changement ni abréviation. Seul le poids atomique de l'hélium a été posé égal à 4 (au lieu de 3,99 du tableau) et j'ai ajouté l'émanation du radium avec le poids atomique 223, publié ces jours derniers par Gray et Ramsay (1).

On a donc divisé par 4 tous les poids atomiques et compté combien de fois les chiffres 1, 2, 3, etc., se présentent comme première décimale parmi les 82 quotients obtenus. Le tableau suivant contient les valeurs trouvées :

1re décimale	'0	'1	'2	'3	'4	'5	'6	'7	'8	'9
Nombre des éléments	**20**	7	5	6	2	4	6	**20**	7	5

Donc deux décimales, 0 et 7, prennent à peu près la moitié (40) des éléments. Ceux qui restent (42) se répartissent sur les huit autres décimales.

Étant donné que les poids atomiques des vingt-cinq premiers éléments sont en général les mieux déterminés, nous nous bornerons maintenant à considérer seulement ceux-ci. Nous trouverons qu'ils favorisent plus encore notre hypothèse. Nous divisons toutes les valeurs par 4, supposant que le poids atomique de He soit égal à 4. Nous obtenons :

TABLEAU I

A	A/4	A	A/4	A	A/4
H = 1	0'25	Ne = 20'2	5'05	K = 39'1	9'775
He = 4	1'0	Na = 23	5'75	Ca = 40'09	10'023
Li = 6'94	1'735	Mg = 24'32	6'08	Sc = 44'1	11'025
Be = 9'1	2'275	Al = 27'1	6'775	T = 48'1	12'025
B = 11'0	2'75	Si = 28'3	7'075	V = 51'06	12'76
C = 12	3'0	P = 31'04	7'76	Cr = 52	13'0
N = 14	3'5	S = 32'07	8'017	Mn = 54'93	13'73
O = 16	4'0	Cl = 35'46	8'865		
Fl = 19	4'75	Ar = 39'88	9'97		

---

(1) Gray et Ramsay. PROC. ROY. SOC., A. 84, 537-550, 1911.

Nous avons donc pour la

1re décimale	'0	'1	'2	'3	'4	'5	'6	'7	'8	'9
le nombre d'éléments	**11**	0	2	0	0	1	0	**9**	1	1

Si la distribution était égale, les nombres des éléments qui appartiennent à chaque décimale devraient s'élever à 2 ou 3.

Il s'ensuit donc qu'il existe deux séries d'éléments, dont chacun des membres présente un écart d'environ 4 ou d'un multiple de 4. Un examen plus approfondi nous montre que les nombres deviennent de plus en plus serrés près de '00 et '75. Les premiers poids atomiques sont par conséquent divisibles par 4, ils ont donc la formule $4n$; les seconds ont la formule $4(n + 0.75) = 4n + 3$, ou, ce qui revient au même, $4n - 1$. A la fin de la première série se trouve le thorium avec ses descendants, à la fin de la seconde l'uranium et le radium.

Cette régularité dans les deux séries parallèles est si fortement accentuée, qu'elle ne peut pas être la suite du hasard, et il serait étonnant qu'elle n'eût pas été remarquée jusque maintenant. Un coup d'œil dans la littérature montre, en effet, que deux chercheurs, indépendamment l'un de l'autre semble-t-il, ont trouvé remarquable la signification du nombre 4 dans le système périodique des éléments. Bien entendu, aucun d'eux ne pouvait encore penser que ce fait pourrait être mis en rapport avec la production d'hélium par les matières radioactives. Lorenz (¹) signala le premier le phénomène, que beaucoup de couples d'éléments ont un poids atomique différent presque d'une unité. Il les appela des *éléments jumeaux*. Il observa encore que ces couples, chacun en particulier, conservent entre eux une distance de 4 ou d'un multiple de 4. Rydberg (²) a fait presqu'en même temps, de ce phénomène, l'objet d'une étude très détaillée. En se bornant aux 23 premiers éléments dont les poids atomiques sont en général les mieux connus, il s'occupa, d'abord, du fait que tous les poids atomiques s'expriment à peu près en nombres entiers et démontra que la probabilité d'obtenir les valeurs que nous obtenons effecti-

---

(¹) Lorenz, Zeitschr. für anorg. chemie, 12, 329, 1896 et 14, 103. 1797.
(²) Rydberg. Ibid., 14, 66, 1897.

vement, dans le cas où ces 23 éléments se répartiraient irrégulièrement sur les nombres de 1 à 56, est moindre que $\frac{1}{2.10^{12}}$. Si nous ajoutons qu'il n'existe pas deux éléments qui tombent sur le même nombre entier, on obtient, au lieu d'une probabilité de $\frac{1}{2.10^{12}}$, la probabilité encore beaucoup plus petite de $\frac{1}{5.10^{14}}$.

On trouve donc une série de nombres pairs et impairs de poids atomiques. Rydberg a déjà remarqué que les éléments à poids atomique de nombre pair possèdent aussi une valence de nombre pair, tandis que, dans les séries des poids atomiques impairs, la valence est également impaire. Mais pour éviter plusieurs exceptions à cette règle il a dû représenter les nombres atomiques valables à présent par la formule $A = N + D$, où $N = 4n$ ou $4n - 1$, et dans laquelle D est un nombre qui, dans tous les cas, est insignifiant en comparaison de N. Le nombre D est alors déterminé de telle façon que $N = 4n - 1$ pour les éléments de valence impaire, et $N = 4n$ pour les éléments de valence paire. Abstraction faite de quelques exceptions, il trouve que les restes D se changent périodiquement dans les diverses périodes du système de Mendelejeff.

Cette représentation se justifie aussi en général pour les éléments de poids atomique plus élevé et surtout, avec une exactitude frappante, pour plusieurs éléments des mieux déterminés. Cependant on ne peut pas s'attendre à une concordance aussi parfaite que dans les éléments de poids atomique faible, spécialement pour trois raisons :

1° En général, le poids atomique de ces éléments est moins exactement déterminé ;

2° Même dans le cas de la même exactitude relative, une petite erreur éloignerait déjà beaucoup le poids atomique de la valeur attendue ; ainsi une erreur de 0,2 % change une matière de poids atomique 20 en une autre du poids 20,04, qui s'approche sensiblement du nombre 20 ; mais si nous avons le poids atomique 200, il sera changé en 200,4, c'est-à-dire qu'il se trouvera presqu'au milieu entre les poids 200 et 201 ;

3° Il est invraisemblable que la période soit exactement 4. Or un petit écart de ce nombre ne sera pas perceptible dans les poids atomiques faibles, mais dans les poids plus forts il accroîtra jusqu'à l'unité et au delà.

Si par conséquent nous ne devons pas attribuer trop d'importance à la parfaite coïncidence, même pour beaucoup de nombres très grands, comme Hg = 200, nous ne pouvons pas toutefois induire de la discordance d'autres éléments, qui s'écartent d'une à deux unités, l'impossibilité de soutenir cette méthode en tous cas.

Comme la suite des éléments reste ici la même, ainsi que dans le système naturel, les discordances resteront aussi les mêmes, surtout pour la valeur trop grande de l'argon. De même pour l'iode et le tellure. Par contre, les terres rares peuvent être rangées très facilement ici. Bien des auteurs compétents ont parlé de ces irrégularités que présente le système périodique. Il n'est donc pas nécessaire de nous étendre ici sur ce sujet ; le moment n'est pas venu de décider si la distribution des éléments en deux séries, d'après les valences paires et impaires, serait pratique.

Le tableau ci-contre donne la distribution des poids atomiques des éléments, en se conformant le plus strictement possible aux formules $4n - 1$ et $4n$.

Dans ce système l'hydrogène occupe une position exceptionnelle, en dehors des deux séries de poids atomiques, et il manque également un élément avec le poids atomique 3, que déjà Mendelejeff a regretté de ne pas voir exister. D'autre part toutes les places jusqu'au calcium sont occupées, si bien qu'un nouvel élément, dont le poids atomique serait moindre que 40, dérangerait tout l'arrangement. En tout cas, le fait que cette distribution des éléments soit possible, est un argument remarquable en faveur de l'exactitude de notre conception. Qu'on essaie seulement de représenter les éléments par la période quinaire, par exemple, comme $5n$ et $5n + 1$, on trouvera justement pour les éléments les mieux fixés les plus forts écarts et, en partie du moins, on ne pourra pas les ranger en ordre. Il est donc possible d'établir comme résultats définitifs :

1° Les poids atomiques du système complet des éléments connus jusqu'à présent peuvent être répartis en deux séries, dont les termes sont distants l'un de l'autre de quatre unités ou d'un multiple de 4, et cela avec une rigueur qui ne peut pas être le fait du hasard ;

TABLEAU II

DISTRIBUTION DES POIDS ATOMIQUES ENTRE LES DEUX SÉRIES $4n-1$ ET $4n$.

$4n-1$	$4n$	A		$4n-1$	$4n$	A		$4n-1$	$4n$	A		$4n-1$	$4n$	A	
3		—	—	63		63.57	Cu	123		—	—	183		—	—
	4	3.99	He		64	65.37	Zn		124	—	—		184	184.0	W
7		6.94	Li	67		—	—	127		127.5	Te	187		—	—
	8	9,1	Be		68	—	—		128	126.92	J		188	—	—
11		11.0	B	71		69.9	Ga	131		130.2	X	191		190.9	Os
	12	12.0	C		72	72.5	Ge		132	132.81	Cs		192	193.1	Ir
15		14.01	N	75		74.96	As	135		—	—	195		195.2	Pt
	16	16.0	O		76	—	—		136	137.37	Ba		196	197.2	Au
19		19.0	F	79		79.2	Se	139		139.0	La	199		—	—
	20	20.2	Ne		80	79.92	Br		140	140.25	Ce		200	200.0	Hg
23		23.00	Na	83		82.9	Kr	143		140.6	Pr	203		—	—
	24	24.32	Mg		84	85.45	Rb		144	144.3	Nd		204	204.0	Te
27		27.1	Al	87		87.63	Sr	147		—	—	207		207.1	Pb
	28	28.3	Si		88	89.0	Y		148	—	—		208	208.0	Bi
31		31.04	P	91		90.6	Zr	151		150.4	Sm	211		—	—
	32	32.07	S		92	—	—		152	152.0	Eu		212	—	—
35		35.46	Cl	95		93.5	Nb	155		—	—	215		—	—
	36	39.88	Ar		96	96.0	Mo		156	157.3	Gd		216	—	—
39		39.10	K	99		—	—	159		159.2	Tb	219		—	—
	40	40.09	Ca		100	101.7	Ru		160	—	—		220	—	—
43		—	—	103		102.9	Rh	163		162.5	Dy	223		223.0	Ra E
	44	44.1	Sc		104	—	—		164	—	—		224	—	—
47		—	—	107		106.7	Pd	167		167.4	Er	227		226.4	Ra
	48	48.1	Ti		108	107.88	Ag		168	168.5	Tu		228	—	—
51		51.06	V	111		—	—	171		—	—	231		—	—
	52	52.0	Cr		112	112.4	Cd		172	172.0	Yb		232	232.4	Th
55		54.93	Mn	115		114.8	In	175		174.0	Lu	235		—	—
	56	55.85	Fe		116	—	—		176	—	—		236	—	—
59		58.68	Ni	119		119.0	Sn	179		—	—	239		238.5	U
	60	58.97	Co		120	120.2	Sb		180	181.0	Ta				

2° A la fin de l'une des séries se trouve le thorium avec ses produits de décomposition, à la fin de l'autre, l'uranium et le radium avec sa famille. Au commencement des séries se trouve l'hélium avec le poids atomique 4 ;

3° Pour le radium et le thorium, il est certain que les atomes les plus lourds se décomposent continuellement en d'autres atomes qui, en général, possèdent un poids atomique plus faible de 4 ou d'un multiple de 4 unités, donnant ainsi naissance à un ou à plusieurs atomes d'hélium.

Il est donc possible, d'après l'état actuel de nos connaissances, que tous les éléments se soient développés des plus lourds, par un procédé de décomposition analogue à celui que nous voyons se réaliser dans les corps radioactifs.

Il n'est pas encore bien sûr qu'une série empiète quelque part sur l'autre, cas où se produirait alors peut-être l'hydrogène. Mais il n'est pas nécessaire que l'hydrogène s'y produise. La séparation d'un corps du poids atomique 3 ou 7 amènerait le même résultat. A supposer même que la possibilité d'exposer la série des poids atomiques par les formules $4n$ et $4n - 1$ devienne vaine, par le choix d'une autre unité que $H = 1$ ou $O = 16$, la particularité que l'écart des nombres d'une série dans tout le système des éléments est égal à un ou à plusieurs atomes d'hélium, est complètement indépendante du choix de l'unité fondamentale, de même que l'écart des membres analogues des deux séries qui est égal à $1/4\ He = 1H$.

L'hypothèse que je propose ici, sous toutes réserves, aboutirait à constituer du *grand nombre* d'éléments isolés un *système* d'éléments, qui se forment l'un de l'autre. De cette manière, tous les atomes considérés jusqu'ici comme les pierres fondamentales et immuables de l'univers, seraient emportés par le tourbillon du va-et-vient des choses. Notre monde aurait débuté par les éléments de la composition la plus compliquée et serait broyé insensiblement en poussière au cours du temps, tandis que se dégagerait une quantité d'énergie dont il nous manque à présent toute idée. En tout cas, on arriverait à expliquer par cette hypothèse, d'une manière satisfaisante, aussi bien la prépondérance de nombres entiers parmi les poids atomiques, que la gradation constante par quatre unités de H. De même la ressemblance qu'on rencontre maintes fois dans les éléments de poids atomiques presqu'égaux deviendrait compréhensible, et la fréquence diverse des éléments se ramènerait simplement à leur *durée vitale* diverse, puisque, selon Rutherford, les éléments qui se décomposent le plus lentement se trouvent en plus grande quantité. Toutefois cette dernière conclusion n'aurait pas actuellement une importance pratique parce que nous ne pouvons examiner que la fréquence des éléments qui se trouvent dans la croûte terrestre et démontrer, au moyen de l'analyse spectrale, la présence des éléments que dans l'enveloppe extérieure des corps célestes. Voici, en tout cas, qui est encore bien remarquable ; l'air vital, c'est-à-dire le gaz oxygène, possède une durée si longue, qu'à lui seul il constitue à peu près la moitié de toute la matière qui nous est accessible.

Enfin il est permis de supposer que le développement ultérieur du système des éléments, qui se réalisera dès qu'on pourra faire entrer dans le domaine du calcul les rayons β, fournira aux générations futures bien des renseignements sur la constitution de l'atome.

NOTES SUR

L'ARITHMÉTIQUE DE SIMON STEVIN

par H. BOSMANS, S. J.

I. — La résolution de l'équation du 2^d degré, dans l'« Arithmétique » de Simon Stevin

Comme toutes les opérations du calcul numérique et de l'algèbre élémentaire, la résolution de l'équation du 2^d degré a passé, pour arriver à sa forme définitive, par une longue série de tâtonnements et d'essais, aussi intéressants que compliqués, parfois tout à fait imprévus et par là même difficiles à suivre. L'état actuel du problème a été donné avec beaucoup d'érudition, il y a quelques années, par M. Tropfke, dans sa *Geschichte der Elementar-Mathematik* (1). Parmi les multiples petits faits accumulés dans ce savant résumé, la part qui revient à l'*Arithmétique* (2) de Simon Stevin est indiquée, il est vrai, en deux ou trois lignes, mais noyée dans l'ensemble du tableau. Le but de cette note est d'y appeler l'attention.

---

(1) T. I, Leipzig, Veit, 1902, pp. 252-265.

(2) *L'Arithmetiqve De Simon Stevin De Brvges : Contenant les computations des nombres Arithmetiques ou vulgaires : Aussi l'Algebre, avec les equations de cinc quantitez...* A Leyde, De l'Imprimerie de Christophle Plantin. CIƆ. IƆ. LXXXV.

L'ouvrage a été réédité deux fois :

L'Arithmetiqve De Simon Stevin de Brvges. Reueüe, corrigee et augmentee de plusieurs traictez et annotations par Albert Girard Samielois Mathematicien. A Leide, de l'Imprimerie des Elzeviers CIƆ IƆC XXV.

Les Œuvres Mathematiques De Simon Stevin de Bruges. Ou sont inserées les Memoires Mathematiques. Esquelles s'est exercé le Tres-haut et Tres-illustre Prince Maurice de Nassau. Prince d'Aurenge... Le tout revue, corrigé, et

Une remarque avant d'entrer en matière. Dans la théorie des équations, les théorèmes de Stevin, en réalité fort clairs, semblent inintelligibles, tant qu'on n'a pas la clef de leurs énoncés. Heureusement que, pour la trouver, l'auteur nous explique lui-même les considérations, qui le guident. A cette occasion, il fait volontiers un peu d'histoire. Histoire fort inexacte, dit M. Tropfke (1). D'accord, mais ces courtes notices ont leur utilité. Stevin est la modestie en personne. Toujours nous le voyons hanté par la crainte de s'attribuer une découverte qui ne lui appartient pas. Ses remarques historiques ont bien moins pour but de faire de l'histoire proprement dite, que de fournir l'indication des sources où il a puisé et de nous donner la « littérature » du sujet, comme diraient les Allemands. A ce titre elles vont nous servir.

Quels auteurs d'algèbre Stevin avait-il étudiés ?

Tout d'abord Mahomet ben Musa el Chowârezmi. Les savants en possédaient alors deux versions latines manuscrites, l'une de Robert de Rétines (2), l'autre de Gérard de Crémone. Stevin avait lu, en outre, Pacivolo, Cardan, Tartaglia, Stifel, Nunes, Bombelli et quelques autres.

Chez tous ces auteurs, l'équation du 2d degré affectait trois formes distinctes, trois « différences », dit Stevin ; mais ces trois « différences » s'écrivaient d'après deux méthodes.

Il y avait d'abord celle de Cardan, Nunes et autres, pour qui l'équation du 2d degré était une pure application numérique d'un

---

augmenté par Albert Girard Samielois, Mathematicien. A Leyde Chez Bonaventure et Abraham Elsevier... CIↃ IↃC XXXIV. L'Arithmétique fait l'objet du tome I.

Dans ces deux dernières éditions, les additions d'Albert Girard se distinguent nettement du texte de Stevin et ne sauraient se confondre avec lui.

Je fais mes citations d'après la première édition, mais, à cause de sa rareté, je renverrai chaque fois aux trois. Je respecte l'orthographe de Stevin, à l'exception toutefois de la ponctuation, des accents et des lettres *i* et *j*, *u* et *v*.

(1) *Geschichte*, t. I, p. 262.

(2) Voir sur cette version : *Robert of Chester's Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*, by L. C. Karpinski, in Ann. Arbor. BIBLIOTHECA MATHEMATICA, 3e sér. t. XI, Leipzig, Teubner, 1911, 125-131. Le savant professeur en prépare une édition, d'après les manuscrits de Vienne, de Dresde et de la Columbian University.

théorème d'Euclide. Elle se mettait donc naturellement chez eux sous les formes (¹) :

$$x^2 + px = q, \qquad x^2 + q = px, \qquad px + q = x^2$$

Pour Stifel et son école, résoudre une équation, c'est extraire une racine ; le mot est resté. Résoudre une équation du 2d degré, c'est extraire une racine carrée. Stifel écrira donc :

$$x^2 = q - px, \qquad x^2 = px - q, \qquad x^2 = px + q$$

Au gré de Stevin, les deux procédés ont pour effet le plus clair d'effrayer les débutants, et de donner un aspect rébarbatif et compliqué à une opération facile et fort simple, d'un usage courant : la règle de trois. « Ce mot d'équation, dit-il, a faict penser aux apprentifs, que c'estoit quelque matière singulière, laquelle toutesfois est commune en la vulgaire arithmétique (²). »

Soit donc $x = a$ la racine. La vraie manière d'écrire l'équation est d'après lui :

$$\frac{x^2}{q - px} = \frac{x}{a} \qquad \frac{x^2}{px - q} = \frac{x}{a} \qquad \frac{x^2}{px + q} = \frac{x}{a}$$

Viète critique, avec raison, cette méthode (³). Elle n'est en effet

---

(¹) Pour la brièveté et la clarté, j'énonce ces théorèmes sous une forme algébrique littérale, qui, cela va de soi, ne se trouve pas dans les ouvrages originaux.

(²) Éd. 1585, p. 264. Éd. 1625, p. 246. Éd. 1634, p. 61.

Il est intéressant d'entendre Stevin exposer ses idées sur ce sujet *(l. c.)* :

« La raison pourquoi nous appellons reigle de trois, ou invention de quatriesme proportionel des quantitez, ce que vulgairement se dict équation des quantitez.

» Veu que les noms convenables, sont en les sciences de grande importance, et principalement ès difficiles, ce n'est point à tort que nous les choisissons au lieu des inconvenables ; ce qui sera ici, de l'invention de quatriesme proportionel des quantitez, qui se dict vulgairement équation. Nous le nommons ainsi, parce qu'il est plus commode à la doctrine. Car puisqu'il y a tousiours donnez trois termes, ausquels on cherche un quatriesme proportionel, comme apparoistra en son lieu, pourquoi ne s'appelleroit ceci pas aussi bien invention de quatriesme proportionel, comme en tous autres ? »

(³) *Ad Problema Quod omnibus Mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianvs Romanvs Francisci Vietæ Responsvm.* Parisiis, Apud Iametivm Mettayer Typographum Regium. 1595. Notamment, cap. 2. f° 2.

Viète n'y nomme pas Stevin, mais s'attaque directement à la manière dont correcte qu'à condition de supposer tacitement le numérateur égal au dénominateur, et de lire les proportions comme suit : x^2 vaut $q - px$; que vaut x ? C'est bien là d'ailleurs ce que fait systématiquement Stevin ; mais son algorithme ne l'indique pas suffisamment. Chaque équation y renferme deux inconnues et, comme le remarque l'algébriste français, tel qu'il est écrit, le problème est indéterminé.

Ces observations faites, voici le

Problème LXVIII (¹).

« Estant donnez trois termes, desquels le premier (2), le second (1) (0), le troisiesme nombre algebraique quelconque, trouver leur quatriesme terme proportionel. »

Les caractères typographiques, dont dispose l'imprimeur, m'obligent à placer entre parenthèses des chiffres que Stevin écrit dans de petits cercles et qui représentent les exposants de l'inconnue. Dans sa notation

$$(3)\,(2)\,(1)\,(0)$$

signifie

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x^1 + a_3x^0$$

et par conséquent son énoncé pourrait se traduire comme suit : x^2 vaut $a_0x^1 + a_1x^0$; que vaut x ?

« *Nota.* Le binomie du second terme donné de ce problème, se peut rencontrer en trois différences (c'est-à-dire sous trois formes) à sçavoir :

$(1) + (0)$	$[\ \ px + qx^0]$
$-(1) + (0)$	$[-px + qx^0]$
$(1) - (0)$	$[\ \ px - qx^0]$

» Desquelles les autres (auteurs) en donnent trois diverses opérations. » Stevin cite ici Stifel et Cardan. « Mais nous démonstrerons

---

Romain avait écrit son équation du 45ᵉ degré. Elle était analogue à celle de Stevin et avait identiquement les mêmes défauts.

(¹) Éd. 1585, p. 285. Éd. 1625, p. 265. Éd. 1634, p. 66.

une seule manière, par laquelle sans varier d'une syllabe, l'opération sera en toutes trois la mesme. »

Stevin fait faire ici à la théorie un progrès notable. Stifel (1) et son école avaient bien remarqué, avant lui, la similitude des trois opérations et s'étaient même essayés à en formuler la solution en une règle unique (2). Leur effort avait été illusoire ; car la règle continuait à comprendre trois cas distincts. Voici, pour en juger, l'énoncé de Jacques Pelletier (3). Je le choisis parce qu'il est en français, et, en même temps, l'un des meilleurs :

« Premièrement : prenez la moitié du nombre des racines et la mettez à part, avec son signe de p(lus) ou de m(oins).

» Secondement : quarrez ceste moitié et adjoustez le quarré au nombre absolu (c'est-à-dire au terme tout connu), si le nombre absolu est signé de p(lus), ou l'en ostez, s'il est signé de m(oins).

» Tiercement : tirez la racine du provenant de l'addition ou soustraction, et adjoustez ceste racine à la moitié mise à part, si son signe est p(lus), et l'en ostez, si son signe est m(oins). Ce qui proviendra sera la racine de vostre nombre. »

Chez Stevin, on va le voir, plus rien de semblable.

« Première différence de second terme : (1) + (0), » ou *Premier cas* (4). « *Explication du donné :* Soient donnez trois termes selon le problème tels : le premier 1(2), le second 4(1) + 12, le troisiesme 1(1). *Explication du requis :* Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel. »

Autrement : x^2 vaut $4x + 12$; que vaut x ?

« *Construction.* La moitié de 4, des 4(1), est 2

» Son quarré 4

» Au mesme ajousté le (0) donné (c.-à-d. le terme tout connu) qui est 12

» Donne somme 16

---

(1) *Arithmetica Integra, Authore Michaele Stifelio. Cum Praefatione Philippi Melanchthonis.* Norimbergae apud Ioan. Petreium. Anno M.D.XLIIII, f° 240, r°.

(2) Stifel. *Arith. Integ.*, f° 240 r°.

(3) *L'Algebre de Iaques Peletier du Mans, departie en deus Livres...* A Lion Par Ian de Tournes. M.D.LIIII, p. 34.

(4) Éd. 1585, p. 286. Éd. 1625, p. 266. Éd. 1634, p. 66.

» Sa racine quarrée 4
» A la mesme adjousté 2 premier en l'ordre faict 6
» Je di que 6 est le quatriesme terme proportionel requis. »

Suit une vérification arithmétique de la valeur trouvée de la racine, et la démonstration géométrique classique de la formule.

« Deuxiesme différence de second terme : — (1) + (0), » ou *Deuxième cas* (1). « *Explication du donné :* Soient donnez trois termes selon le problème tels : le premier 1(2), le second —6(1) + 16, le troisiesme 1(1). *Explication du requis :* Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel. »

Autrement : x^2 vaut $-6x + 16$; que vaut x ?

« *Construction.* La moitié de —6, des —6(1), est —3
» Son quarré, car —3 par —3 faict + 9, est 9
» Au mesme ajousté le (0) donné, qui est 16
» Donne somme 25
» Sa racine quarrée 5
» A la mesme ajousté —3, premier en l'ordre, faict 2
» Je di que 2 est le quatriesme terme proportionel requis. »

Stevin a rigoureusement tenu sa promesse. Il a répété la règle *sans y changer une syllabe.* On voit par quel artifice de rédaction : tout consiste à dire, « ajouter —3 », au lieu de « retrancher 3 ». Nous nous servons perpétuellement de ce langage conventionnel. Ce n'est pas un des moindres mérites de Stevin, que d'en avoir eu l'idée le premier.

« Troisiesme différence de second terme : (1) — (0), » ou *Troisième cas* (2). « *Explication du donné :* Soient donnez trois termes selon le problème tels : le premier 1(2), le second 6(1) — 5, le troisiesme 1(1). *Explication du requis :* Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel. » C'est-à-dire : x^2 vaut $6x - 5$; que vaut x ?

La *construction* est identique à celle des deux premières « différences » *sans y changer une syllabe* et en y employant de nouveau l'expression, *ajouter* — 5. Je l'omets.

Les trois « différences » eussent aussi conduit à une même formule, si l'on avait employé ce que Stevin nomme la « seconde manière de construction » (¹). Par « seconde manière de construction », il faut entendre la solution de l'équation

---

(1) Éd. 1585, p. 289. Éd. 1625, p. 269. Éd. 1634, p. 67.

(2) Éd. 1585, p. 293. Éd. 1625, p. 272. Éd. 1634, p. 68.

$$ax^2 = bx + c$$

par la formule

$$x = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + ac} + \frac{1}{2}b}{a}$$

dans laquelle le coefficient de x^2 n'a pas préalablement été réduit à l'unité.

Stevin vérifie chaque fois la solution trouvée, puis il démontre, par une construction géométrique, la légitimité de la formule employée. A cette occasion, il devient on ne peut plus intéressant, car il se trouve devant deux grosses difficultés : la démonstration géométrique des trois « différences » n'est pas la même pour chacune d'elles et ne met pas en évidence la raison de l'unité de la règle ; ensuite les deux premières « différences » semblent n'avoir qu'une solution, tandis que la troisième en a deux.

Stevin résout la première difficulté d'une manière absolument originale et neuve. Au lieu d'une démonstration géométrique de la formule, dit-il en résumé, donnez en une démonstration algébrique, vous verrez bien que vous opérez d'après la même règle, dans les trois cas.

Il importe ici de lui passer la plume, car on pourrait croire que je substitue mes idées aux siennes. Je rappelle, pour l'intelligence du passage, que d'après lui, l'équation du second degré a été résolue, pour la première fois, par Mahomet el Chowârezmi.

« *De l'origine de la construction du précédent LXVIII problème* (²).

» Nous avons amplement faict aux constructions précédentes leurs démonstrations tant géométriques, qu'arithmétiques (par ces dernières Stevin veut dire qu'il a vérifié chaque fois la solution). Mais encore n'est pas notoire, par icelles, l'occasion qui a faict inventer à Mahomet telle reigle. Afin doncques que la chose soit

---

(¹) Éd. 1585, pp. 288 et 291. Éd, 1625, pp. 268 et 271. Éd. 1634, p. 67.

(²) Éd. 1585, p. 298. Éd. 1625, p. 277. Éd. 1634, p. 69.

entendue parfaictement, nous la déclarerons par ses causes comme s'ensuit.

» Quand

(2) est égale à (1) (0) $[ax^2 = bx + cx^0]$

nous la pouvons réduire en

(1) égale à (0) $[b_1x = c_1x^0]$

et alors est la valeur de 1(1) $[= x]$ notoire par le précédent 67 problème (qui donne la résolution de l'équation du premier degré à une inconnue) ; et de telle réduction est colligée la manière de la dicte construction, comme apparoistra. Soit, par exemple :

1(2) égale à —6(1) + 16 $[x^2 = -6x + 16]$

qui sont le premier et second terme de la première construction de la seconde différence (1). Et ajoustons à chaque partie 6(1) $[= 6x]$; et seront

1(2) + 6(1) égales à 16 $[x^2 + 6x = 16]$

» Reste maintenant de trouver quelque (0) $[= cx^0]$, qui adjousté à 1(2) + 6(1), $[= x^2 + 6x]$, que tel trinomie aie racine qui soit 1(1) + quelque (0) $[x + kx^0]$. Or pour trouver tel nombre, il ne faut que multiplier la moitié de 6, des 6(1) $[= 6x]$, qui est 3, en soi, faict 9 ; et on l'aura.

» La raison pourquoi le quarré de la moitié du nombre de (1), (c.-à-d. du coefficient de x), est tousiours le (0) (c.-à-d. le nombre tout connu), qu'il faut ajouster à tel binomie, est par cela manifeste, que le produict du nombre de (2) (c.-à-d. du coefficient de x^2), qui est ici unité, multiplié par le (0), (le terme tout connu), est tousiours égal au quarré de la moitié du nombre de (1) (c.-à-d. du coefficient de x).

» Et qui encore veut sçavoir pourquoi tel produict est tousiours égal au quarré, de la moitié du nombre de (1) ; qu'il multiplie 1(1) + quelque (0), en soi, [c.-à-d. qu'il développe $(x + kx^0)^2$], et facilement verra la cause ès nombres procédans de l'opération de telle multiplication.

---

(1) Le premier exemple du deuxième cas. Nous l'avons donné ci-dessus.

» Ajoustons doncques 9, à chascune des égales parties et seront

1(2) + 6(1) + 9 égales à 25 $[x^2 + 6x + 9 = 25]$

» Puis extrahons de chasque partie racine quarrée, et seront

1(1) + 3 égales à 5 $[x + 3 = 5]$

» Puis soubstrahons de chascune partie 3, et sera

1(1) égale, ou vaudra pour solution, 2 $[x = 2]$

» Et par ceste manière, nous pourrions solver tous semblables exemples. Mais afin que telle invention de 1(1) $[= x]$ soit plus commode, on l'a rédigé en ordre, et on en a faict une reigle. »

Vient ensuite la difficulté de la double racine. Dans le cas des racines réelles, Stevin la résout complètement ; mais il n'a cure des racines imaginaires.

Supposons d'abord les deux racines réelles et positives ; c'est la troisième « différence ».

» Nous avons dict qu'en l'origine (c.-à-d. par la manière d'établir la formule) appert pourquoi la troisiesme différence a deux solutions (¹) ; nous la déclairerons. Soit

1(2) égale à 6(1) — 5 $[x^2 = 6x - 5]$

qui sont le premier et le second terme de l'exemple de la troisiesme différence ; et soubstrahons de chascune partie 6(1) $[= 6x]$; et sera

1(2) — 6(1) égale à —5 $[x^2 - 6x = -5]$

» Reste maintenant de trouver quelque (0) $[= cx^0]$, qui ajousté à 1(2) — 6(1) $[= x^2 - 6x]$, le trinomie aie racine qui soit 1(1) et quelque (0) $[= x + kx^0]$. Le mesme pour les raisons que dessus sera 9, à sçavoir, le quarré de —3, moitié de —6, des —6(1) $[= -6x]$. Ajoutons doncques à chascune partie 9, et seront

1(2) — 6(1) + 9 égales à 4 $[x^2 - 6x + 9 = 4]$

(¹) Éd. 1585, p. 300. Éd. 1625, p. 280. Éd. 1634, p. 69.

» Puis extrahons de chascune partie racine quarrée, et sera

1(1) — 3 égale à 2 $[x - 3 = 2]$

ou autrement

—1(1) + 3 égale à 2 $[-x + 3 = 2]$

» Car autant 1(1) — 3 $[= x - 3]$, comme —1(1) + 3 $[= -x + 3]$ est racine de 1(2) — 6(1) + 9 $[= x^2 - 6x + 9]$. Quand doncques nous posons pour racine

1(1) — 3 égale à 2 $[x - 3 = 2]$

il faut ajouster à chascune partie 3 et

1(1) sera égale ou vaudra 5 $[x = 5]$

» Mais si nous posons pour racine

—1(1) + 3 égale à 2 $[-x + 3 = 2]$

il faudra soubstraire de chasque partie 2, et restera

—1(1) + 1 égale à 0 $[-x + 1 = 0]$

et ajoustant à chascune partie 1(1) $[= x]$, alors sera

1(1) égale ou vallant 1 $[x = 1]$

» Et est la cause de la double solution, à ladicte troisiesme différence, par ces choses, si manifeste, qu'il n'est mestier d'en sonner plus mot. »

Quant aux racines négatives des équations, Stevin émet à leur sujet une idée qui devait faire son chemin ; elles sont, d'après lui, racines positives de l'équation, quand on y change x, en $-x$. Par conséquent, elles donnent alors « les vraies solutions des problèmes par +. »

Cette considération est tellement neuve, chez un algébriste du XVI^{e} siècle, qu'il est nécessaire de mettre de nouveau sous les yeux du lecteur le texte même de Stevin.

« *Des solutions que l'on peut faire par — sur les précédens problèmes* (1).

---

(1) Éd. 1585, p. 332. Éd. 1625, p. 309. Éd. 1634, p. 77.

» Aucuns (c'est-à-dire quelques uns) des précédens problèmes, de la proportion des nombres algebraiques (= des équations), reçoivent par dessus les solutions ci-devant données, encore d'autre solution par —. Et combien les mesmes ne semblent que solutions songées, toutesfois elles sont utiles, pour venir par les mesmes aux vraies solutions des problèmes suivans par +. »

La réflexion de Stevin porte sur les équations de tous les degrés. Pour préciser son idée il y ajoute quelques « articles » ou exemples. Voici ceux qui ont trait à l'équation du 2^d degré :

« *Article II* (1). Estant

(2) égale à (1) + (0) $[x^2 = px + q]$

la solution ce peut faire par —.

» Par exemple :

1(2) vaut 4(1) + 21 $[x^2 = 4x + 21]$

combien 1(1) $[= x]$?

» On changera le second terme donné ainsi :

1(2) vaut — 4(1) + 21 $[x^2 = -4x + 21]$

combien 1(1) ?

» Faict, par le 68 problème, 3 ; lequel appliqué à nostre question, nous dirons que la solution est — 3.

» *Article III*. Estant

(2) égale à — (1) + 0 $[x^2 = -px + q]$

la solution se peut faire par —.

» Par exemple

1(2) vaut — 4(1) + 21 $[x^2 = -4x + 21]$

combien 1(1) $[= x]$?

» On changera le second terme donné ainsi :

1(2) vaut 4(1) + 21 $[x^2 = 4x + 21]$

combien 1(1) ?

---

(1) Éd. 1585, p. 333. Éd. 1625, p. 310. Éd. 1634, p. 77.

» Faict, par le 68 problème, 7 ; lequel appliqué à nostre question, nous dirons que la solution est — 7.

» *Article IIII.* Estant

(2) égale à (1) — (0) $[x^2 = px - q]$

la valeur de (1) $[= x]$ ne peut estre —.

» La raison est que la valeur du premier [1] terme seroit tousiours +, et du second terme tousiours — ; lesquels ne peuvent estre égaux. »

C'est évident ; sous cette forme l'équation n'a jamais de racine réelle négative.

Résumons cette première note.

Au point du vue du mode d'écriture et de la notation des équations, Stevin eut une idée plutôt malheureuse, qui n'eut aucun succès.

En revanche, dans la théorie de l'équation du 2^1 degré, il introduisit trois innovations remarquables, qui sont restées : l'unité de la formule de solution ; la démonstration algébrique de cette formule [2]; une interprétation des racines négatives. Il est bien entendu qu'il ne faut pas lui attribuer la découverte même des racines négatives. Tous les algébristes de l'époque les connaissaient, mais elles étaient pour eux sans signification.

Il serait inexact aussi de dire que Stevin a résolu complètement l'équation du 2^1 degré, car, nous l'avons dit, il ne tient pas compte des racines imaginaires.

---

[1] Il y a ici une faute d'impression dans l'édition de 1585 (p. 333) et dans celle de 1625 (p. 310) ; on lit dans le texte « second » au lieu de « premier ». L'édition de 1634 est corrigée (p. 77).

[2] Il est superflu de rappeler ici les solutions algébriques de l'équation du second degré données par les Indiens. Pas un géomètre contemporain de Stevin n'eût pu soupçonner leur existence.

II. — A PROPOS D'UN DOUTE DE M. MAURICE CANTOR RELATIF A L'ÉDITION DES ŒUVRES MATHÉMATIQUES DE SIMON STEVIN DONNÉE PAR ALBERT GIRARD

« En abordant l'analyse des travaux mécaniques et géométriques de Stevin, dit M. Maurice Cantor (1), il nous faut commencer par signaler une difficulté. L'édition des ouvrages de Stevin la plus répandue est la traduction française d'Albert Girard. Préparée après la mort de Stevin, elle ne parut qu'en 1634, après le décès de Girard. Les éditions précédentes sont rares au point d'être devenues introuvables (2). Nous sommes donc dans l'impossibilité de décider si la réédition des *Œuvres* de Stevin par Girard contient d'autres remaniements que les additions précédées du nom de l'éditeur, qui se distinguent aisément du texte primitif. »

Le problème soulevé par M. Cantor mérite d'autant plus d'être résolu que l'édition d'Albert Girard porte le titre d'*Œuvres mathématiques de Simon Stevin augmentées par Albert Girard*.

M. Gravelaar l'a jadis observé avec raison (3), le doute de M. Cantor, insoluble peut-être en Allemagne, ne l'est pas le moins du monde en Hollande. Il n'est pas plus difficile à tirer au clair en Belgique.

Les *Œuvres mathématiques* de Stevin par Albert Girard sont loin, on le sait, d'être une réédition complète de tous les travaux de l'auteur. Girard omet des traités entiers (4) et fait volontiers des coupures dans ceux qu'il reproduit, en supprimant notamment les renseignements historiques. Ces coupures entraînent à l'occasion de légers remaniements de phrase, cela va de soi ; mais la question n'est pas là. Girard a-t-il été plus loin ? Corrige-t-il parfois Stevin ? Le complète-t-il ? Le met-il au point des nouveaux progrès de la science, en négligeant de nous en avertir ?

---

(1) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2e éd., t. 2, Leipzig, Teubner, 1900, p. 573.

(2) Pour la bibliographie des œuvres de Stevin, voir : *Bibliotheca Belgica, par le bibliothécaire en chef et les conservateurs de la Bibliothèque de l'Université de Gand*. 1e sér., t. 23, Gand, Vyt, 1880-90, au mot Stevin et 2e série (en cours de publication) S. 398. Véritable chef-d'œuvre de précision et d'exactitude, beaucoup trop ignoré par les historiens des mathématiques.

(3) *Stevin's Problemata Geometrica door N. L. W. A. Gravelaar*, NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE, 2e sér., t. 5, p. 2 du tiré-à-part.

(4) Par exemple, tous les travaux sur la comptabilité, les travaux philosophiques ou politiques etc. Pour renseignements plus précis, voir la *Bibliotheca Belgica* citée ci-dessus.

Sans avoir collationné systématiquement dans ce but, page par page, le gros volume de l'édition de Girard avec le texte original, je crois pouvoir répondre sans hésiter : non. Il faut attribuer à Girard les passages, voire même les traités entiers précédés de son nom (1), mais absolument rien d'autre. Une très longue habitude des diverses éditions des travaux de Stevin ne me laisse aucun doute à cet égard.

Le but de cette note est de prouver mon assertion pour deux endroits intéressants de l'*Arithmétique*, qui font difficulté et pourraient sembler me contredire. La clarté de la discussion demande de ne pas perdre de vue quelques détails bibliographiques. Stevin a écrit son *Arithmétique* en français. Les *Œuvres* de 1634 ne reproduisent cependant pas l'édition originale de Leyde (Christophe Plantin, 1585), mais bien textuellement l'édition *reueuë, corrigée et augmentée de plusieurs traictez et annotations par Albert Girard Samielois mathématicien,* qui parut aussi à Leyde, chez les Elzevier, en 1625.

Le premier des deux endroits auxquels je fais allusion est la célèbre solution, par approximations successives, de l'équation du 3e degré (2)

$$x^3 = 300x + 33\,915\,024.$$

On la trouve dans l'*Arithmétique* de 1625 (3) et dans les *Œuvres* de 1634 (4), mais elle manque dans l'*Arithmétique* de 1585. Stevin ne l'a en effet publiée qu'en 1594. Elle fait l'objet d'une rarissime plaquette intitulée *Appendice algebraique* (5) sur laquelle j'ai déjà appelé l'attention à plusieurs reprises (¹). Philippe Gilbert en découvrit, en 1859, un exemplaire à la bibliothèque de l'Université de Louvain et en fit l'objet d'une note à l'Académie de Belgique (²). Stevin réédita l'*Appendice,* en 1608, dans la traduction française de ses *Mémoires mathématiques* confiée aux soins de Jean Tuning (³). Lui-même le donna en même temps en flamand, dans les *Wisconstige gedachtenissen* (⁴) et Willebrord Snellius le traduisit en latin, pour les *Hypomnemata mathematica* (⁵).

---

(1) Parmi les traités entiers, j'ai surtout en vue le 5e et le 6e livre de Diophante.

(2) Voir Cantor, *Vorlesungen*, 2e ed., t. 2, pp. 628 et 629.

(3) Pp. 351-355.

(4) T. 1, pp. 88 et 89.

(5) *Appendice Algebraiqve De Simon Stevin de Bruges, contenant regle generale de toutes Equations, 1594.* Sans nom de ville ni d'éditeur. L'*Appendice* fut imprimé à Leyde par François van Raphelengen. Voir *Bibl. Belgica*, citée ci-dessus, 2e ser., t. 23, f° S. 135.

Le second endroit est un problème de Diophante (⁶). La solution n'est plus cette fois de Stevin, mais n'est pas davantage de Girard ; on la doit à Maurice de Nassau. Stevin et Maurice de Nassau ! A bien des points de vue je ne connais guère de sujet plus intéressant dans l'histoire de la Science (⁷). L'illustre Brugeois se montre ingénieur incomparable au service du plus intelligent des maîtres. Mais le patriote et l'homme de caractère y ont-ils toujours gagné ? Je crains qu'il vaille mieux ne pas l'approfondir.

L'édition originale des *Wisconstige gedachtenissen* fournit, sur les circonstances qui entourèrent la solution du problème actuel, des renseignements curieux (⁸), supprimés par Albert Girard ; je les cite d'après la traduction française de Tuning, faite, nous venons de le dire, d'après les ordres et sous le contrôle de Stevin (⁹).

(¹) Principalement dans mon mémoire : *Le fragment du Commentaire d'Adrien Romain sur l'Algèbre de Mohammed ben Musa el Chowarezmi.* Ann. de la Soc. scient, t. 30, Bruxelles, 1906, 2ᵉ part., p. 275.

(²) *Note sur un opuscule peu connu de Simon Stevin de Bruges. Lettre à M. Quetelet.* Bull. de l'Acad. Roy. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, 2ᵉ sér., t. 8. Bruxelles, pp. 192-197. L'exemplaire de l'*Appendice*, que possède l'Université de Louvain, (coté : scienc. 587) fait partie d'un recueil factice relié aux armes d'Adrien Romain.

(³) Leyde, Jean Paedts Jacobs, 1608, t. 5, pp. 7-10.

(⁴) Leyde, Jean Bouwensz, 1608, t. 5, pp. 7-10.

(⁵) Lugduni Batavorum, Joannes Patius, 1608, t. 5, pp. 7-9.

(⁶) Livr. II, prob. 19. Ed. 1625, pp. 467-470 ; Ed. 1634, pp. 117 et 118. Voir aussi, Ed. 1585, p. 496.

(⁷) Voir : *Bijdragen tot de geschiedenis der wetenschappen en letteren in Nederland, door Johannes Pieter van Cappelle.* Amsterdam, Van der Hey, 1821, pp. 125-166 : Over de wiskundige verdiensten van prins Maurits.

(⁸) T. 5, pp. 4-7.

(⁹) T. 5, pp. 4-7.

« Comme Son Excellence, passé quelque temps, résolut de vouloir examiner et entendre l'Arithmétique qu'auparavant, en l'an 1585, j'avoy divulgué en langue françoise, et que suivant tel dessein, il n'examinoit pas seulement le tout plus curieusement que selon le vulgaire, mais y adjoustoit encores ses propres inventions, que j'amassoye et gardoye, il m'a semblé bon de les mettre en ce lieu. »

Pour l'intelligence des « inventions » de Son Excellence « amassées et gardées » par Stevin, un mot d'éclaircissement ne sera pas superflu.

La traduction de Diophante, par Stevin, est des plus libres. Le texte français s'écarte complètement du texte grec, dont le traducteur semble n'avoir pris aucun souci. C'est un Diophante en style français et notations algébriques de la fin du XVI^e siècle. Stevin reste cependant fidèle à l'algébriste grec en deux points :

1° N'employer qu'un seul signe graphique pour désigner les inconnues ;

2° Dans les problèmes un peu compliqués, retenir au fur et à mesure, sous forme de règles, les solutions trouvées, comme nous retenons dans les problèmes d'intérêt, par exemple, la formule

$$r = \frac{ait}{100},$$

puis appliquer ces règles, sans démonstration nouvelle, aux problèmes suivants. Stevin donne à ces règles le nom de « théorèmes arithmétiques ».

D'après Maurice de Nassau, cette manière d'opérer est pleine de complications inutiles surchargeant à plaisir la mémoire. Écoutons Stevin nous raconter les critiques qu'il dut subir à ce sujet (1). Titre du chapitre :

« *Des questions algébraïques que Diophante a opéré par le moyen de théorèmes arithmétiques, lesquelles Son Excellence a expédié* (c.-à-d. a résolues) *sans se servir d'iceux théorèmes.*

» Après que Son Excellence avoit examiné en nostre susdite

---

(1) *Mémoires mathématiques*, t. 5, p. 5 ; *Wisconstige gedachtenissen*. t. 5, p. 5 ; *Hypomnemata Mathematica*, t. 5, p. 5.

Arithmétique les définitions, ensemble l'opération rationelle d'addition, substraction, multiplication et division des nombres algébraïques, et qu'il estoit parvenu aux livres de Diophante traduits en françois, dont les propositions estoyent appliquées au précédent (1) comme practique de l'algèbre, il n'a aux computations d'icelles voulu suivre les opérations par moy descrites, mais ses propres imaginations, voyant, à la fin après, la concordance de sa conclusion avec l'autre (c'est-à-dire, avec celle de Stevin).

» Mais parce que la position des nombres algébraïques, pour imiter le proposé (2), advient souvent si obscure, que leur propriété se déclare là par théorèmes arithmétiques, ceste manière d'opération n'a pleu à Son Excellence ; disant qu'on ne se sçauroit souvenir à sa volonté de tels théorèmes inusitez et imaginations si intricates, quand quelques questions s'offrent à compter ; de sorte qu'en ce lieu, et partout là où se rencontroit quelque arrest, il s'est servi d'une autre voye, usant de postposées quantitez, et venant par communes règles d'icelles au requis. »

La *postposée quantité* est un deuxième signe graphique pour désigner la deuxième inconnue (3) ; le *requis*, la solution ; la *commune règle*, la règle générale de résolution des équations à deux inconnues.

« Or afin de réciter ici un exemple entre plusieurs, il est advenu que nous sommes parvenus à la 19 question du 2 livre de Diophante (4). » La solution de Diophante est perdue et Xylander son premier éditeur (5) en imagina une autre « qui avoit de l'erreur » pour parler comme Stevin. Le problème revient à partager le nombre 80 en trois parties A, B, C telles que

---

(1) Stevin donne les livres de Diophante, comme application de son algèbre *qui précède*.

(2) Cette expression de Stevin est très imagée. Pour lui, résoudre par l'algèbre un problème proposé, c'est « imiter le proposé par position de nombres algébraïques ».

(3) Stevin représente l'inconnue par un chiffre placé dans un petit cercle ; je remplace, comme toujours, ce dernier par une double parenthèse. Ceci remarqué
x, x^2, x^3 ... etc. s'écrivent respectivement chez lui : (1), (2). (3) :
y, y^2, y^3 ... (1) *sec.* (2) *sec.* (3) *sec.* :
z, z^2, z^3 ... (1) *ter.* (2) *ter.* (3) *ter.*

(4) Dans les *Diophanti Alexandrini Opera omnia*, édités par Tannery. Leipzig, Teubner, 1893, t. 1, p. 111, ce problème est le 18e.

(5) *Diophanti Alexandrini Rerum Arithmeticarum Libri Sex*... Basileae per Eusebivm Episcopivm et Nicolai Fr. haeredes M.D.LXXV, pp. 58-60.

$$\left(B+\frac{1}{5}A+6\right)-\left(\frac{1}{6}B+7\right)=\left(C+\frac{1}{6}B+7\right)-\left(\frac{1}{7}C+8\right)$$
$$=\left(A+\frac{1}{7}C+8\right)-\left(\frac{1}{5}A+6\right).$$

En ajoutant à ces deux équations

$$A+B+C=80,$$

tout consiste, on le voit, à résoudre un système de trois équations à trois inconnues. J'abrège les longues explications de Stevin, mais voici la marche de son raisonnement en notations modernes :

« *Première partie de l'opération.* »

Son Excellence a mis pour la première partie x
pour la seconde y
d'où la troisième est $-x-y+80$

Donc

$\left(B+\frac{1}{5}A+6\right)-\left(\frac{1}{6}B+7\right)$ vaut $\frac{5}{6}y+\frac{1}{5}x-1$

$\left(C+\frac{1}{6}B+7\right)-\left(\frac{1}{7}C+8\right)$ vaut $-\frac{6}{7}x-\frac{29}{42}y+\frac{473}{7}$

d'où

$$\frac{5}{6}y+\frac{1}{5}x-1=-\frac{6}{7}x-\frac{29}{42}y+\frac{473}{7}$$

et par conséquent

$$y=-\frac{111}{160}x+45$$

« *Deuxième partie de l'opération* ».

L'inconnue y étant exprimée en fonction de x, Son Excellence « a recommencé une nouvelle opération, entièrement de quantitez premièrement posées », c'est-à-dire avec une seule inconnue.

Représentons la valeur de A par	x
B valant	$-\frac{111}{160}x + 45$
C $(= -x - y + 80)$ vaut	$-\frac{49}{160}x + 35$
D'où $\left(B + \frac{1}{5}A + 6\right) - \left(\frac{1}{6}B + 7\right)$	$-\frac{121}{320}x + \frac{73}{2}$
$\left(C + \frac{1}{6}B + 7\right) - \left(\frac{1}{7}C + 8\right)$ vaut de même	$-\frac{121}{320}x + \frac{73}{2}$
et $\left(A + \frac{1}{7}C + 8\right) - \left(\frac{1}{5}A + 6\right)$	$\frac{121}{160}x + 7$

Donc

$$-\frac{121}{320}x + \frac{73}{2} = \frac{121}{160}x + 7$$

$x = \frac{9440}{363}$ $\quad$ $y = \frac{9786}{363}$ $\quad$ la 3e partie $= \frac{9814}{363}$

Dans l'édition originale Stevin fait suivre la solution de deux *Notes* omises par Albert Girard, mais trop curieuses pour ne pas être transcrites ici. La première est une critique de la méthode de Maurice de Nassau. Fidèle à Cardan dont il s'inspire évidemment, Maurice n'employait jamais à la fois plus de deux inconnues et exprimait immédiatement, au besoin plusieurs fois de suite, la valeur des secondes inconnues en fonction de la première (1). C'est, d'après Stevin, le procédé le plus clair pour résoudre les problèmes ; mais ce n'est pas toujours le plus court et il vaut parfois mieux, au point de vue de la brièveté, employer simultanément trois ou quatre inconnues.

« *1 Note* (2).

» L'opération ci-dessus n'a eu qu'une fois position de postposées quantitez ; mais il est advenu en aucuns exemples, que leur valeur estant trouvé en premièrement posées (1), et en opère (2) selon le requis de la question, qu'il en suivoit la deuxiesme fois position de postposées quantitez ; à quoy Son Excellence reprint autrefois *secondement* postposées (3), et que le semblable advenoit aussi jusques à la troisiesme fois. Car combien que cela se pourroit opérer par une voye plus briefve, en usant des quantitez tiercement et quartement posées (4), sans à chascune fois cercher la valeur des postposées en premièrement posées, toutefois icelle manière sembloit plus commode, pour estre moins chargé de profondes imaginations. »

---

(1) Voir, pour plus de détails sur la méthode de Cardan, mon mémoire : *L'algèbre de Jacques Peletier du Mans*. REVUE DES QUEST. SCIENT., t. 61, Bruxelles, 1907, pp. 151-157.

(2) *Mémoires math.*, t. 5, pp. 6 et 7 ; *Wisconstige gedacht.*, t. 5, pp. 6 et 7 ; *Hypomn. math.*, t. 5, pp. 6 et 7.

Ce sont donc « de profondes imaginations » d'après Stevin que de résoudre des systèmes d'équations du premier degré à trois et quatre inconnues ! C'est l'occasion de remarquer, une fois de plus, combien les auteurs du XVIe siècle regardaient ces opérations si simples comme difficiles !

Dans la seconde note Stevin fait des réflexions de genres divers (5).

« *2 Note.*

» Combien que computations opérées avec postposées quantitez, ne sont pas matière nouvelle, mais que par quelques autheurs s'en donnent des exemples (6), toutefois considéré qu'il ne me souvient d'en avoir veu un usage si général comme Son Excellence en a mis en œuvre, et cela sur un fondement si ferme, que la vraye solution de plusieurs difficiles questions provenoit souvent en la première opération sans errer, ce que par autre voye causeroit à maint arithméticien un long rompement de teste, j'estime que l'annotation de ce chapitre (¹) pourroit causer facilité, à ceux qui sur l'opération par postposées quantitez prendront regard plus près qu'on n'a fait.

---

(1) « Leur valeur (des postposées quantitez) estant trouvé en premièrement posées », c'est-à-dire les secondes inconnues étant exprimées en fonction de la première.

(2) Les *Wisconstige gedachtenissen* disent (t. 5, p. 6) : « En daer me voortghevroght », et quand on continue à opérer.

(3) Pour comprendre ceci, il faut se rappeler que dans la méthode de Cardan suivie par Maurice, avant de passer à la 3e inconnue, on exprime la 2e en fonction de la première ; ce qui permet d'employer un seul et même signe graphique pour représenter la 2e, la 3e, la 4e inconnue. (Voir mon mémoire sur *L'algèbre de Jacques Peletier*, cité ci-dessus). C'est ce que Stevin appelle « reprendre autrefois *secondement* postposées. »

(4) C'est-à-dire d'un 3e et d'un 4e signe graphique, pour désigner la 3e et la 4e inconnue.

(5) *Mémoires mathém.*, t. 5, p. 7 ; *Wisconstige gedacht.* t. 5, p. 7 ; *Hypomn. math.*, t. 5, p. 7.

(6) Notamment Cardan, Stifel, Peletier et Gosselin. Voir pour plus de détails

» Je confesse aussi, que si à la translation et explication des livres de Diophante, cela m'eut alors esté si bien cognu comme maintenant, que je n'eusse pas mis iceux théorèmes si difficiles à retenir par mémoire ; car il me souvient encore, qu'estant occupé en ladite translation, je tenoy en mon imagination telle cognoissance, comme a fait aussi Son Excellence, pour imparfaicte.

» Ceci est parlé de ceste matière selon mon opinion présente. Si quelqu'un sans mon sçeu en a escrit plus amplement, et qu'il n'est venu en mes mains, l'on m'en veuille excuser, comme n'estant point d'intention d'amoindrir à quelqu'un sa réputation.

» Encore diroy-je ici une chose, à sçavoir que Son Excellence ne sçavoit souvent parvenir à vraye solution, par opération de postposées quantitez, aux questions de Diophante de quarrez et costez requis ayant qualité donnée, et à nombre arithmétique commensurable (²). Mais veu qu'icelles questions ont des solutions en multitude infinie, elles semblent une espèce de peu d'estime. Néantmoins ceux ausquels elles plaisent, peuvent attenter ce qu'ils en pourront faire par les susdites postposées quantitez, sans le secours des théorèmes du troisiesme et du quatriesme livre (³). »

---

mes mémoires sur *L'Algèbre de Jacques Peletier*, (cité ci-dessus, pp. 151-165), et sur le *De Arte Magna de Guillaume Gosselin*, BIBLIOTHECA MATHEMATICA, 3ᵉ série, t. 7, Leipzig, 1906-1907, pp. 62-66.

(¹) « L'annotation de ce chapitre », c'est-à-dire, la note, la théorie, qui fait l'objet de ce chapitre.

(²) Le « quarré requis » et le « costé requis » sont l'inconnue respectivement au second et au premier degré. Stevin a en vue les problèmes d'analyse indéterminée du 2ᵈ degré au sens de Diophante ; c'est-à-dire dans lesquels les valeurs des inconnues ne sont pas astreintes à être entières, mais simplement rationnelles.

(³) J'ai dit ci-dessus ce qu'étaient ces théorèmes auxquels Stevin fait allusion.

LE MOUSTÉRIEN BELGE

par l'abbé J. CLAERHOUT

On appelle Moustérien, le type de l'industrie que l'on a découvert dans la célèbre station du village Le Moustier (Dordogne). On l'a rencontré dans les couches stratifiées les plus anciennes d'un abri sous roche et d'une petite caverne qui s'ouvre derrière cet abri. Cette station est située à 200 mètres de la Vézère et à 24 mètres au-dessus du niveau de cette rivière. Elle a été fouillée et décrite avec beaucoup de sagacité par MM. Lartet et Christy. Depuis on a exploré cette station à diverses reprises (1).

L'époque moustérienne appartient au Quaternaire moyen. On la désigne aussi sous le nom de l'Age du Mammouth, et l'on est convenu de lui réserver ce nom et d'appeler Age du Renne les différentes phases de l'évolution du Quaternaire supérieur.

Elle est caractérisée par un outillage spécial et typique et elle est contemporaine des moraines de la quatrième période glaciaire, connue sous le nom de *Würmien* : elle correspond en Belgique au dépôt du limon hesbayen.

« Aucun gisement répondant au type du Moustérien n'a été rencontré en Belgique (2). »

Ce sont les paroles de M. Rutot.

Malgré cette exécution sommaire, nous n'avons pas jugé inopportun d'étudier les résultats de quelques fouilles et de consacrer une petite notice à ce que nous croyons pouvoir appeler le Moustérien belge.

---

(1) J. Dechelette. *Manuel d'Archéologie préhistorique, celtique et gallo-romaine*, tome I, *Archéologie préhistorique*. Paris, 1908, p. 91.

(2) A. Rutot. *Le Préhistorique dans l'Europe centrale*. ANNALES DE LA FÉDÉRAT. ARCHÉOL. ET HISTORIQUE DE BELGIQUE, tome XVII. Congrès de Dinant. p. 191.

Signalons d'abord les caractères de l'industrie moustérienne ; examinons ensuite si elle n'est pas représentée dans l'une ou l'autre des nombreuses cavernes qui ont été explorées en Belgique et terminons par quelques détails ethnographiques sur nos ancêtres de l'Age du Mammouth.

I

CARACTÈRES

D'après M. l'abbé Obermaier (¹), la période moustérienne est contemporaine de la quatrième ou dernière période glaciaire. Il régnait un climat froid et humide et les habitants de notre continent ont cherché un refuge dans les cavernes.

Cette époque moustérienne est caractérisée par la faune du Mammouth et par l'outillage spécial que les Troglodytes moustériens ont confectionné.

Faune du Moustérien. — Disons brièvement avec M. de Lapparent (²) que les animaux contemporains du Moustérien sont *Elephas primigenius, Rhinoceros tichorinus*, *Megaceros hibernicus*.

Outillage Moustérien. — Les outils qui prédominent à l'époque moustérienne sont la pointe et le racloir.

La *pointe* moustérienne est un éclat triangulaire, dont la longueur excède rarement 10 centimètres.

Ce qui la caractérise et la distingue de l'instrument chelléen, c'est qu'elle n'est retouchée que d'un seul côté.

L'une des faces présente des arêtes de taille et les bords latéraux, finement retouchés, qui se terminent en pointe.

Sur l'autre côté, on observe le conchoïde de percussion et la face d'éclatement toute lisse.

(¹) H. Obermaier, *Das geologische Alter des Menschengeschlechts.* MITTEILUNGEN DER GEOLOGISCHEN GESELLSCHAFT, Wien. III, 1908, p. 312.

(²) A. de Lapparent, *Traité de Géologie*, 5ᵉ édition. Paris 1906, tome III, p. 1661.

A la base, opposée à la pointe, on remarque le plan de frappe, sur lequel a porté le coup du percuteur.

Grâce à ses bords tranchants et à son extrémité aiguë, la pointe moustérienne pouvait servir à de nombreux usages et être employée pour percer, pour scier, pour couper et pour racler (Fig. 1).

Le *racloir* moustérien est un éclat de forme variée. L'une des deux faces de cet éclat est lisse et l'autre face porte les traces du travail. Cette face présente les arêtes de la taille et sur le bord le plus développé, lequel décrit un arc de cercle, une fine retouche opérée par percussion.

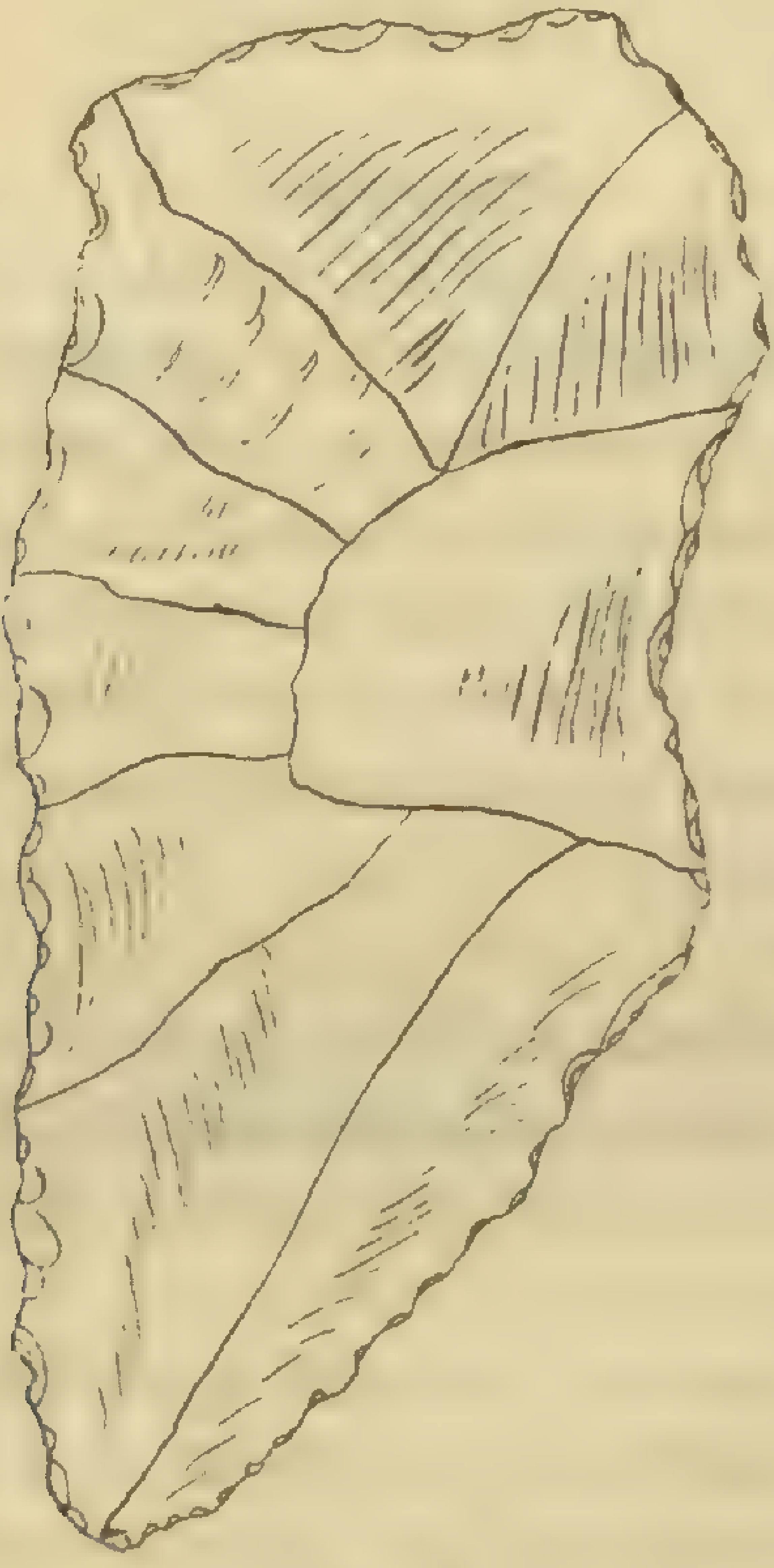


Fig. 1.

La longueur moyenne est de 9 centimètres : elle varie entre 17 et 5 centimètres (¹).

On utilisait cet instrument pour racler les peaux, enlever les parties graisseuses sur la face inférieure et les poils sur la face

---

(¹) G. et A. de Mortillet, *La Préhistoire*, Paris 1910, p. 173.

supérieure, pour écorcer et aplanir les bois, pour couper les chairs et les peaux (¹) (Fig. 2).

L'homme moustérien de la station de La Quina (Charente) a aussi utilisé quelques ossements : ce sont des extrémités inférieures d'humérus de cheval et de bison, des phalanges antérieures de cheval et de grands ruminants, et ces pièces portent des traces d'usure, d'écrasement et des incisions sur une partie bien délimitée de leur surface. Elles peuvent avoir servi soit de maillets, soit d'enclumes (²).

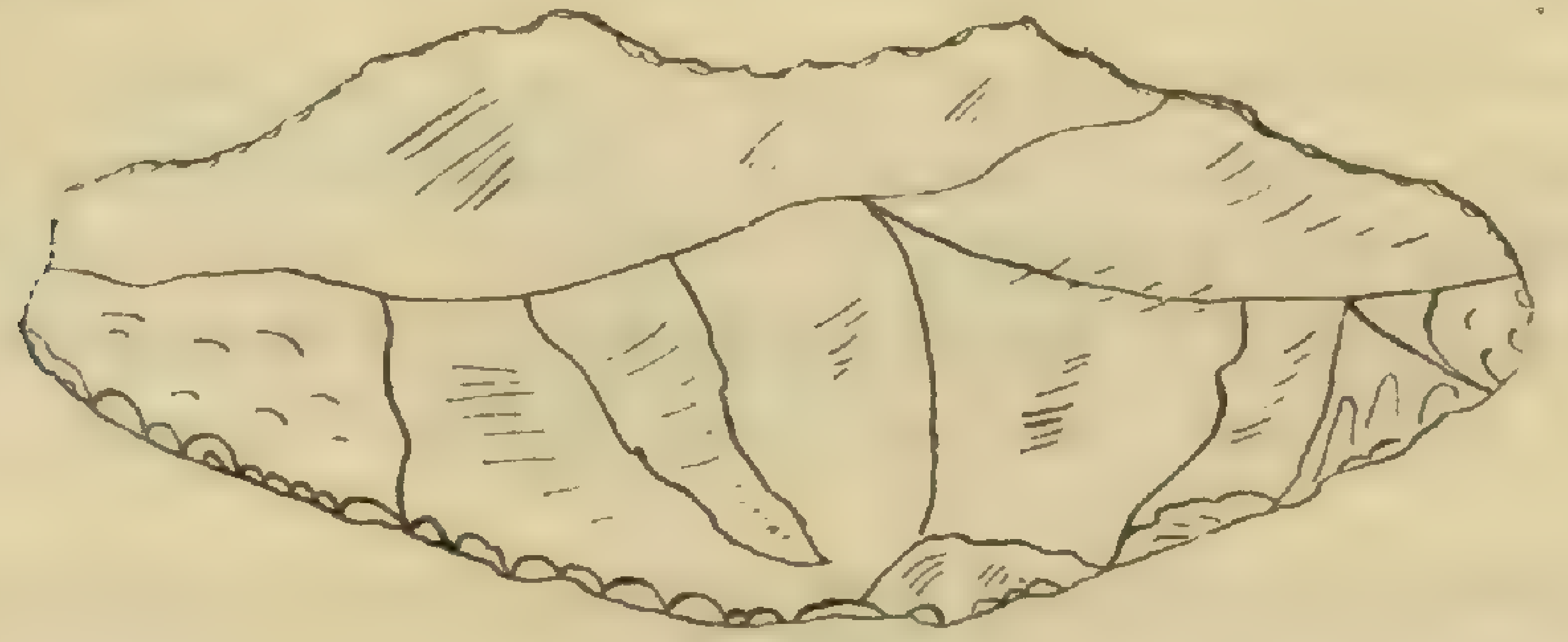


FIG. 2.

II

GISEMENTS

Grotte du Docteur à Huccorgne. — *La grotte du Docteur* se trouve dans le domaine de Fumelette, dans la petite vallée du Roua, qui débouche perpendiculairement dans celle de la Méhaigne et qui est située à quelques minutes de marche de la station de Huccorgne, sur la rive droite de la Méhaigne. Cette caverne s'ouvre à une hauteur de 25 mètres au-dessus du fond du lit de la rivière, par une entrée, haute de 5 mètres, conduisant à une salle de 10 mètres de hauteur, 12ᵐ,5 de longueur et 8ᵐ,5 de largeur. Dans cette salle on remarque un couloir au fond et deux annexes latérales. Devant la caverne s'étendait une terrasse, large de 10 mètres.

(¹) G. et A. de Mortillet, *op. citat.*, p. 170.

(²) L'ANTHROPOLOGIE, tome XVIII, 1907, pp. 390-291.

On pouvait observer quatre couches de dépôts meubles superposés dans la terrasse, dans la salle principale et dans les annexes.

La plus ancienne était constituée par un lit de cailloux, avec blocs de silex bruts, blocs anguleux de calcaire et limon peu abondant.

Au-dessus de cette couche s'étageait un niveau de terre brune, avec blocaux anguleux calcaires et cailloux roulés. Cette couche brune était un niveau ossifère.

Une couche plus récente était jaune, avec blocaux calcaires anguleux et de rares cailloux roulés. C'était un autre niveau ossifère.

La couche la plus récente était une couche noire avec éboulis : elle s'étendait sous la terre végétale.

Le niveau ossifère brun était un niveau moustérien, nettement caractérisé par la faune du Mammouth et les outils typiques de l'époque moustérienne.

M. A. de Mortillet observe judicieusement que l'on peut discerner le mélange des types acheuléen et moustérien, dans nombre de stations moustériennes (¹). Il n'y a donc rien d'étonnant que MM. Fraipont et Tihon (²), qui ont exploré les cavernes de la vallée de la Méhaigne, avec toute la rigueur scientifique que ces fouilles comportent, aient recueilli un certain nombre d'amygdales dans la grotte du Docteur. Malgré la présence de ces instruments taillés sur les deux faces, c'est un fait indiscutable que l'industrie de la grotte du Docteur se rapporte au Moustérien pur.

Nous avons relevé au Musée de Paléontologie de l'Université de Liége, une série de 17 superbes pointes moustériennes (fig. 1) (³), accompagnée d'une série de 16 pointes moustériennes de moindre

---

(¹) G. et A. de Mortillet. *Musée préhistorique*, 2e édit. Paris 1903. — Texte de la Pl. XV.

(²) J. Fraipont et F. Tihon, *Explorations scientifiques des cavernes de la vallée de la Méhaigne*. MÉMOIRES COURONNÉS ET AUTRES MÉMOIRES PUBLIÉS PAR L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, tome XLIII, 1889, pp. 1-72 avec 12 pl. et tome LIV. 1896, pp. 1-55, avec 8 planches.

(³) Cette figure représente une grande pointe moustérienne, recueillie dans la grotte du Docteur et conservée au Musée de Paléontologie de l'Université de Liége. C'est le n° 3641 de la vitrine 5. Cette vitrine contient les récoltes faites dans la grotte du Docteur.

dimension. On y compte aussi 38 magnifiques racloirs moustériens (fig. 2) (¹).

La faune rencontrée dans l'assise brune est bien celle de l'Age du Mammouth. Dans le relevé, dressé par M. Fraipont des ossements recueillis dans la grotte, on constate que le *Rhinoceros tichorinus* et l'*Elephas primigenius* étaient abondants et que leurs ossements étaient accompagnés des débris de l'ours des cavernes, de l'hyène, du grand cerf d'Irlande et de l'*Ursus ferox*.

Les explorateurs ont pu discerner les vestiges de la première utilisation de l'os : c'est un fait à rapprocher de constatations analogues, qui ont été faites beaucoup plus tard en France et qui sont reconnues par M. A. de Mortillet : « Le Dʳ Henri Martin observe des traces d'utilisation sur des os de l'époque moustérienne, provenant de ses fouilles à la station de La Quina (Charente), 1909 (²). » MM. Fraipont et Tihon ont recueilli des métatarsiens et des métacarpiens de cheval et des esquilles d'os longs dont l'extrémité paraît avoir été apprêtée pour fournir un poinçon rudimentaire (³).

Abri sous roche Sandron. — Cet abri se trouve à 340 mètres de la Méhaigne, à 34 mètres au-dessus du niveau moyen de cette rivière, à 28 mètres au-dessus du fond de la vallée du Roua et en face de la grotte du Docteur. L'abri a 6 mètres de haut, 15 mètres de large et 12 mètres de profondeur et il était précédé d'une terrasse large de 15 mètres.

Il a été exploré par MM. G. de Looz, A. de Loë, Tihon et Fraipont.

Il fallait distinguer trois couches : la couche la plus récente, épaisse de quelques décimètres, était un éboulis avec limon et terre végétale. La couche subjacente, épaisse de 0ᵐ,50, était un niveau ossifère, constitué de terre jaune ou grise, avec éboulis et un peu de cailloux. L'assise la plus ancienne, d'une épaisseur moyenne d'un mètre, contenait de l'argile rouge, presque plastique : c'était un second niveau ossifère.

(¹) La figure 2 représente en grandeur naturelle le beau racloir nº 3617. Il est en silex blanc et il appartient à la même collection que la pointe de la fig. 1.

(²) G. et A. de Mortillet, *La Préhistoire*, édit. 1910, p. IX.

(³) J. Fraipont et F. Tihon. *Op. laudat.* Mém. de 1889, *passim*.

Dans ces deux niveaux on pouvait observer les débris de la faune du Mammouth, des vestiges de *Rhinoceros tichorinus*, d'*Elephas primigenius*, d'*Hyaena spelaea* et d'*Ursus spelaeus*.

On a pu y relever, à côté de quelques amygdales, des pointes et des racloirs qui dénotaient une technique moustérienne et qui, malgré la présence des coups de poing, servent à classer ce gisement dans l'Age du Mammouth (¹).

Grotte de la carrière de l'Hermitage. — Le lieu dit, l'Hermitage est situé entre Huccorgne et Moha. Une grotte y fut découverte dans les travaux de déblaiement d'une carrière : la partie qui reste de cette grotte mesure $6^{m},5$ de largeur, $1^{m},35$ de hauteur et 5 mètres de profondeur. Elle contenait deux niveaux ossifères, qui constituaient deux stades d'altération de dépôts meubles avec débris de la faune la plus pure de l'époque du Mammouth : on put y voir les ossements du rhinocéros à narines cloisonnées, du grand cerf d'Irlande, du Mammouth, de l'ours et de l'hyène des cavernes.

Comme dans nombre de gisements moustériens, on a pu y recueillir, à côté de 63 pointes en forme d'amandes, 18 pointes du type moustérien et environ 300 racloirs, que l'on peut aussi rapporter à l'époque moustérienne (²).

Plusieurs dépôts des cavernes de la vallée de la Méhaigne datent donc de l'époque moustérienne : ils sont signalés comme moustériens par MM. de Mortillet (³) et par M. Hoernes (⁴), et, à l'affirmation de M. Rutot, on peut opposer la conclusion solidement établie de M. Tihon : « Le Moustérien pur a été rencontré à la grotte du Docteur et au trou Sandron (⁵). »

(¹) J. Fraipont et F. Tihon. *Op. laudat.* Mém. de 1896, p. 5 à 15.

(²) Fraipont et Tihon, *opus laudat*, mémoire de 1896, pp. 21-28. — Les mêmes auteurs signalent encore quelques grottes, dans le même mémoire, comme le *Trou Chena* et le *Trou Robay*, etc., qui constituent des gisements moustériens de peu d'importance.

(³) G. et A. de Mortillet. *La Préhistoire*, p. 617.

(⁴) M. Hoernes. *Der diluviale Mensch in Europa.* Braunschweig, 1903, p. 187.

(⁵) F. Tihon. *Exploration des grottes de la vallée de Méhaigne.* BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, tome VIII, 1888-1889, p. 147.

III

ETHNOGRAPHIE

L'aire et le mode de dispersion de l'outillage moustérien uniforme prouvent que les peuplades des temps moustériens erraient par petits groupements et par hordes disséminées, sur d'immenses territoires (1) ; elles s'attaquaient aux terribles carnivores, à l'aide d'épieux armés de pointes de silex et, pour se prémunir contre le climat froid et humide, elles disputaient aux bêtes fauves le refuge des cavernes.

Devant les grottes les Moustériens allumaient de grands feux pour cuire leurs viandes et écarter les animaux féroces ; à l'entrée des grottes et sur les terrasses, s'accumulaient en dépôts malpropres les ossements brisés, les reliefs de leurs repas, les instruments abandonnés, les déchets de la taille du silex.

« Le chasseur troglodyte, quand il était parvenu à tuer un de ces énormes mammifères, tel qu'un Mammouth ou un rhinocéros, un bœuf ou un cheval, voire même une hyène, ne pouvant le transporter entier dans sa demeure, dont l'accès était souvent bien difficile, lui enlevait la peau sur place, lui détachait la tête, désarticulait les membres antérieurs et postérieurs au niveau des ceintures... Venait-il de s'emparer d'un cerf ou d'un renne aux vastes ramures, il avait soin de briser les bois non loin de leur base, car il n'aurait guère pu traverser les taillis avec un tel butin, pour remonter à son antre (2). »

Les habitants primitifs de la vallée de la Méhaigne ont utilisé pour la confection de leurs instruments le silex, le grès lustré, le quartzite et le phtanite cambrien des terrains environnants (3).

Nous ne connaissons pas l'homme moustérien de la vallée de la Méhaigne, mais nous savons par des découvertes récentes et sensationnelles que les Moustériens appartiennent à la race dite de Spy-Néanderthal. Nous connaissons les squelettes de l'homme de la Chapelle-aux-Saints (Corrèze) et de l'*Homo mousteriensis Hauseri* (Dordogne), qui ont été relevés dans des niveaux nettement moustériens et dont on a pu déterminer les caractères.

---

(1) M. Hoernes. *Op. citat.*, pp. 25-26.

(2) J. Fraipont et F. Tihon. *Op. laudat.* Mém. de 1889, p. 44.

(3) J. Fraipont et F. Tihon. *Op laudat.* Mém. de 1889, p. 21.

M. Boule a superposé les profils des calottes crâniennes de Néanderthal, de Spy et de l'homme fossile de la Corrèze, vues en *norma verticalis,* orientées suivant la ligne glabello-iniaque (¹) ; d'autre part M. Klaatsch montre les calottes crâniennes de Bonn, de l'homme de la Corrèze et de l'homme de la grotte inférieure du Moustier, projetées suivant le même horizon glabello-iniaque (²) : il ressort de cette double superposition que les lignes profilées de tous ces crânes coïncident à peu près, que tous ces crânes appartiennent à une série homogène et constituent des exemplaires d'une même race : elle est caractérisée par des arcades sourcilières très proéminentes, des orbites arrondis, des fosses nasales à grande ouverture, la mâchoire supérieure fortement projetée en avant, une mâchoire inférieure puissante, s'articulant par d'énormes condyles au reste de la tête et présentant un menton fuyant en arrière, un front bas et fuyant, dont la courbe se continue jusqu'à l'occiput très saillant.

Cette race était analogue à plusieurs égards à celle des sauvages de l'Australie.

Notons en terminant que le squelette du Moustier était inhumé avec des outils en silex, ce qui implique, suivant l'aveu de M. Klaatsch (³), des idées religieuses et la conviction que quelque chose de l'homme survit à la mort.

(¹) M. Boule. *L'homme fossile de la Chapelle-aux-Saints (Corrèze).* L'ANTROPOLOGIE, tome XX, 1909, p. 263.

(²) H. Klaatsch. *Die neuesten Ergebnisse der Paläontologie des Menschen.* ZEITSCHRIFT FÜR ETHNOLOGIE, 41. Jahrgang 1909. Planche entre les pages 564 et 565.

(³) H. Klaatsch. *Op. citat.*, p. 547.

Sur la synthèse de l'eau oxygénée par l'action de l'effluve électrique

Par A. DE HEMPTINNE

En 1885, Traube et Engler (¹) signalent que dans la flamme de l'hydrogène il existe des traces d'eau oxygénée, principalement si l'on refroidit cette flamme sur de l'eau ou sur de la glace. L'eau provenant de la glace fondue contient des traces de ce même composé.

En 1905, Nernst (²) obtient des traces d'eau oxygénée en faisant éclater une étincelle sous l'eau, ou en dirigeant un jet de vapeur d'eau sur un corps incandescent.

A la même époque, Finkh (³) observe la formation de traces d'eau oxygénée lors de l'explosion d'un mélange d'hydrogène et d'oxygène, ce dernier gaz étant en excès.

Findlay (⁴) obtient également de faibles quantités en soumettant à l'action de l'effluve électrique dans un ozonateur un mélange de vapeur d'eau et d'oxygène.

En 1908, Fischer et Marx, et plus tard Fischer et Runge (⁵) obtiennent des traces de ce corps en soumettant à l'action de la chaleur ou de l'effluve électrique un mélange de vapeur d'eau et d'oxygène. Dans toutes ces expériences la quantité d'eau oxygénée obtenue était très faible, il ne s'agissait pour ainsi dire que de traces décelées par l'action de l'acide titanique et généralement à peine titrables par une solution de permanganate de potasse.

(¹) Ber. Deutsche Chem. Ges. 1885, p. 1890.

(²) Z. f. El. Ch. 1905.

(³) Z. f. Or. Ch. 1905.

(⁴) Z. f. El. Ch. 1906.

(⁵) Ber. d. Ch. Ges. 1908, p. 945.

Toutes ces recherches semblent avoir été inspirées par l'idée d'obtenir de l'eau oxygénée en oxydant de la vapeur d'eau. Cette idée est logique en apparence et pourtant les résultats sont peu encourageants.

En opérant dans des conditions très différentes, pour ainsi dire opposées et en apparence illogiques, je suis parvenu à des rendements considérables.

J'ai démontré il y a quelques années que l'on pouvait réaliser la synthèse de l'acide stéarique en faisant agir l'effluve électrique sur de l'acide oléique en présence d'hydrogène. En vue de déterminer si l'action simultanée de l'effluve sur le liquide et sur le gaz est nécessàire ou si elle communique à l'hydrogène une activité plus ou moins durable et suffisante pour réaliser sa combinaison avec l'acide oléique, j'ai fait des expériences dans diverses conditions.

En principe, elles consistaient à faire barboter de l'hydrogène dans de l'acide oléique, du chlorure ferrique ou du permanganate de potasse.

Le gaz était soumis au préalable à l'action de l'effluve électrique entre deux tubes concentriques.

Connaissant la vitesse du courant gazeux et la distance entre le tube à effluves et la surface du liquide, on peut en déduire le temps pendant lequel le gaz conserve son activité. La solution de permanganate de potasse acidulée se prête particulièrement bien à ce genre de recherche,parce que sous l'action d'un agent réducteur elle se décolore.

Les premières expériences furent faites avec de l'acide oléique, elles indiquèrent une diminution apparente de l'indice d'iode. L'acide oléique, le chlorure ferrique et la solution de permanganate de potasse manifestèrent des phénomènes de réduction.

L'effluve électrique semblait donc communiquer à l'hydrogène une activité réductrice plus ou moins durable.

Les expériences furent faites de la manière suivante :

De l'hydrogène provenant d'une bonbonne fut introduit dans une cloche d'une contenance de 200 litres environ. Avant de pénétrer dans les appareils à effluve, le gaz était lavé dans diverses solutions afin d'enlever toute trace de substance réductrice qu'il aurait pu contenir. Comme le montre la figure (1) l'appareil à effluve était composé d'un ensemble de parties en verre réunies par des pièces rodées l'une à l'autre de manière à éviter l'emploi de toute substance attaquable. La partie A comprenait deux tubes concentriques longs d'environ 10 centim. et d'un diamètre de 3 centim. Ces tubes étaient séparés par un espace de deux à trois millimètres. C'est dans cet espace que le gaz est soumis à l'action de l'effluve électrique. La surface extérieure des tubes était garnie d'une feuille d'étain et le tube intérieur rempli d'un liquide conducteur. Les armatures étaient reliées en série aux pôles d'un dispositif de Tesla.

Le partie inférieure terminée par un tube recourbé s'élargissait en forme de boule.

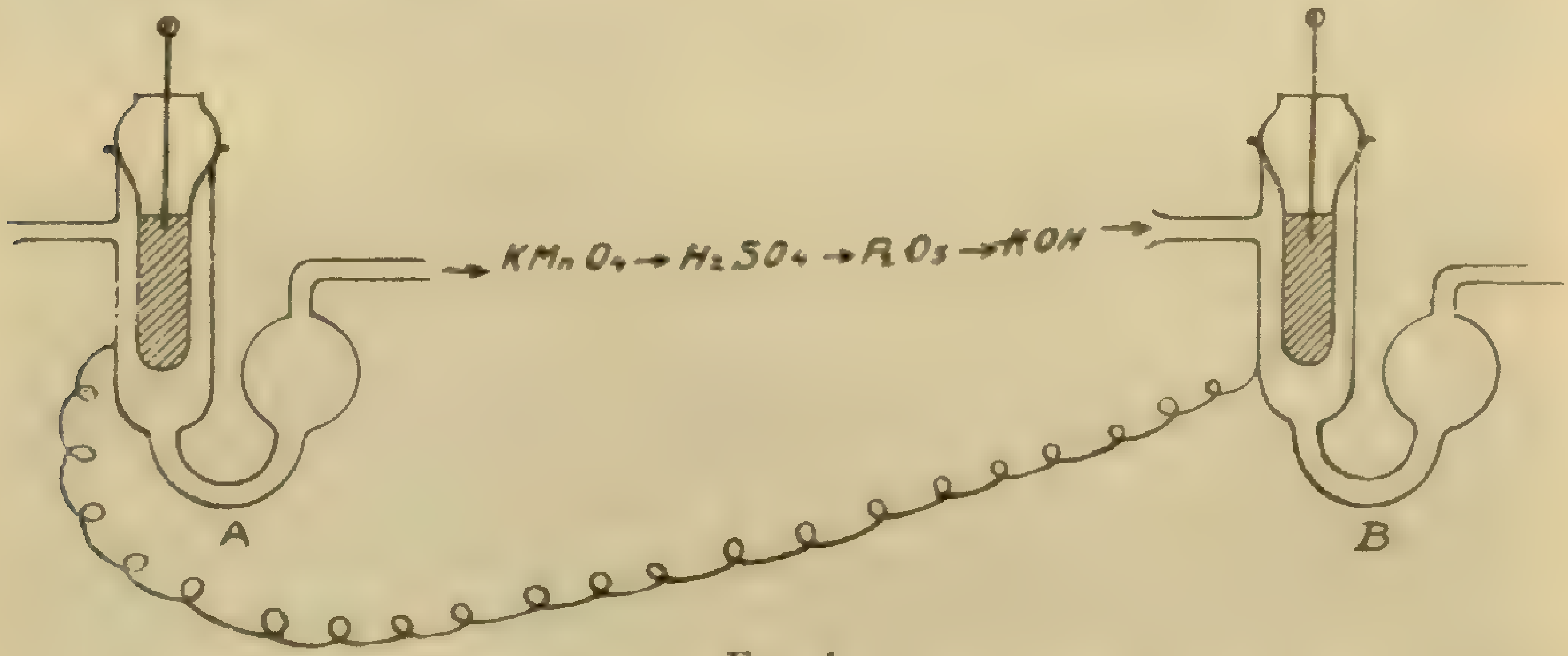

$\rightarrow KMnO_4 \rightarrow H_2SO_4 \rightarrow P_2O_5 \rightarrow KOH \rightarrow$
A
B

Fig. 1.

Cette partie contenait le liquide qui devait subir l'action de l'hydrogène activé; à la sortie du tube A le gaz était de nouveau lavé dans une solution capable d'enlever toute substance réductrice et ensuite séché par une solution d'acide sulfurique concentré, d'anhydride phosphorique, et par son passage sur une colonne de potasse caustique; il subissait alors à nouveau l'action de l'effluve dans un tube B, semblable au tube A.

Dans ces conditions, la solution diluée de permanganate de potasse contenue dans les tubes A et B se décolore rapidement. Un examen minutieux du phénomène démontre que la décoloration est due à la formation d'une quantité notable d'eau oxygénée.

Celle-ci se forme aux dépens de traces d'oxygène qui subsistaient dans l'hydrogène. En effet, par l'emploi d'hydrogène absolument pur, préparé par l'action de l'amalgame de sodium sur l'eau, et en utilisant pour le liquide de la cloche de l'eau bouillie additionnée d'acide pyrogallique, la solution de permanganate de potasse ne se décolore plus.

INFLUENCE DE LA COMPOSITION DU MÉLANGE

L'expérience a prouvé que si le mélange contient moins de 1 °/₀ d'oxygène, l'eau oxygénée se forme avec abondance.

Pour une teneur de 1 °/₀, en faisant agir l'effluve pendant 10 h., le débit du courant gazeux étant de 100 litres par heure, la titration de l'eau contenue dans le tube à boule exige 11 c. c. de solution $\frac{1}{100}$ normale de permanganate de potasse ; si le mélange gazeux contient 5 °/₀ d'oxygène, toutes les autres conditions de l'expérience restant les mêmes, la titration exige 17 c. c. de la solution.

Le rendement en eau oxygénée croît donc avec la teneur en oxygène, mais l'augmentation n'est pas proportionnelle.

A cause des dangers d'explosion on ne saurait accroître d'une façon sensible la quantité d'oxygène, à moins d'opérer dans un grand excès de ce gaz, par exemple 95 °/₀ d'oxygène et 5 °/₀ d'hydrogène. Dans ces conditions on ne titre plus que 0,18 c. c.

La quantité d'eau oxygénée formée est donc 100 fois moindre.

On aboutit à ce résultat paradoxal en apparence. L'eau oxygénée, corps riche en oxygène, se forme mieux dans un milieu réducteur !

L'explication de cette anomalie se trouvera peut-être dans le fait que, si l'on opère dans un milieu riche en oxygène, l'effluve forme d'assez grandes quantités d'ozone, et ce gaz détruit l'eau oxygénée avec formation d'oxygène et d'eau.

INFLUENCE DU DEGRÉ DE SICCITÉ DU MÉLANGE

Pour cette étude on utilise un dispositif analogue à celui représenté fig. 1.

Les appareils dessiccateurs placés devant le tube A avaient été supprimés, ceux placés entre A et B subsistaient.

A et B renfermaient repectivement 2,5 c. c. d'une solution de permanganate de potasse $\frac{1}{100}$ normale.

Les électrodes des tubes A et B étaient reliées en série, on avait ainsi la certitude de soumettre le mélange gazeux qui circulait dans les tubes à la même quantité d'énergie électrique.

En 3′45″ la solution de permanganate contenue en A fut décolorée, celle en B en 2′, 30″.

Il semble donc que l'eau oxygénée se forme en plus grande abondance dans les gaz secs.

On remarquera que le tube B se trouvait dans des conditions plus défavorables, une fraction de l'oxygène ayant déjà été fixée en A, et les précautions nécessaires ayant été prises pour ne pas laisser arriver jusqu'en B les traces d'eau oxygénée qui auraient pu s'échapper de A.

L'INFLUENCE DE LA LONGUEUR DU TRAJET PENDANT LEQUEL LES GAZ SONT SOUMIS A L'ACTION DE L'EFFLUVE ET DE LA DENSITÉ DU COURANT

Pour ces expériences on s'est encore servi d'un dispositif analogue à celui représenté fig. (1).

A et B contenaient respectivement 5 c. c. d'une solution normale de permanganate de potasse, la feuille d'étain formant l'électrode extérieure de B avait une longueur de 3 cm., celle de A 10 cm., les électrodes étaient reliées en série. La vitesse du courant gazeux était réglée de manière à donner un débit de 162 litres à l'heure environ.

Les deux solutions furent décolorées à peu près en même temps.

L'opération prolongée donna pour la titration des solutions contenues en A et B respectivement 12 c. c. et 10,3 c. c. de solution $\frac{1}{10}$ normale de permanganate.

Une autre expérience, où le tube A était remplacé par un tube de 30 centimètres de longueur et où le débit du courant gazeux était réduit à 40 litres environ, a donné, pour le tube A, 9,5 c.c. et pour B, 7,4 c. c.

Il faut déduire de ces expériences qu'il n'y a pas grand avantage à soumettre les gaz sur un long parcours à l'action de l'effluve et que cet avantage peut être compensé par une densité de courant plus favorable.

INFLUENCE DE LA PRESSION

Un robinet a été intercalé entre les tubes A et B, et la sortie du tube B reliée à une pompe à faire le vide.

Le robinet était réglé de manière à maintenir dans le tube B un vide partiel et constant ; un manomètre permettait de juger du degré de vide.

La pression était maintenue à $\frac{1}{3}$ d'atmosphère environ.

La titration donna pour le tube A 9 cc. et pour B 3,9. Un vide partiel semble donc défavorable à la formation de l'eau oxygénée.

INFLUENCE DE LA DISTANCE DES PAROIS

On a employé un dispositif analogue à celui représenté fig. (1), mais le diamètre du tube intérieur de B avait été réduit de manière à réaliser entre les parois une distance de 9 mm. environ.

La distance entre les parois dans A était de 3,5 mm. environ. Les armatures extérieures et intérieures de A et B avaient été reliées en série aux bornes du dispositif de Tesla. A et B contenaient dans leur partie inférieure 2,5. mm. d'une solution $\frac{1}{100}$ normale de permanganate de potasse. Le liquide contenu en A fut décoloré en 5′, celui en B en 2′ 15″. Après 10′ la titration du liquide en A a exigé 31,45 cc., celle du liquide en B 75 cc.

En intervertissant l'ordre des appareils on obtient :

Décoloration en B 5′ 30″, titration 82,6 cc. Sol. $\frac{1}{100}$ N.

Décoloration en A 7′, titration 40,3 Sol. $\frac{1}{100}$ N.

Une plus grande quantité d'eau oxygénée est donc formée dans le tube dont les parois sont les plus éloignées. Pourtant il faut tenir compte que la quantité totale d'électricité qui passe dans les tubes est la même, mais que la tension croît avec la distance des parois ; par conséquent l'énergie (c'est-à-dire le produit de la quantité d'électricité par la tension) varie d'un tube à l'autre. La tension électrique correspondant au passage de l'effluve dans les tubes a été déterminée approximativement au moyen d'un micromètre à étincelles. On trouve ainsi, en employant le courant de Tesla et un micromètre dont les sphères ont 10 mm. de diamètre, les distances explosives et les voltages correspondants.

DISTANCE DES TUBES CONCENTRIQUES

	3,5 mm.		9 cc.	
PRESSION	DISTANCES AU MICROMÈTRE	VOLTAGES	DISTANCES AU MICROMÈTRE	VOLTAGES
76	5	6342	2,9	10884
35	0,9	4227	1,1	4944
11	0,7	3497	1	4587

Il y a lieu de remarquer que si l'on fait les mêmes déterminations mais en employant un courant alternatif de 1502, on obtient des chiffres très différents :

76	3,5	13200	6,2	20000
35	2,1	8400	5,2	18000.

Les voltages correspondants aux distances sont empruntés aux travaux de Thomson, Mascaut et Baille ; ils ont été déterminés au moyen de l'électricité statique, c'est pourquoi les valeurs ne peuvent tout au plus être prises que comme indication.

Puisque les expériences ont été faites au moyen du courant de Tesla, nous prendrons les données relatives à ce courant. A la pression de 76 et pour les distances respectives de 3,5 et 9 mm., les quantités produites par unité d'énergie sont proportionnelles à $\frac{82}{Q \times 10884}$ et $\frac{40}{Q \times 6342}$. Ces valeurs sont dans le rapport $\frac{74}{63}$, le rendement pour la distance de 9 mm. est donc un peu supérieur, mais la différence est minime. Il n'en est pas de même lorsqu'on opère à la pression de 35 cm., en effet B est alors décoloré en 1′ et, après 10′, on titre 63,5 cc. A est décoloré en 5′ et titre 18,1 cc. après 10′.

Les rendements sont donc

$$\frac{63{,}5}{Q \times 4944} \qquad \frac{18}{Q \times 4227} \qquad \text{rapport } \frac{13}{4{,}5}$$

Le rendement est donc très supérieur pour la distance de 9 mm. Pour la pression de 11 cm on obtient pour

B 37,6 et pour A 32,8

rendements $\frac{37,6}{Q \times 4587}$ $\frac{32,8}{Q \times 3497}$ rapport $\frac{8}{9}$

Le rendement est donc supérieur pour la distance la moins grande. Il y a pourtant lieu de remarquer que la vitesse de circulation du mélange gazeux est d'autant plus faible que la pression est plus basse.

INFLUENCE DE LA POLARITÉ

En vue d'étudier les effets obtenus par l'électricité s'échappant des pointes reliées aux pôles d'une machine statique, et en particulier les effets de la polarité, nous avons utilisé le dispositif représenté fig. 2 ; il se composait de deux tubes A et B de 20 centimètres de longueur environ sur 3 de diamètre.

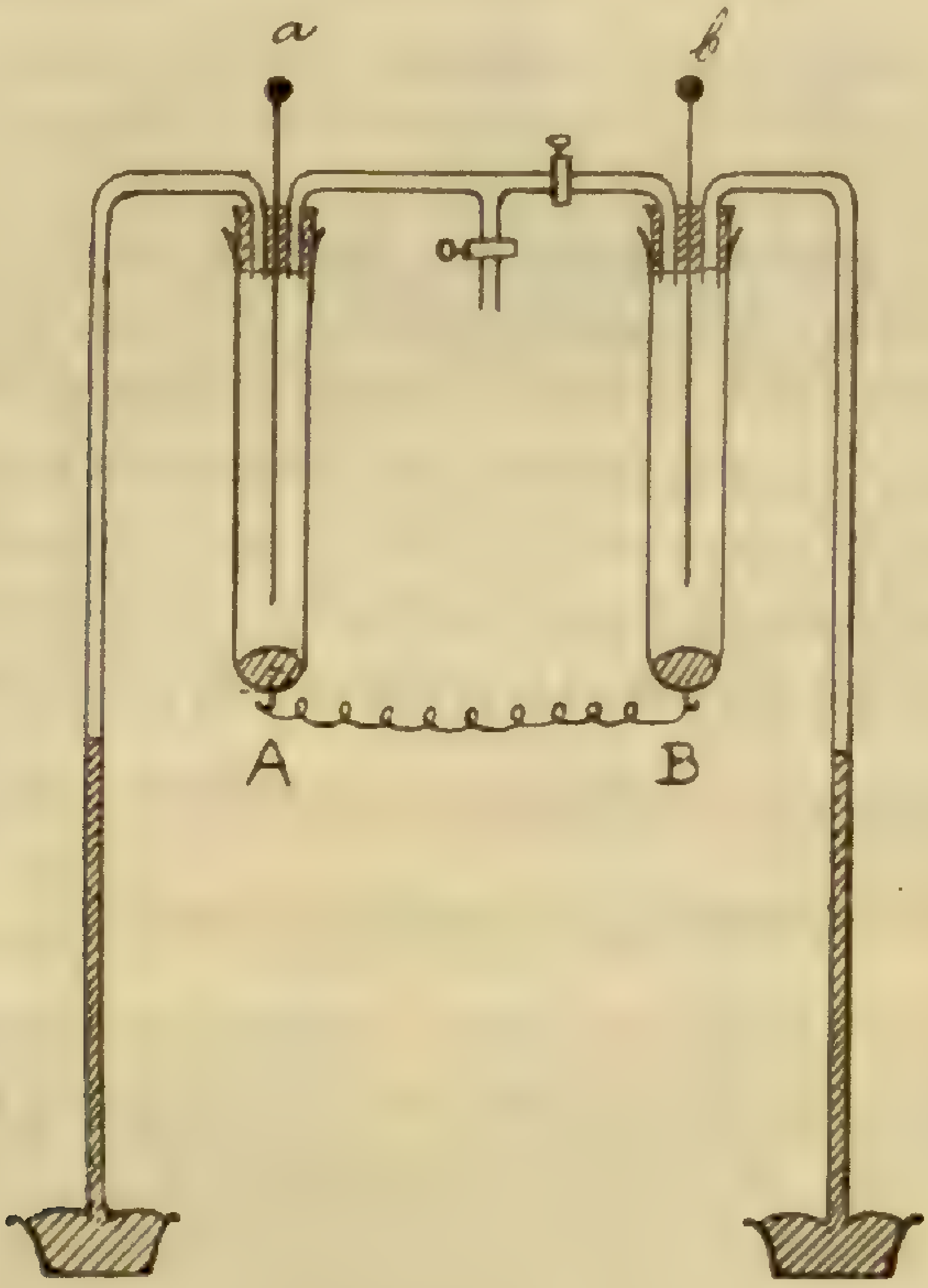


Fig. 2.

Les électrodes A et B étaient reliées aux pôles d'une machine statique. Les fils soudés à la partie inférieure des tubes étaient reliés entr'eux.

Les appareils communiquaient entr'eux par des tubes barométriques.

Dans chacun des tubes A et B, on avait introduit 20 cc. de solution de permanganate de potasse $\frac{1}{100}$ normale, et après avoir rempli l'appareil d'hydrogène contenant 3 à 5 % d'oxygène, on fit un vide partiel correspondant à la pression de 6 cm. de mercure. L'électricité s'échappait alors des pointes A et B et sous forme d'effluve et d'aigrettes.

Après une heure la solution du côté de la pointe négative fut complètement décolorée. Du côté de la pointe positive, le liquide comparé au liquide primitif n'avait subi qu'une décoloration de 50 % environ.

QUANTITÉ D'EAU OXYGÉNÉE FORMÉE PAR UNITÉ D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

Quelques expériences ont été faites avec des appareils de plus grandes dimensions en vue de déterminer la quantité d'eau oxygénée que l'on peut former par unité d'énergie électrique.

Comme l'indique la fig. 3, un certain nombre de tubes concentriques, d'une longueur de 10 cm. sur 3 de diamètre, se trouvaient disposés dans une cloche en verre, ces tubes étaient terminés par une partie effilée, longue d'environ 10 cm., ces parties effilées traversaient une cloison *cc* et plongeaient dans de l'eau distillée. Le mélange gazeux pénétrait dans la cloche en *a* et sortait en *b* après avoir subi l'action de l'effluve dans les tubes concentriques, et barboté dans l'eau distillée. L'ouverture des parties effilées des tubes était réglée de telle manière qu'approximativement la même quantité de gaz passait par chacun d'eux. Le mélange gazeux provenait d'une cloche, une pompe rotative aspirait le mélange et le refoulait dans la cloche après son passage au travers des appareils.

L'effluve électrique était obtenu par l'action d'un courant alternatif de haute tension. Un wattmètre mesurait la quantité d'énergie électrique employée.

Lors d'une première expérience, le mélange contenait 6 à 7 % d'oxygène, l'appareil fit explosion.

Il fut réparé et la proportion d'oxygène réduite à 2,5 %.

La surface couverte par l'effluve était de 15 décimètres carrés environ, l'énergie électrique employée de 100 W. et l'expérience fut prolongée pendant une heure. L'appareil contenait 100 cc. d'eau.

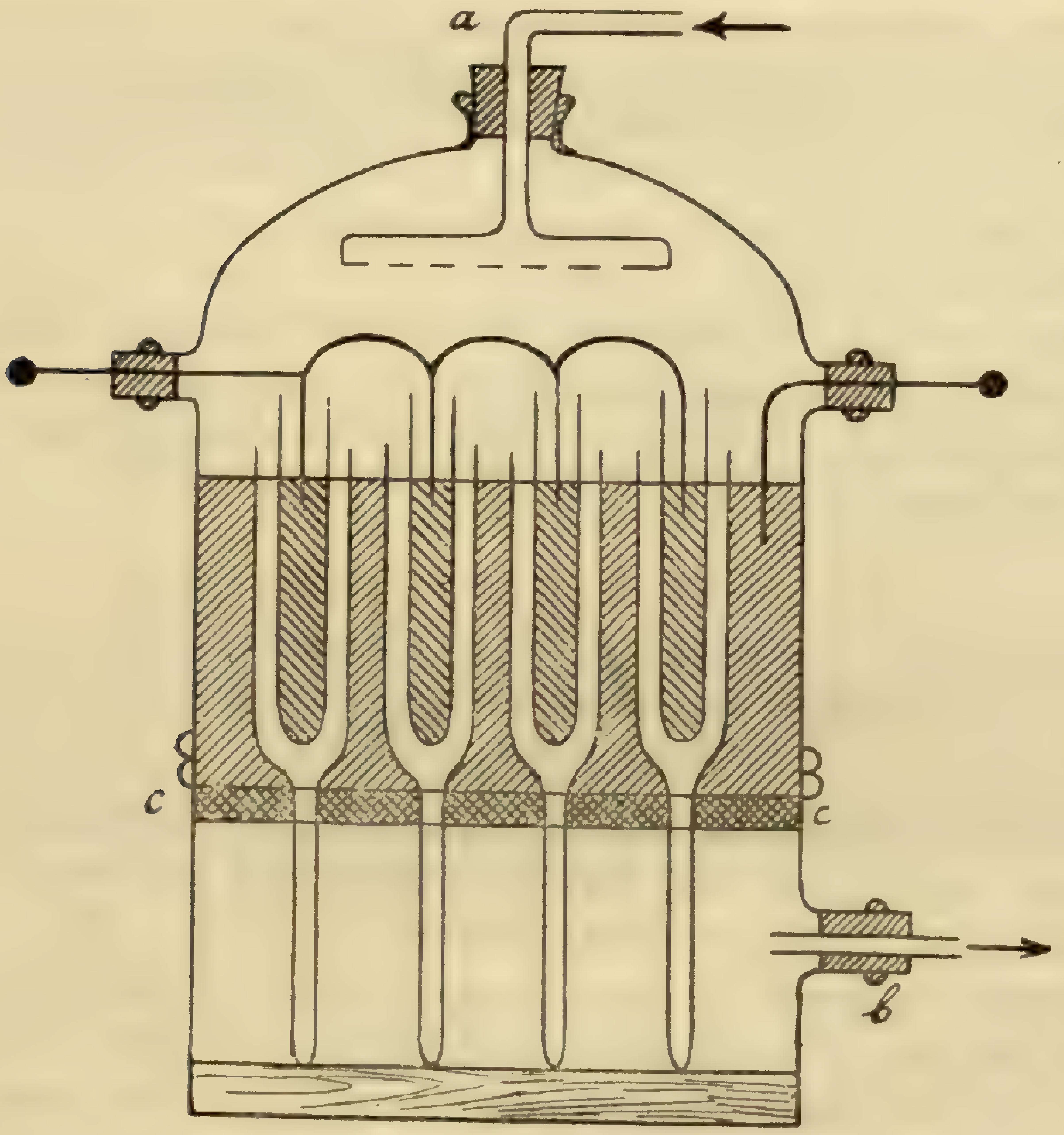


Fig. 3.

L'analyse décela 0,078 gr. d'eau oxygénée.

D'autres expériences furent faites en modifiant le dispositif précédent.

Les tubes concentriques furent remplacés par une série de plaques parallèles, et le mélange gazeux barbotait au sortir de l'appareil en verre dans une grande bouteille remplie d'eau distillée (fig. 4).

L'hydrogène renfermé dans la cloche contenait 3 °/₀ d'oxygène environ.

La hauteur des plaques était de 18 cm. et la surface couverte par l'effluve de 50 dc. carrés ; l'énergie électrique employée de 200 W.

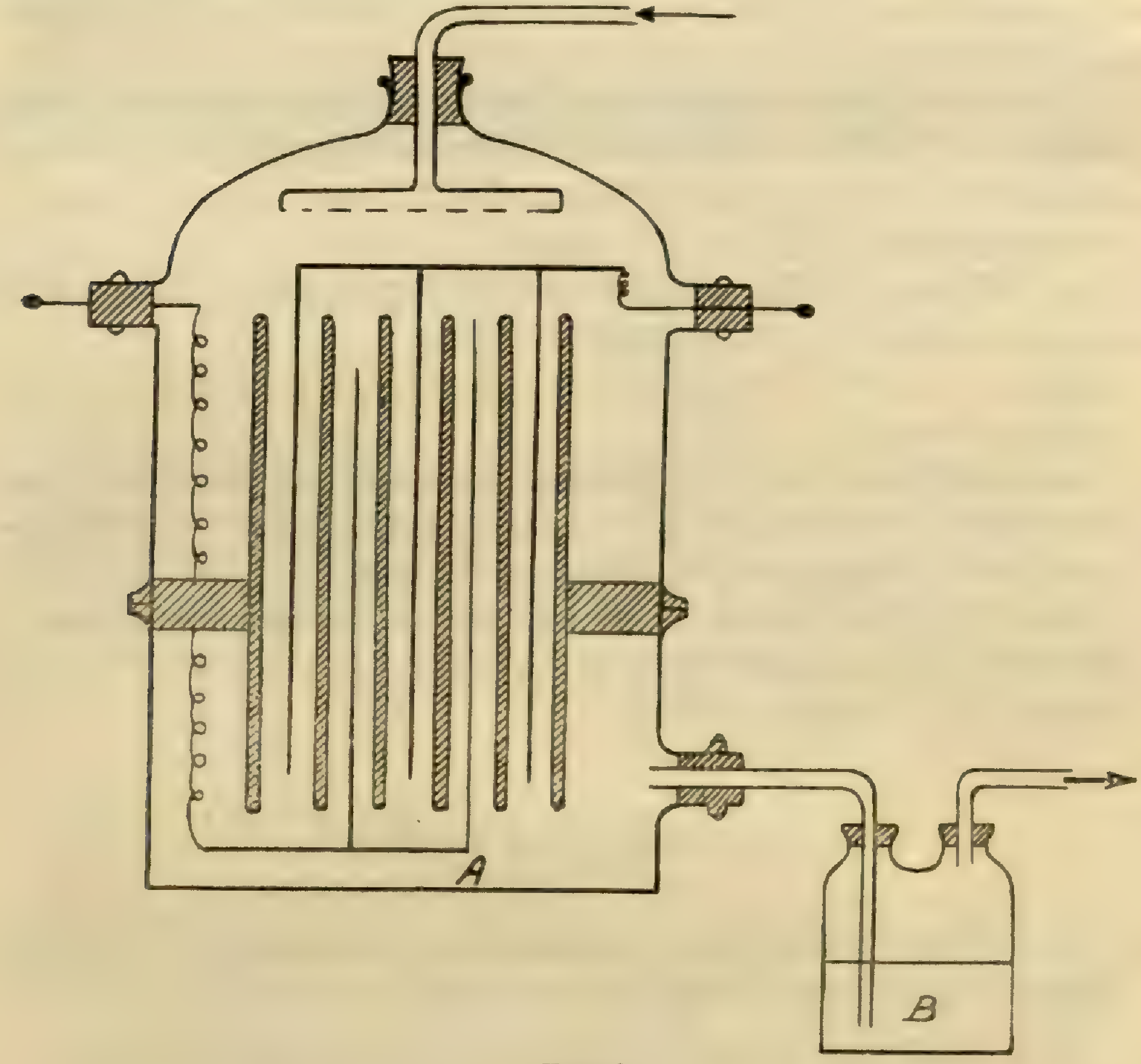


Fig. 4.

Le courant gazeux circulait avec une vitesse de débit de 300 litres à l'heure.

Au bout de 15 minutes, l'analyse de l'eau et des vapeurs condensées dans la cloche et les tuyauteries indiqua une teneur totale de 0,0456 gr. d'eau oxygénée.

L'échauffement des appareils limite la durée de l'expérience.

Celle que nous venons de décrire fut répétée dans les conditions suivantes : Durée de l'opération, 30 minutes, énergie électrique 180 watts.

Le mélange contenait avant l'expérience 3,1 % d'oxygène, après l'expérience cette quantité fut réduite à 2,88 %.

Dans la partie inférieure A de l'appareil on avait mis 100 cc. d'eau distillée.

L'analyse donna pour l'eau contenue en A 0,07956 gr. d'eau oxygénée et en B 0,1938 gr., soit en tout 0,273 gr., soit 3 gr. par kilowatt-heure.

Le volume gazeux contenu dans la cloche et les appareils était environ de 125 litres, soit environ 4 litres d'oxygène dont 250 cc. disparurent, soit en poids 0,357 gr. à 0,273 gr. d'eau oxygénée, correspondant à 0,257 gr. d'oxygène.

La différence 0,357 — 0,257 = 0,1 correspond à la quantité d'oxygène disparue par la formation d'eau.

Celle-ci est relativement petite comparée à la quantité d'eau oxygénée formée.

La répétition de cette expérience a donné des résultats d'une concordance remarquable étant données les difficultés expérimentales. On en jugera par les chiffres ci-dessous.

Durée de l'expérience : 30 minutes ; énergie électrique : 180 watts. Eau oxygénée trouvée : 0,239 gr. ; oxygène avant l'expérience : 3,4 % ; après : 3,2 %.

INFLUENCE DE LA PRESSION

Un robinet placé entre le gazomètre et l'appareil à effluve permet de maintenir dans l'appareil un vide relatif.

On a opéré ainsi à une pression de $\frac{1}{3}$ d'atmosphère environ.

L'expérience prolongée pendant 30 minutes, et l'énergie électrique étant de 130 watts, le rendement trouvé a été de 3 gr. par K. W. H., soit sensiblement le même que dans les cas précédents.

On notera que la vitesse du courant gazeux, qui était précédemment de 300 litres par heure, a été considérablement réduite par l'introduction du robinet.

DÉCHARGE PAR ÉTINCELLE

Ces expériences ont eu pour but d'établir une comparaison entre l'énergie électrique appliquée sous forme d'effluve et sous forme d'étincelle.

Le mélange gazeux circule dans deux appareils A et B (fig. 5), placés l'un à la suite de l'autre ; en A le mélange est soumis à l'action de l'effluve, en B à celui d'un faisceau d'étincelles éclatant entre deux électrodes formées de multiples pointes. Ces électrodes et celles du tube à effluve étaient reliées en série.

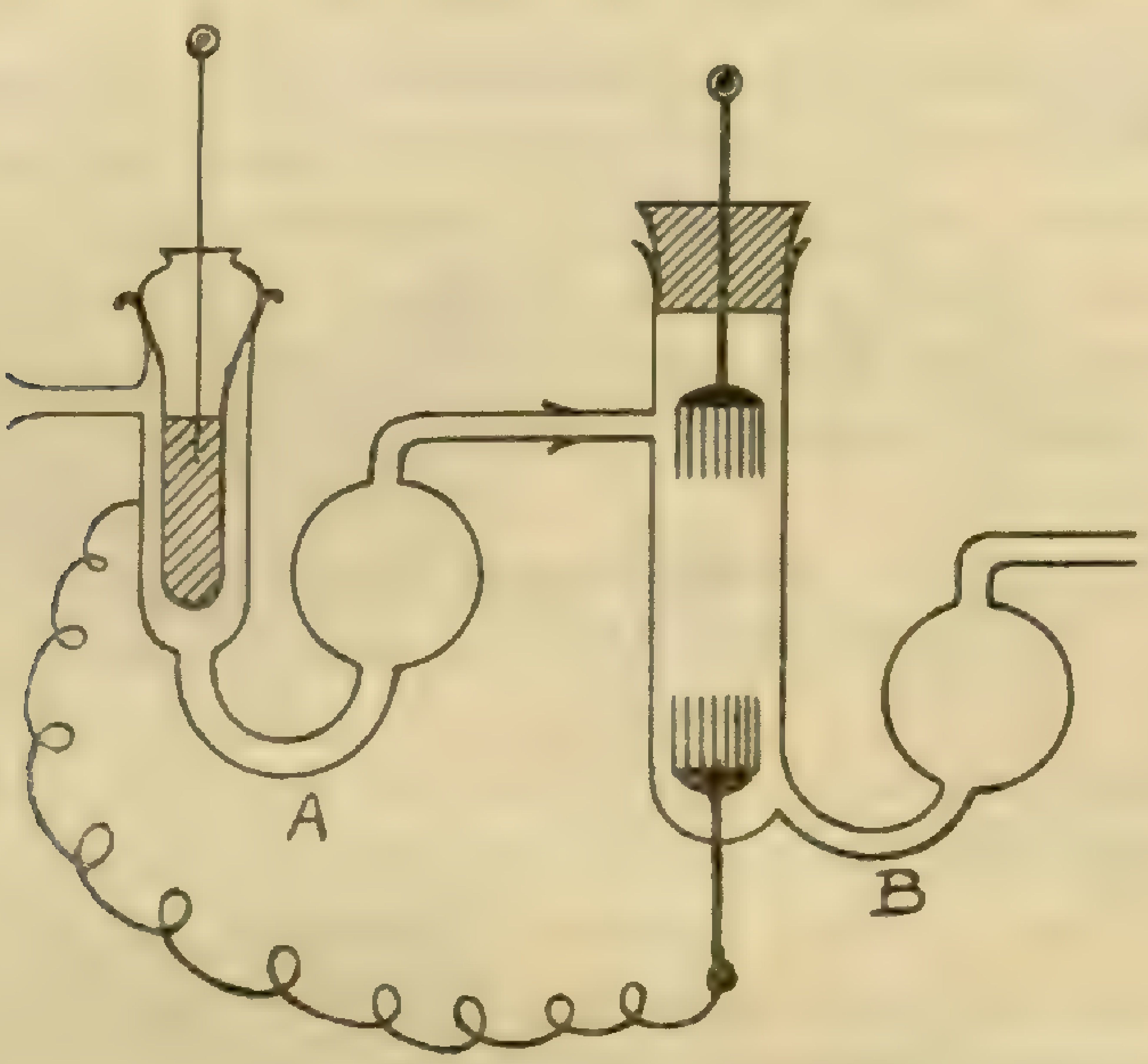


Fig. 5.

Si l'on met en A et B de l'eau distillée et que l'on titre après quelques minutes, le liquide recueilli dans A nécessite 1,4 cc. de solution $\frac{1}{100}$ normale et celui recueilli dans B 0,7.

L'expérience répétée mais en modifiant l'ordre des tubes de telle sorte que le gaz circule d'abord dans B, ensuite en A, confirme le résultat précédent : l'eau oxygénée se forme en plus grande abondance sous l'action de l'effluve.

FORMATION DE L'EAU OXYGÉNÉE SOUS L'INFLUENCE DES CORPS INCANDESCENTS

Un fil de platine long d'environ 5 centim., disposé dans une sphère en verre, était maintenu incandescent par un courant électrique (fig. 6).

Le mélange gazeux pénétrait dans la sphère et sortait par un orifice approprié.

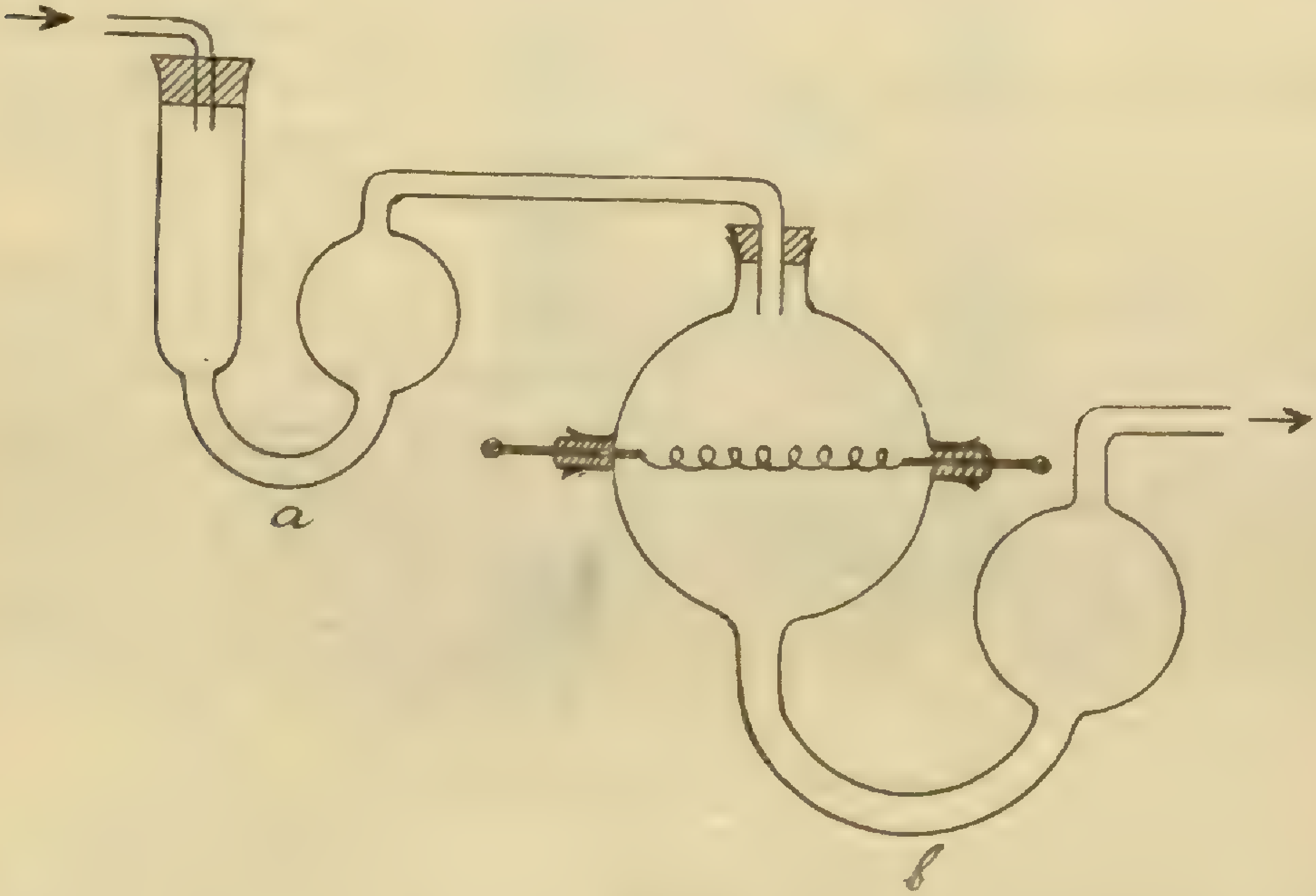


Fig. 6.

« A » est un tube barboteur témoin, servant à constater dans le mélange gazeux l'absence de produits réducteurs du permanganate.

A et B contenaient 2 cm. cubes d'une solution de potasse $\frac{1}{100}$ N., en 20 minutes la solution en B fut complètement décolorée, celle en A n'avait pas changé d'aspect.

Le mélange gazeux soumis pendant le même temps à l'action de l'effluve dans un des tubes déjà décrit, donne 50 fois plus d'eau oxygénée.

Cette expérience doit être considérée comme une expérience d'orientation.

Nous nous proposons de faire quelques recherches plus précises sur les rendements.

ACTION DES RAYONS X

Dans le dispositif décrit ci-dessus, la sphère en verre a été remplacée par un récipient en aluminium, et celui-ci soumis à l'action des rayons X.

L'expérience prolongée pendant 2 1/2 heures n'a donné aucun résultat, les liquides en A et B sont restés colorés.

L'action des rayons X semble donc être nulle.

Ces résultats confirment ceux que nous avons déjà obtenus en 1896, relativement à l'action chimique des rayons X.

A cette époque nous avons déjà constaté que même dans les conditions les plus favorables l'activité chimique des rayons X est faible ou nulle. Il faut en conclure que la conductivité communiquée aux gaz par l'action des rayons X est due à des ions et des électrons qui ne participent pas aux réactions chimiques.

ACTION DES RAYONS ULTRA-VIOLETS

L'arc obtenu dans un tube de quartz entre deux électrodes en mercure est une source très riche en rayons ultra-violets.

On fit agir ces rayons sur le mélange d'hydrogène et d'oxygène, celui-ci circulait dans un long tube en quartz transparent.

Immédiatement à la sortie du tube, les gaz barbotaient dans la solution de permanganate de potasse.

Si les précautions suffisantes étaient prises pour soustraire le liquide à l'action des rayons ultra-violets, il ne se décolorait pas. Il faut en conclure qu'aucune quantité appréciable d'eau oxygénée ne se forme dans le mélange gazeux soumis à l'action des rayons ultra-violets et que la formation du composé est principalement due aux effets de la décharge électrique ou à l'action des corps incandescents.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

L'effluve électrique agissant sur un mélange d'oxygène et d'hydrogène, produit de grandes quantités d'eau oxygénée, à la condition d'opérer dans un excès d'hydrogène.

L'opération semble s'effectuer plus favorablement dans les gaz secs.

Le rendement est influencé par la densité du courant, la distance des parois, la vitesse du courant gazeux et la pression à laquelle on opère.

On peut atteindre un rendement s'élevant à 3 gr. par K. W. H.

Étant données les conditions de l'opération, la quantité d'eau formée est relativement petite comparée à celle de l'eau oxygénée produite.

Dans les mêmes conditions l'étincelle ou l'action d'un fil incandescent produit également des quantités notables d'eau oxygénée.

Les rayons X et les rayons ultra-violets sont sans effet.

Nous croyons pouvoir déduire de ces expériences que l'eau oxygénée ne se forme certainement pas par oxydation de l'eau, mais qu'elle est le résultat de la juxtaposition directe d'une molécule d'hydrogène et d'oxygène.

Cette juxtaposition est obtenue par l'effet de l'effluve, de l'étincelle ou l'action d'un corps incandescent.

Sous l'action de ces agents, les électrons sont détachés des molécules, cette soustraction est en relation avec la mise en jeu des affinités chimiques.

L'activité communiquée semble peu durable, elle est probablement en relation avec le nombre d'électrons détachés et, par suite, avec la grandeur du potentiel de l'ion moléculaire; celui-ci, par suite du degré même du potentiel atteint, se sature très rapidement dans une atmosphère riche en électrons, et c'est sans doute pour ce motif que l'effluve, l'étincelle ou le corps incandescent doivent agir simultanément sur les deux gaz.

En terminant ce travail, je tiens à remercier mon assistant M. Stappers, pour le soin et le dévouement avec lesquels il m'a aidé durant mes recherches.

SUR LA MULTIPLICATION
DES
DÉTERMINANTS-PERMANENTS

PAR

MAURICE LECAT

---

1. On sait (¹) que le déterminant de classe (²) n

$$(\Delta)\quad \left| b_{i_1^{(1)},\,\ldots,\,i_{\tau_1}^{(1)};\,\ldots;\,i_1^{(s)},\,\ldots,\,i_{\tau_s}^{(s)};\,\omega_{T+1},\,\ldots,\,\omega_n} \cdot \prod_{\sigma=1}^{s} \delta_{i_1^{(\sigma)},\,\ldots,\,i_{\tau_\sigma}^{(\sigma)}} \right|^{(3)},$$

où l'on a posé

$$T \equiv \sum_{\sigma} \tau_\sigma$$

(nombre des indices groupés i), et dans lequel *l'indice fixe doit*

(¹) Voir L. Gegenbauer, DENKSCHRIFTEN AKADEMIE WIEN (Math.-naturwiss. Classe), tome LVII (1890), p. 735 et suivantes. — Les notations que nous utilisons ici sont plus simples que celles employées au nº 54 de nos *Leçons sur la théorie des déterminants à* n *dimensions*, Gand, Hoste, 1910. Cela tient à ce que nous supposons ici — ce qui évidemment ne diminue en rien la généralité des résultats — que les indices groupés i sont consécutifs. L'emploi, si commode, du symbole $\delta_{i,\,j,\,\ldots}$ de Kronecker rend, d'autre part, les notations plus expressives. — Profitons de l'occasion pour signaler les errata, trop nombreux, du début du nº 54 : p. 109, l. 3 ascend., ajouter : satisfont à une au moins des inégalités ; p. 110, l. 1, lire $+s$ au lieu de $-s$; l. 3, $+1$ au lieu de -1 ; l. 8, $\omega_\kappa^{(\sigma)}$ au lieu de $\omega_\kappa^{(\tau_\sigma)}$.

(²) L'ordre des matrices restant constant dans toute cette Note, il n'en sera pas question.

(³) Nous représentons simplement par $\omega_\alpha, \ldots, \omega_\beta$ l'ensemble des ω affectés successivement des indices α, β et des entiers compris entre α et β.

se trouver parmi les ω *si* n *est impair*, est égal à l'expression qui résulte d'un déterminant de classe

$$N \equiv n + s - \rho - T + \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$$

impaire, lorsqu'on remplace, dans ce déterminant, chaque terme par un certain permanent correspondant, à

$$g \equiv \rho + \frac{1-(-1)^{n}}{2}$$

dimensions, ρ désignant le nombre des valeurs paires des τ. Cette expression porte le nom de *déterminant-permanent* de *classe* N et de *genre g*. La quantité

$$C \equiv N + g - 1 = n - T + s,$$

puissance à laquelle il faut élever l'ordre pour avoir le nombre des éléments non nuls du déterminant donné, sera appelée la *classe complète* du déterminant-permanent (¹). Si $N = 1$, on a un permanent de classe g ; si $\rho = 0$, on obtient un déterminant de classe C.

2. Étant donné un déterminant-permanent défini par un déterminant (Δ), et caractérisé par sa classe N et son genre g, on peut se proposer de mettre ce déterminant-permanent sous forme d'un déterminant de même type (Δ), mais de classe n minima. Ainsi, pour donner un exemple, le déterminant à 7 dimensions et du second ordre (²)

(¹) C'est encore la classe de la matrice des éléments non nuls, laquelle peut être représentée comme suit :

$$\left\| bi^{(1)}, \ldots, i^{(s)} ; \omega_{s+1}, \ldots, \omega_{n-T+s} \right\|.$$

Elle ne suffit pas, évidemment, à définir le déterminant-permanent.

(²) Les points et les blancs remplacent des zéros. Les éléments non nuls sont représentés par leurs indices en nombre égal à 4, classe complète du déterminant-permanent.

$$\left| b_{i_1^{(1)},\, i_2^{(1)};\, i_1^{(2)},\, i_2^{(2)},\, i_3^{(2)};\, \omega_1,\, \omega_2} \cdot \delta_{i_1^{(1)},\, i_2^{(1)}} \cdot \delta_{i_1^{(2)},\, i_2^{(2)},\, i_3^{(2)}} \right| =$$

$$\left|\begin{array}{c|c||c|c||c|c||c|c}
1111\ . & & & & 1112\ . & & & \\
.\ 2111 & & & & .\ 2121 & & & \\
\hline
 & & & 1211\ . & & & & 1212\ . \\
 & & & .\ 2211 & & & & .\ 2212 \\
\hline\hline
1121\ . & & & & 1122\ . & & & \\
.\ 2121 & & & & .\ 2122 & & & \\
\hline
 & & & 1221\ . & & & & 1222\ . \\
 & & & .\ 2221 & & & & .\ 2222
\end{array}\right|,$$

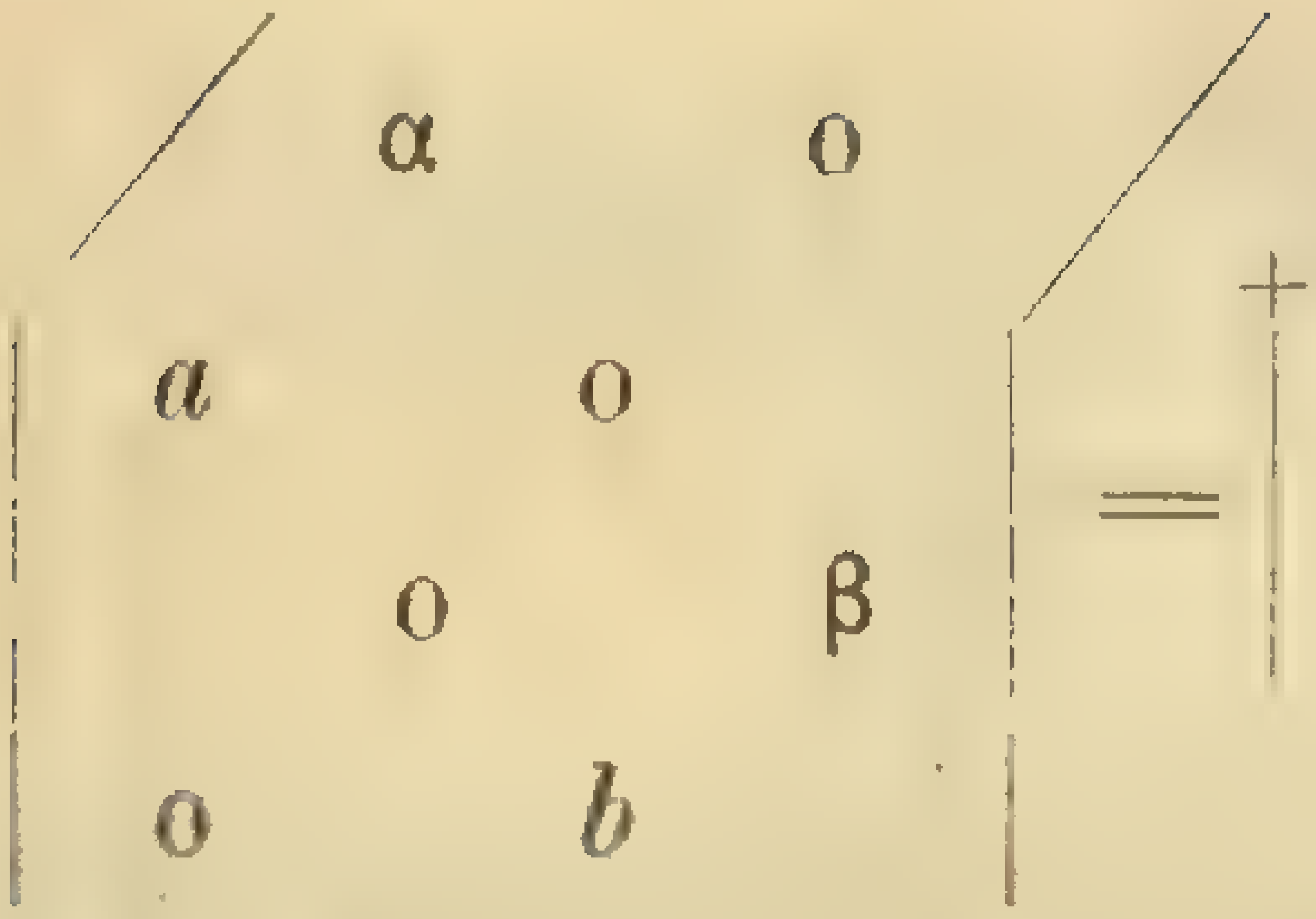
où le premier indice doit être dédoublé et le second détriplé, le troisième (ou le quatrième) étant l'indice fixe, est égal à un déterminant-permanent de même ordre, de classe 3 et de genre 2, déterminant-permanent (¹) qui peut encore être représenté par le déterminant suivant de classe 5 :

$$\left|\begin{array}{c|c||c|c}
1111\ . & 1211\ . & 1112\ . & 1212\ . \\
.\ 2111 & .\ 2211 & .\ 2112 & .\ 2212 \\
\hline
1121\ . & 1221\ . & 1122\ . & 1222\ . \\
.\ 2121 & .\ 2221 & .\ 2122 & .\ 2222
\end{array}\right|,$$

où le troisième indice (ou le quatrième) est fixe, le premier étant dédoublé. Un exemple plus simple, et pour lequel $N = 1$, est le suivant :

(¹) Il se calcule en remplaçant chaque terme du déterminant cubique $| i_1\ i_2\ i_3 |_2$, où l'indice fixe est i_2 (ou i_3), par le permanent ordinaire obtenu en juxtaposant un quatrième indice à gauche. Ainsi, le terme

$$221\ .\ 112 \quad \text{donne} \quad 1221\ .\ 2112 + 2221\ .\ 1112.$$



$$= \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix}^{+} = \left|\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & \beta \end{array}\right| ,$$

où le déterminant de droite peut être remplacé par celui de gauche, dont les strates sont parallèles au plan du papier. Tous deux sont égaux au permanent ordinaire des éléments non nuls.

Les expressions de N et de g montrent que la classe n la plus petite correspond au minimum de l'excès du nombre T des indices groupés sur le nombre s des groupes. Or, le nombre ρ des groupes renfermant un nombre pair d'indices est donné. On voit ainsi que le minimum cherché est $N + 2g - 2$, étant réalisé en prenant $g - 1$ couples d'indices i et N indices non groupés ϵ comprenant l'indice fixe. On obtient ainsi le type suivant :

$$(\Delta_1) \qquad \left| b_{i_1^{(1)},\, i_2^{(1)};\, \dots;\, i_1^{(g-1)},\, i_2^{(g-1)};\, \epsilon_1,\, \dots,\, \epsilon_N} \prod_{\theta=1}^{g-1} \delta_{i_1^{(\theta)},\, i_2^{(\theta)}} \right| ,$$

déterminant de classe impaire. En prenant g groupes de deux indices, et $N - 1$ indices isolés, ce qui réalise le déterminant

$$(\Delta_2) \qquad \left| b_{i_1^{(1)},\, i_2^{(1)};\, \dots;\, i_1^{(g)},\, i_2^{(g)};\, \epsilon_1,\, \dots,\, \epsilon_{N\;1}} \prod_{\mu=1}^{g} \delta_{i_1^{(\mu)},\, i_2^{(\mu)}} \right| ,$$

on obtient la classe impaire minima : $N + 2g - 1$ (minimum relatif (¹).

Le passage d'un déterminant (Δ) à ces deux formes *canoniques* (Δ_1) et (Δ_2), se fait en remplaçant chaque groupe d'un nombre impair d'indices par un indice isolé, et chaque groupe d'un nombre pair (> 2) d'indices par un groupe de deux indices. Cette

---

(¹) En prenant $n > N + 2g - 1$, les groupes pouvant comporter plus de deux indices, le nombre des déterminants représentant le même déterminant-permanent, croît rapidement avec n ; la recherche de ce nombre est une question d'analyse combinatoire aisée à résoudre et qui, d'ailleurs, n'offre guère d'intérêt à notre point de vue.

opération conserve la parité de la classe. Si la classe est paire [Δ_2], on pourra remplacer l'un de ces groupes par un indice isolé qui deviendra l'indice fixe du nouveau déterminant de classe impaire [Δ_1]. La réciproque est évidente : étant donné un déterminant (Δ_1), si l'on y remplace l'indice fixe (isolé) par un groupe (nouveau) de deux indices, (Δ_1) prend la forme (Δ_2), où il ne sera plus question d'indice fixe, puisque la classe est devenue paire.

Observons encore qu'un déterminant-permanent de classe N a N valeurs distinctes suivant la position de l'indice fixe du déterminant de classe impaire qui le représente, ou suivant l'indice isolé (fixe) qui est dédoublé pour obtenir un déterminant de classe paire (1).

3. De ce qui précède, il résulte que la multiplication des déterminants-permanents peut se faire en effectuant les produits de déterminants (Δ_1) entre eux, de (Δ_2) entre eux ou de (Δ_1) par (Δ_2) (2). Il y a toutefois des précautions à prendre. En effet, on ne peut exprimer le produit de deux déterminants de classes r et s, sous forme d'un déterminant de classe $r + s - 2$ (à éléments polynomes), que si r et s ne sont pas tous deux impairs (3) ; au

---

(1) Nous supposons, bien entendu, que les éléments non nuls sont quelconques. Si des (tous les) indices non groupés ϵ étaient permutables entre eux, le nombre des valeurs distinctes du déterminant-permanent serait inférieur à N (serait égal à l'unité, le déterminant étant alors *uniforme*).

(2) La multiplication des déterminants (Δ) est, en réalité, aussi aisée que celle de (Δ_1) ou (Δ_2) ; mais les notations sont plus compliquées et ne satisfont pas aux exigences typographiques.

(3) C'est à A. Cayley (1843), qu'on doit la découverte de cette restriction, d'ailleurs évidente *a priori* si l'on songe au rôle de l'indice fixe. H. W. L. Tanner (1879) retrouve la loi sans reconnaître l'exception. R. F. Scott (1880) l'énonce de même. W. Zajaczkowski (1881) signale et démontre l'erreur de Scott. L. Gegenbauer (1882, 1893), ignorant Cayley et Zajaczkowski, démontre la loi du produit sans observer la restriction et l'utilise (1883, 1890, 1892) dans divers travaux. Plus récemment, A. Calegari (1902) et R. von Sterneck (1910) ont versé dans la même erreur et leurs recherches ne sont valables qu'en dehors du cas d'exception. Les deux Notes que nous avons insérées dans ces ANNALES [1911, pp. 74/8, 122/5] ne font aucune allusion au cas où les classes des déterminants à multiplier sont impaires. Cela n'était pas nécessaire pour la première de ces communications, mais nous aurions pu en profiter pour montrer que la théorie de Gegenbauer sur les déterminants adjoints est inexacte à un second titre ; quant à la seconde communication, il est nécessaire d'y ajouter la condition que ν soit impair.

contraire, il est toujours possible d'exprimer le produit sous forme d'un déterminant de classe $r+s-1$ (à éléments monomes). Appelons ces deux lois, première et seconde règles. Rappelons brièvement que :

1) si l'on applique la première règle, on peut écrire

$$\sum_{\rho} b_{\rho,\, \sigma_1,\, \dots,\, \sigma_{r-1}}\, h_{\rho,\, \sigma_r,\, \dots,\, \sigma_{r+s-2}},$$

pour l'élément général du déterminant exprimant le produit des déterminants des b et des h, ρ *n'étant pas* l'indice fixe là où le nombre des indices est impair ;

2) si l'on utilise la seconde règle, l'élément du déterminant produit s'écrira :

$$b_{i_1,\, \dots,\, i_r} \cdot h_{i_1,\, i_{r+1},\, \dots,\, i_{r+s-1}},$$

l'indice i_1 *devant être* l'indice fixe là où la classe est impaire ;

3) la restriction relative à la position de l'indice fixe, soulignée au début de cette Note, est fondamentale pour ce qui suit.

4. Étudions d'abord le produit des déterminants-permanents à l'aide de la première règle et prenons en premier lieu le produit de (Δ_2) par un déterminant

$$(\Delta'_2) \qquad \left| h_{j_1^{(1)},\, j_2^{(1)};\, \dots;\, j_1^{(\gamma)},\, j_1^{(\gamma)};\, \omega_1,\, \dots,\, \omega_{M-1}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{\gamma} \delta_{j_1^{(\alpha)},\, j_2^{(\alpha)}} \right|$$

de même forme. Choisissons $i_1^{(1)} = j_1^{(1)}$ pour indice auquel s'applique le signe sommatoire (1) ; on obtient ainsi le déterminant :

$$\left| \sum_{i_1^{(1)}} b_{i_1^{(1)},\, i_2^{(1)};\, \dots;\, i_1^{(g)},\, i_2^{(g)};\, \epsilon} \cdot \prod_{\mu=1}^{g} \delta_{i_1^{(\mu)},\, i_2^{(\mu)}} \,. \right.$$

$$\left. \cdot\, h_{i_1^{(1)},\, j_2^{(1)};\, j_1^{(2)},\, j_2^{(2)};\, \dots;\, j_1^{(\gamma)},\, j_2^{(\gamma)};\, \omega} \cdot \delta_{i_1^{(1)},\, j_2^{(1)}} \cdot \prod_{\alpha'=2}^{\gamma} \delta_{j_1^{(\alpha')},\, j_2^{(\alpha')}} \right|$$

---

(1) Le cas où l'on choisirait l'un quelconque des i et l'un quelconque des j, ne serait pas distinct de celui du texte.

de classe $N + M + 2g + 2\gamma - 6$, où ϵ et ω sont mis respectivement pour $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{N-1}$ et $\omega_1, \ldots, \omega_{M-1}$. Une transformation des symboles de Kronecker permet d'écrire ce déterminant comme suit :

$$\left| b_{\dot{i}^{(1)}_2,\, \dot{i}^{(1)}_2;\, \dot{i}^{(2)}_1,\, \dot{i}^{(2)}_2;\, \ldots;\, \dot{i}^{(g)}_1,\, \dot{i}^{(g)}_2;\, \epsilon} \cdot h_{\dot{i}^{(1)}_2,\, \dot{j}^{(1)}_2;\, \dot{j}^{(2)}_1,\, \dot{j}^{(2)}_2;\, \ldots;\, \dot{j}^{(\gamma)}_1,\, \dot{j}^{(\gamma)}_2;\, \omega} \cdot \delta_{\dot{i}^{(1)}_2,\, \dot{j}^{(1)}_2} \cdot \prod_{\mu'=2}^{g} \delta_{\dot{i}^{(\mu')}_1,\, \dot{i}^{(\mu')}_2} \prod_{\alpha'=2}^{\gamma} \delta_{\dot{j}^{(\alpha')}_1,\, \dot{j}^{(\alpha')}_2} \right|,$$

les éléments devenant monomes. Le schéma

$$\left(\begin{array}{l} \dot{i}^{(1)}_2 ;\ \overgroup{\dot{i}^{(2)}_1 ,\ \dot{i}^{(2)}_2} ;\ \ldots ;\ \overgroup{\dot{i}^{(g)}_1 ,\ \dot{i}^{(g)}_2} ;\ \epsilon \\[2ex] \dot{j}^{(1)}_2 ;\ \undergroup{\dot{j}^{(2)}_1 ,\ \dot{j}^{(2)}_2} ;\ \ldots ;\ \undergroup{\dot{j}^{(\gamma)}_1 ,\ \dot{j}^{(\gamma)}_2} ;\ \omega \end{array} \right.$$

des indices du déterminant montre que ce dernier est égal à un déterminant-permanent à éléments monomes et de genre $g + \gamma - 1$. Quant aux classe et classe complète du produit, elles s'obtiennent très aisément et nous pourrons nous dispenser d'en parler. La classe complète est égale, en général, à la somme des classes complètes des facteurs, diminuée d'une ou de deux unités suivant que les éléments du déterminant produit sont monomes ou polynomes. Il suffit de savoir lequel de ces deux cas se présente et de connaître le genre, pour avoir immédiatement la classe.

5. Prenons maintenant $\dot{i}^{(1)}_1 = \omega_1$ (¹) comme indice soumis au signe sommatoire ; cela exige évidemment que $M \geq 3$, c'est-à-dire que le déterminant-permanent des h ne se réduise pas à un simple permanent. En faisant disparaître, comme précédemment, le signe sommatoire, on voit que le produit peut s'écrire :

(¹) Ou, plus généralement, l'un des i égal à l'un des ω ; ou même l'un des j égal à l'un des ϵ.

$$\left| b_{i_2^{(1)}, i_2^{(1)}; i_1^{(2)}, i_2^{(2)}; \ldots; i_1^{(g)}, i_2^{(g)}; \epsilon} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, h_{j_1^{(1)}, j_2^{(1)}; \ldots; j_1^{(\Upsilon)}, i_2^{(\Upsilon)}; i_2^{(1)}, \omega_2, \ldots, \omega_{M-1}} \cdot \prod_{\mu'=2}^{g} \delta_{i_1^{(\mu')}, i_2^{(\mu')}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{\Upsilon} \delta_{j_1^{(\alpha)}, j_2^{(\alpha)}} \right|,$$

et l'on arrive à la même conclusion que plus haut.

Mais si $\epsilon_1 = \omega_1$ (¹) est choisi comme indice auquel s'applique le signe sommatoire, ce qui exige que $M, N \geqslant 3$, on obtient le déterminant

$$\left| \sum_{\epsilon_1} b_{i_1^{(1)}, i_2^{(1)}; \ldots; i_1^{(g)}, i_2^{(g)}; \epsilon} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, h_{j_1^{(1)}, j_2^{(1)}; \ldots; j_1^{(\Upsilon)}, j_2^{(\Upsilon)}; \epsilon_1, \omega_2, \ldots, \omega_{M-1}} \cdot \prod_{\mu=1}^{g} \delta_{i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}} \prod_{\alpha=1}^{\Upsilon} \delta_{j_1^{(\alpha)}, j_2^{(\alpha)}} \right|,$$

à éléments polynomes, représentant un déterminant-permanent de genre $g + \Upsilon$.

6. En ce qui concerne le produit $(\Delta)_1 \cdot (\Delta'_2)$, il faut bien observer que la classe en est impaire. On trouve, en appliquant le signe Σ à l'indice $i_1^{(1)} = j_1^{(1)}$, ou à $i_1^{(1)} = \omega_1$ (ceci exigeant $M \geqslant 3$), ou encore à $j_1^{(1)} = \epsilon_1$ (¹) ($N \geqslant 3$), que le produit est à éléments monomes et que le déterminant-permanent qu'il représente est de genre $g + \Upsilon - 1$.

Si le signe sommatoire est affecté de l'indice $\epsilon_1 = \omega_1$ (²) (ce qui nécessite $M, N \geqslant 3$), les éléments du produit sont polynomes et le genre est $g + \Upsilon$.

7. En résumé, *si l'on utilise la loi du produit de deux déterminants de classes* r *et* s, *sous forme d'un déterminant de classe* r + s — 2, *on peut mettre le produit de deux déterminants-per-*

(¹) Ou l'un des ϵ égal à un quelconque des ω.

(²) Ou un ϵ quelconque, mais différent de l'indice fixe, égal à un quelconque des ω.

manents de genres g *et* γ *sous forme d'un déterminant-permanent de genre* $g+\gamma$ *ou* $g+\gamma-1$ *suivant que le déterminant-produit est à éléments polynomes ou monomes. Dans le premier cas, il faut que les facteurs ne se réduisent pas à de simples permanents ; cette condition peut ne pas être remplie même pour un seul des déterminants-permanents, si le genre du produit est* $g+\gamma-1$.

8. Un permanent étant un déterminant-permanent de classe $N=1$, il suffirait de faire $N=1$, $M=1$ dans les raisonnements précédents, pour obtenir diverses formes du produit de deux permanents. On retrouverait ainsi la seconde règle, applicable aux permanents.

Étudions directement le produit d'un nombre quelconque de permanents en les mettant sous forme de déterminants de classes paires (¹), et démontrons, en appliquant toujours la première loi, que la seconde règle, généralisée au cas du produit de plusieurs facteurs, est vraie pour les permanents (²). Considérons donc le produit

$$(\mathrm{P})\quad \prod_{\sigma=1}^{s} \mathrm{P}_\sigma \equiv \left| \prod_{\sigma} b^{(\sigma)}_{\omega_1^{(\sigma)},\, j_1^{(\sigma)};\, \ldots\, ;\, \omega_{n_\sigma}^{(\sigma)},\, j_{n_\sigma}^{(\sigma)}} \,.\, \prod_{\nu_\sigma=1}^{n_\sigma} \delta_{\omega_{\nu_\sigma}^{(\sigma)},\, j_{\nu_\sigma}^{(\sigma)}} \right| ;$$

et prenons d'abord $\mathrm{P}_1 \,.\, \mathrm{P}_2$. Si l'on applique le signe sommatoire à $\omega_1^{(1)}=\omega_1^{(2)}$ et remplace ensuite cet indice par $j_1^{(1)}$ en faisant disparaître Σ et transformant convenablement les symboles de Kronecker, on pourra écrire le déterminant :

$$\left| b^{(1)}_{j_1^{(1)},\, j_1^{(1)};\, \omega_2^{(1)},\, j_2^{(1)};\, \ldots\, ;\, \omega_{n_1}^{(1)},\, j_{n_1}^{(1)}} \,.\, b^{(2)}_{j_1^{(1)},\, j_1^{(2)};\, \omega_2^{(2)},\, j_2^{(2)};\, \ldots\, ;\, \omega_{n_2}^{(2)},\, j_{n_2}^{(2)}} \,.\right.$$
$$\left. .\, \delta_{j_1^{(1)},\, j_1^{(2)}} \,.\, \prod_{\nu'_1=2}^{n_1} \delta_{\omega_{\nu'_1}^{(1)},\, j_{\nu'_2}^{(1)}} \,.\, \prod_{\nu'_2=2}^{n_2} \delta_{\omega_{\nu'_2}^{(2)},\, j_{\nu'_2}^{(2)}} \right| .$$

(¹) L. Gegenbauer, mettant deux permanents sous forme de déterminants de classes impaires, effectue leur produit par la première règle, ce qui est illégitime. Il trouve ainsi que le produit de deux permanents de classes r et s est un déterminant-permanent cubique et de genre $r+s-3$, les éléments étant monomes. Cela n'est pas exact.

(²) Cette démonstration est donnée pour deux facteurs, et avec d'autres notations, dans nos *Leçons*, p. 71, remarque.

Si l'on multiplie ce produit par P_3, en appliquant le nouveau signe sommatoire à $j_1^{(1)}$, on pourra encore faire disparaître ce signe, en remplaçant $j_1^{(1)}$ par $j_1^{(2)}$, ce qui donne :

$$\left| b^{(1)}_{j_1^{(2)}, j_1^{(2)}; \omega_2^{(1)}, j_2^{(1)}; \dots} \cdot b^{(2)}_{j_1^{(2)}, j_1^{(2)}; \omega_2^{(2)}, j_2^{(2)}; \dots} \cdot b^{(3)}_{j_1^{(2)}, j_1^{(3)}; \omega_2^{(3)}, j_2^{(3)}; \dots} \cdot \delta_{j_1^{(2)}, j_1^{(3)}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{3} \prod_{\nu'_\alpha=2}^{n'_\alpha} \delta_{\omega^{(\alpha)}_{\nu'_\alpha}, j^{(\alpha)}_{\nu'_\alpha}} \right|.$$

La loi de formation des produits successifs devient, dès à présent, évidente. Le produit (P) peut se mettre sous forme d'un déterminant de classe $2(1 - s + \Sigma n_\sigma)$, obtenu en remplaçant dans le suivant :

$$\left| \prod_{\sigma=1}^{s} b^{(\sigma)}_{j_1^{(\sigma)}, j_1^{(\sigma)}; \omega_2^{(\sigma)}, j_2^{(\sigma)}; \dots; \omega^{(\sigma)}_{n_\sigma}, j^{(\sigma)}_{n_\sigma}} \cdot \delta_{j_1^{(s-1)}, j_1^{(s)}} \cdot \prod_{\nu'_\sigma=2}^{n_\sigma} \delta_{\omega^{(\sigma)}_{\nu'_\sigma}, j^{(\sigma)}_{\nu'_\sigma}} \right|,$$

$j_1^{(\sigma)}$ par $j_1^{(s-1)}$, pour $\sigma = 1, \dots, s-1$. En repassant de ce déterminant au permanent qui lui est égal, et que nous pourrons nous dispenser d'écrire, on voit ce qui était annoncé.

9. Quant au produit

$$\overset{+}{\Big|}\, b_{i_1, \dots, i_r} \,\overset{+}{\Big|} \cdot \Big| h_{j_1, \dots, j_s} \Big|$$

d'un permanent par un déterminant, il pourrait, lui aussi, être considéré comme cas particulier du produit de deux déterminants-permanents : il suffirait de faire $N = 1$ dans l'un d'eux et $\rho = 0$ dans l'autre. Mais il est aussi simple d'opérer directement en mettant le permanent sous forme d'un déterminant de classe $2r$, ou, si s est pair, sous forme d'un déterminant de classe $2r-1$. Dans le second cas, par exemple, on aura, après suppression du signe sommatoire (qui ne peut s'appliquer à l'indice fixe α) :

$$\left| \begin{matrix} b_{\alpha\,;\,\omega_2^{(1)},\,\omega_2^{(1)}\,;\,\omega_1^{(2)},\,\omega_2^{(2)}\,;\,\dots\,;\,\omega_1^{(r-1)},\,\omega_2^{(r-1)}} \,. \\ \\ h_{\omega_2^{(1)}\,;\,j_2,\,\dots,\,j_s} \,.\, \prod_{\rho=2}^{r-1} \delta_{\omega_1^{(\rho)},\,\omega_2^{(\rho)}} \end{matrix} \right| .$$

Sous l'autre forme, on obtiendrait également un déterminant à éléments monomes.

En combinant ces deux formes, on voit que *le produit d'un permanent de classe* r *par un déterminant de classe* s *est un déterminant-permanent de genre* r *ou* r $-$ 1 *suivant que* s *est impair ou pair.*

10. Jusqu'à présent nous n'avons encore appliqué que la première règle de multiplication. Recherchons maintenant, en utilisant la seconde règle, le genre du déterminant-permanent exprimant le produit de deux déterminants-permanents. Les opérations sont simplifiées par l'absence de signe sommatoire.

Si l'on multiplie deux déterminants du type (Δ_1), il faut faire l'un des ϵ égal à un des ω ; la classe du déterminant produit étant impaire comme celles des déterminants facteurs, on voit que le genre est $g + \Upsilon - 1$.

S'il s'agit du produit de deux déterminants de type (Δ_2), on pourra faire $\epsilon = \omega$ (c'est-à-dire l'un des ϵ égal à l'un des ω) si $M \ngeq 3$, $N \ngeq 3$, ce qui conduira, la classe du déterminant-produit étant impaire, au genre $g + \Upsilon + 1$; comme à l'alinéa précédent, on ne pourra prendre ni $i = \omega$ — car l'indice fixe du déterminant produit se trouverait dans un groupe — ni $i_1^{(1)} = j_1^{(1)}$, car l'indice fixe se trouverait dans le groupe

$$i_1^{(1)},\ i_2^{(1)},\ j_2^{(1)},$$

introduit par le fait même.

Pour le produit d'un déterminant (Δ_1) par un déterminant (Δ_2), on pourra faire $\epsilon = \omega$ si $\mathrm{M} \geqslant 3$, ou $\epsilon = j$; dans les deux cas, on trouvera que le genre est $g + \Upsilon - 1$.

11. En résumé : *Si l'on utilise la loi du produit de deux déterminants de classes* r *et* s, *sous forme d'un déterminant de classe* $\mathrm{r} + \mathrm{s} - 1$, *on pourra mettre le produit de deux déterminants-permanents de genres* g *et* Υ *sous forme d'un déterminant-permanent de genre* $\mathrm{g} + \Upsilon \pm 1$ *; dans le premier cas, il faut qu'aucun des facteurs ne se réduise à un permanent.*

En combinant les deux résultats, on voit que : *les genres des diverses formes du produit de deux déterminants-permanents de genres* g *et* Υ *sont* $\mathrm{g} + \Upsilon + 1$, $\mathrm{g} + \Upsilon$, $\mathrm{g} + \Upsilon - 1$; *les deux premiers ne sont réalisables que pour des déterminants-permanents proprement dits ; les éléments sont polynomes si le genre est* $\mathrm{g} + \Upsilon$ (¹).

(¹) On voit aisément que (Δ) généralise le déterminant ordinaire $|b_{ij}\,\delta_{ij}|$ où seuls les éléments diagonaux principaux peuvent être différents de zéro. Le déterminant *complémentaire* de (Δ), c'est-à-dire celui (Δ') obtenu en remplaçant le coefficient α de b par $1 - \alpha$, généralise le déterminant *invertébré* (Sylvester, $n = 2$) où les éléments diagonaux principaux sont nuls. — La multiplication de (Δ) par (Δ'), ou de déterminants du type (Δ') entre eux, ou encore des permanents correspondants entre eux, s'effectuant au moins aussi aisément que celle des déterminants-permanents et ne conduisant, d'ailleurs, à aucun résultat vraiment remarquable, nous croyons pouvoir nous borner à cette simple indication.

SIMPLIFICATIONS

DE LA

Méthode la plus approximative et de l'approximation minima

Étalonnage des Lunettes stadimétriques

Par P. J. E. GOEDSEELS
Administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique
Professeur à l'Université catholique de Louvain (¹)

1. — PRÉLIMINAIRES.

Nous avons publié, dans la dernière édition (1909) de notre *Théorie des erreurs d'observation,* deux méthodes nouvelles pour

---

(¹) Rapport de M. de la Vallée Poussin sur le travail de M. Goedseels : *Simplifications de la méthode de l'approximation minima* (Voir ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, t. XXXV, fasc. II, 1^re^ partie, page 121).

La méthode de l'approximation minimum n'utilise généralement dans la solution définitive qu'un petit nombre des relations proposées, mais la difficulté est de les discerner. Le travail de M. Goedseels a pour objet d'éliminer rapidement au cours des calculs les relations inutiles qui s'introduisent, et cela par la remarque suivante dont l'évidence est immédiate.

Si une inconnue *positive* λ doit vérifier une suite d'inégalités de la forme (1) ou (2) :

$$(1)\quad \begin{cases} a_1\lambda + b_1 \leqslant f \\ a_2\lambda + b_2 \leqslant f \\ \dots \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} a_1\lambda + b_1 \geqslant \varphi \\ a_2\lambda + b_2 \geqslant \varphi \\ \dots \end{cases}$$

une quelconque des inégalités de la suite peut être négligée en présence d'une autre dont les deux coefficients a et b sont respectivement *égaux ou supérieurs* aux siens s'il s'agit de (1), *égaux ou inférieurs* s'il s'agit de (2).

Cette simple remarque rend abordable la détermination de l'approximation minimum d'une série de dix observations effectuées par M. Caenepenne pour déterminer les valeurs finales d'une ou de plusieurs inconnues définies par des équations affectées d'erreurs d'observation. La première de ces méthodes, dite *la plus approximative*, a pour but de trouver les bornes des intervalles qui contiennent les valeurs possibles des inconnues, connaissant les limites des erreurs d'observation. La seconde méthode, dite *de l'approximation minima*, a pour but de trouver la plus petite approximation qu'on puisse assigner aux erreurs affectant une série d'équations, et les valeurs correspondantes des inconnues contenues dans ces équations. Cette deuxième méthode revient à trouver les valeurs des inconnues x, y, z,... qu'on doit introduire dans une série d'équations linéaires :

$$a_1x + b_1y + c_1z \ldots + m_1 = r_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z \ldots + m_2 = r_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

pour que le plus grand des seconds membres r_1, r_2, ..., abstraction faite du signe, atteigne sa limite inférieure. Ces deux méthodes présentent de grands avantages dans les sciences d'observation. Mais elles ont l'inconvénient de donner lieu à des calculs très laborieux.

Notre éminent collègue, M. Ch. de la Vallée Poussin, a exposé dans la session du 27 octobre 1910 de la Société scientifique de Bruxelles une étude très intéressante sur la méthode de l'approximation minima, et une simplification de cette méthode.

Nous nous proposons d'exposer, à notre tour, dans ce travail,

---

étalonner une lunette stadimétrique. Les calculs sont même plus simples que ceux de la méthode des moindres carrés, sur lesquels ils ont encore l'immense avantage de fournir un renseignement de nature précise.

L'auteur indique, en outre, dans un numéro spécial, un procédé de substitutions successives ou d'interpolation qui permet d'éviter avec avantage la formation de toutes les inégalités auxquelles conduirait la méthode systématique d'élimination.

J'estime donc que le travail de M. Goedseels est de nature à intéresser tous les expérimentateurs qui peuvent avoir des observations à discuter, et j'ai l'honneur d'en proposer l'impression.

deux autres simplifications très importantes des deux méthodes. Nous traiterons, comme exemple, une application de la méthode de l'approximation minima à un problème topographique relatif à l'étalonnage des lunettes stadimétriques.

La lecture de cet exemple soulèvera nécessairement deux objections relatives à nos simplifications : 1° qu'elles s'appliquent exclusivement à une ou deux inconnues ; 2° qu'elles exigent d'une de ces inconnues au moins d'être supérieure à zéro.

Pour ne pas être arrêté par ces objections dans la suite nous y répondrons dès à présent.

1° Dans les méthodes que nous avons en vue, on procède toujours par élimination successive des inconnues, et le nombre de ces dernières finit donc toujours par être inférieur à trois. Or, c'est précisément vers la fin des opérations que les méthodes en question deviennent trop compliquées, et que nos simplifications deviennent vraiment utiles.

2° Dans la méthode de l'approximation minima, une des inconnues est toujours essentiellement positive, et remplit, par suite, la condition requise par nos simplifications.

Dans les applications de la méthode la plus approximative, on connaît toujours à priori des valeurs approchées des inconnues, et on sait si elles sont positives, négatives ou voisines de zéro.

Si une inconnue quelconque, x par exemple, se trouve dans un de ces deux derniers cas, on peut la mettre sous une des formes $(x' - 1)$, $(x' - 10)$, $(x' - 100)$ ... et la remplacer ainsi par une inconnue x', qui est certainement positive, comme l'exigent les considérations exposées dans notre travail.

2. — PRINCIPES.

Notre première simplification de nos méthodes découle de six principes relatifs à des inégalités entre des fonctions linéaires $(a_1\lambda + b_1)$, $(a_2\lambda + b_2)$, ... d'une variable *positive*, λ, et une même fonction $f(x, y, z, \ldots)$ d'une ou de plusieurs variables x, y, z, ...

Ces six principes pourraient facilement être condensés en un ou deux énoncés. Mais ils cesseraient alors d'être applicables d'une manière quasi machinale aux problèmes pratiques, ce qui est absolument nécessaire pour éviter les erreurs de calcul.

Premier principe. — *Lorsque les quantités* b_1, b_2, ..., *qui figurent dans une série d'inégalités de la forme :*

$$a_1\lambda + b_1 \leqslant f(x, y, \dots)$$
$$a_2\lambda + b_2 \leqslant f(x, y, \dots)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

sont égales, les valeurs positives de λ *et les valeurs quelconques des autres variables* x, y, ..., *qui vérifient l'inégalité dans laquelle le coefficient de* λ *est le plus grand, vérifient aussi toutes les autres inégalités.*

La démonstration de ce principe est élémentaire.

Deuxième principe. — *Lorsque les quantités* b_1, b_2, ..., *qui figurent dans une série d'inégalités de la forme :*

$$a_1\lambda + b_1 \leqslant f(x, y, \dots)$$
$$a_2\lambda + b_2 \leqslant f(x, y, \dots)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

sont inégales, et que les coefficients a_1, a_2, ... *sont égaux, ou varient dans le même sens que* b_1, b_2, ..., *les valeurs positives de* λ *et les valeurs quelconques des autres variables* x, y, ... *qui vérifient l'inégalité contenant la plus grande des quantités* b_1, b_2... *vérifient toutes les autres inégalités.*

En effet, considérons deux inégalités quelconques :

$$a_u\lambda + b_u \leqslant f(x, y, \dots),$$
$$a_v\lambda + b_v \leqslant f(x, y, \dots),$$

et supposons, pour fixer les idées, $b_u < b_v$.

Considérons, en outre, une valeur positive λ, et des valeurs quelconques x, y, ... vérifiant la deuxième inégalité.

Puisque a_u et a_v sont égaux ou varient dans le même sens que b_u et b_v, et puisque λ et b_v sont respectivement supérieurs à zéro et à b_u nous avons :

$$a_u\lambda + b_u \leqslant a_v\lambda + b_v\,.$$

Comme $a_v\lambda + b_v$ est inférieur ou égal à $f(x, y, \ldots)$ nous avons a fortiori

$$a_u\lambda + b_u \leqslant f(x, y, \ldots).$$

En considérant ainsi toutes les inégalités proposées, prises deux à deux, en commençant par celle où le terme indépendant de λ est le plus grand, on démontre que les valeurs positives de λ et les valeurs quelconques de $x, y, \ldots$ qui vérifient cette dernière inégalité, vérifient aussi toutes les autres.

TROISIÈME PRINCIPE. — *Lorsque les valeurs positives d'une variable* λ, *et les valeurs quelconques d'une ou de plusieurs variables* $x, y, \ldots$ *sont définies par une série d'inégalités de la forme*

$$a_1\lambda + b_1 \leqslant f(x, y, \ldots)$$
$$a_2\lambda + b_2 \leqslant f(x, y, \ldots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

rangées d'après les valeurs croissantes de $b_1, b_2, \ldots$ *et que de plus les inégalités, correspondant à une même valeur* b_s, *sont rangées d'après les valeurs croissantes des coefficients de* λ_s, *on peut supprimer toutes les inégalités qui précèdent celle où* a_s *a la plus grande valeur, ou la dernière de ces inégalités s'il y en a plusieurs ; opérer de même sur l'ensemble des inégalités suivantes ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste finalement qu'une série d'inégalités dans laquelle les coefficients de* λ *forment une série décroissante.*

Ce principe est une conséquence immédiate des deux précédents.

QUATRIÈME PRINCIPE. — *Lorsque les quantités* $b_1, b_2, \ldots$ *qui figurent dans une série d'inégalités de la forme :*

$$f(x, y, \ldots) \leqslant a_1\lambda + b_1,$$
$$f(x, y, \ldots) \leqslant a_2\lambda + b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

sont égales, les valeurs positives de λ *et les valeurs quelconques de* $x, y, \ldots$ *qui vérifient l'inégalité dans laquelle le coefficient de* λ *est le plus petit, vérifient aussi toutes les autres inégalités.*

Cinquième principe. — *Lorsque les quantités* b_1, b_2, ... *qui figurent dans une série d'inégalités de la forme :*

$$f(x, y, \ldots) \leqslant a_1\lambda + b_1,$$
$$f(x, y, \ldots) \leqslant a_1\lambda + b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sont inégales et que les coefficients a_1, a_2, ... *sont égaux ou varient dans le même sens que* b_1, b_2, ..., *les valeurs positives de* λ *et les valeurs quelconques de* x, y, ..., *qui vérifient l'inégalité contenant la plus petite des quantités* b_1, b_2, ... *vérifient toutes les autres inégalités.*

Sixième principe. — *Lorsque les valeurs positives d'une variable* λ, *et les valeurs quelconques d'une ou de plusieurs variables* x, y, ... *sont définies par une série d'inégalités de la forme :*

$$f(x, y, \ldots) \leqslant a_s\lambda + b_s,$$

rangées d'après les valeurs croissantes de b_1, b_2, ..., *et que, de plus, les inégalités, correspondant éventuellement à une même valeur* b_s, *sont rangées d'après les valeurs croissantes des coefficients de* λ_1, *on peut supprimer toutes les inégalités qui suivent celle où* a_s *a la plus petite valeur, ou la première de ces inégalités s'il y en a plusieurs ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste finalement qu'une série d'inégalités dans laquelle les coefficients de* λ *forment une série décroissante.*

Ce principe résulte immédiatement des deux précédents.

3. — EXEMPLE NUMÉRIQUE.

On démontre, en topographie, que la distance D entre un point fixe, choisi sur la ligne de visée principale d'une lunette stadimétrique, et le point où cette ligne rencontre une stadia qui lui est perpendiculaire, est une fonction linéaire :

$$D = F + K \cdot H,$$

de la longueur H comprise, sur la stadia, entre la ligne de visée principale et la ligne de visée secondaire.

Le terme F et le coefficient K sont des quantités qui varient seulement d'un instrument à l'autre.

On peut mettre la relation ci-dessus sous une autre forme, en divisant ses deux membres par K, en posant $-(F : K) = x$, et $(1 : K) = y$, il vient ainsi :

$$x + y \,.\, D = H.$$

Les opérations désignées sous le nom d'*étalonnage* d'une lunette stadimétrique ont pour but de déterminer les constantes F et K ou x et y relatives à cette lunette. Elles consistent à mesurer directement un certain nombre de longueurs D, et les valeurs correspondantes de H, et à former ainsi une série d'équations permettant de déterminer les constantes par l'application des méthodes de la théorie des erreurs d'observation.

Un observateur, M. Caenepenne Arthur, étudiant aux Écoles spéciales de l'Université catholique de Louvain, a effectué une série d'observations de l'espèce, pour l'étalonnage de la lunette stadimétrique d'un théodolite de l'Université. Il a donné à D dix valeurs variant de 20^{m} en 20^{m} depuis 20^{m} jusqu'à 200^{m}, et mesuré les dix valeurs correspondantes de H. En désignant par $20r_1$, $40r_2$, $60r_3$, ... $200r_{10}$ les erreurs inévitables des observations, les déterminations de M. Caenepenne ont fourni les équations formant le tableau I, ci-après.

Tableau I

a	$x + 20y = 0{,}200 + 20r_1$
b	$x + 40y = 0{,}400 + 40r_2$
c	$x + 60y = 0{,}600 + 60r_3$
d	$x + 80y = 0{,}800 + 80r_4$
e	$x + 100y = 1{,}008 + 100r_5$
f	$x + 120y = 1{,}218 + 120r_6$
g	$x + 140y = 1{,}426 + 140r_7$
h	$x + 160y = 1{,}628 + 160r_8$
i	$x + 180y = 1{,}830 + 180r_9$
j	$x + 200y = 2{,}036 + 200r_{10}$

4. MÉTHODE PRIMITIVE.

La méthode dite de l'approximation minima a pour but : 1° de trouver la plus petite valeur m de l'approximation, λ, des erreurs inconnues r_1, r_2, ... ; c'est-à-dire la plus petite valeur de λ qui vérifie les inégalités du tableau II ci-dessous ; 2° de déterminer les valeurs correspondantes de x et y.

Tableau II

a	$-020\lambda \leqslant x + 020y - 0{,}200 \leqslant 020\lambda$
b	$-040\lambda \leqslant x + 040y - 0{,}400 \leqslant 040\lambda$
c	$-060\lambda \leqslant x + 060y - 0{,}600 \leqslant 060\lambda$
d	$-080\lambda \leqslant x + 080y - 0{,}800 \leqslant 080\lambda$
e	$-100\lambda \leqslant x + 100y - 1{,}008 \leqslant 100\lambda$
f	$-120\lambda \leqslant x + 120y - 1{,}218 \leqslant 120\lambda$
g	$-140\lambda \leqslant x + 140y - 1{,}426 \leqslant 140\lambda$
h	$-160\lambda \leqslant x + 160y - 1{,}628 \leqslant 160\lambda$
i	$-180\lambda \leqslant x + 180y - 1{,}830 \leqslant 180\lambda$
j	$-200\lambda \leqslant x + 200y - 2{,}036 \leqslant 200\lambda$

Pour trouver m, on élimine successivement x et y.

Pour éliminer une inconnue x, on commence par l'isoler dans les inégalités. On obtient ainsi le tableau III.

Tableau III

a	$-020\lambda - 020y + 0{,}200 \leqslant x \leqslant 020\lambda - 020y + 0{,}200$
b	$-040\lambda - 040y + 0{,}400 \leqslant x \leqslant 040\lambda - 040y + 0{,}400$
c	$-060\lambda - 060y + 0{,}600 \leqslant x \leqslant 060\lambda - 060y + 0{,}600$
d	$-080\lambda - 080y + 0{,}800 \leqslant x \leqslant 080\lambda - 080y + 0{,}800$
e	$-100\lambda - 100y + 1{,}008 \leqslant x \leqslant 100\lambda - 100y + 1{,}008$
f	$-120\lambda - 120y + 1{,}218 \leqslant x \leqslant 120\lambda - 120y + 1{,}218$
g	$-140\lambda - 140y + 1{,}426 \leqslant x \leqslant 140\lambda - 140y + 1{,}426$
h	$-160\lambda - 160y + 1{,}628 \leqslant x \leqslant 160\lambda - 160y + 1{,}628$
i	$-180\lambda - 180y + 1{,}830 \leqslant x \leqslant 180\lambda - 180y + 1{,}830$
j	$-200\lambda - 200y + 2{,}036 \leqslant x \leqslant 200\lambda - 200y + 2{,}036$

Pour que ces inégalités soient satisfaites, il faut et il suffit que chacun des premiers membres de ces inégalités soit égal ou inférieur à chacun des troisièmes membres, et que x prenne une valeur comprise entre le plus grand des premiers membres et le plus petit des troisièmes.

En traduisant ces conditions par les inégalités correspondantes on obtient 100 relations entre y et λ.

Dix de ces relations se réduisent à

$$\lambda > 0.$$

Les quatre-vingt-dix autres se composent de 45 inégalités de la forme :

$$a_u\lambda + b_u \leqslant f(y),$$

et de 45 inégalités de la forme inverse :

$$f(y) \leqslant a_v\lambda + b_v .$$

Pour éliminer y, il suffit de former toutes les inégalités

$$a_u\lambda + b_u \leqslant a_v\lambda + b_v .$$

Ces inégalités sont au nombre de $45 \times 45 = 2025$.

Les calculs deviennent donc extrêmement laborieux, et c'est à partir de ce moment qu'interviennent les simplifications dont l'exposé fait l'objet de notre travail.

5. — PREMIÈRES SIMPLIFICATIONS.

Le tableau IV ci-après contient, à gauche, les 45 inégalités $a\lambda + b \leqslant f(y)$, groupées d'après les fonctions $f(y)$, et rangées dans chaque groupe suivant les valeurs croissantes de b. Les inégalités correspondant, dans un groupe, à une même valeur de b sont rangées d'après les valeurs croissantes de a.

Le même tableau contient, à droite, les 45 inégalités $f(y) \leqslant a\lambda + b$, groupées et rangées comme celles de gauche.

Les deux lettres inscrites dans les colonnes intitulées TABL. III indiquent les inégalités du tableau III dont la combinaison a fourni l'expression en λ figurant sur la même ligne que ces deux lettres.

En appliquant le troisième principe aux expressions de gauche, on peut en supprimer dix-sept indiquées par la lettre s, inscrite à côté de chaque expression à supprimer.

En appliquant le sixième principe aux expressions de droite, on peut en supprimer trente-six indiquées par la lettre s, inscrite à côté de chaque expression à supprimer.

TABLEAU IV

N^{os}	TABL. III		$a\lambda + b \leqslant$		$f(y)$	TABL. III		$\leqslant a\lambda + b$	
1	*c*	*d*	$-140\lambda + 0{,}200$	*s*	$20y$	*a*	*b*	$060\lambda + 0{,}200$	
2	*b*	*c*	$-100\lambda + 0{,}200$	*s*		*b*	*c*	$100\lambda + 0{,}200$	*s*
3	*a*	*b*	$-060\lambda + 0{,}200$			*c*	*d*	$140\lambda + 0{,}200$	*s*
4	*h*	*i*	$-340\lambda + 0{,}202$	*s*		*g*	*h*	$300\lambda + 0{,}202$	*s*
5	*g*	*h*	$-300\lambda + 0{,}202$	*s*		*h*	*i*	$340\lambda + 0{,}202$	*s*
6	*i*	*j*	$-380\lambda + 0{,}206$	*s*		*i*	*j*	$380\lambda + 0{,}206$	*s*
7	*f*	*g*	$-260\lambda + 0{,}208$	*s*		*d*	*e*	$180\lambda + 0{,}208$	*s*
8	*d*	*e*	$-180\lambda + 0{,}208$			*f*	*g*	$260\lambda + 0{,}208$	*s*
9	*e*	*f*	$-220\lambda + 0{,}210$			*e*	*f*	$220\lambda + 0{,}210$	*s*
10	*b*	*d*	$-120\lambda + 0{,}400$	*s*	$40y$	*a*	*c*	$080\lambda + 0{,}400$	
11	*a*	*c*	$-080\lambda + 0{,}400$			*b*	*d*	$120\lambda + 0{,}400$	*s*
12	*g*	*i*	$-320\lambda + 0{,}404$	*s*		*g*	*i*	$320\lambda + 0{,}404$	*s*
13	*h*	*j*	$-360\lambda + 0{,}408$	*s*		*c*	*e*	$160\lambda + 0{,}408$	*s*
14	*c*	*e*	$-160\lambda + 0{,}408$			*h*	*j*	$360\lambda + 0{,}408$	*s*
15	*f*	*h*	$-280\lambda + 0{,}410$	*s*		*f*	*h*	$280\lambda + 0{,}410$	*s*
16	*d*	*f*	$-240\lambda + 0{,}418$	*s*		*d*	*f*	$200\lambda + 0{,}418$	*s*
17	*e*	*g*	$-200\lambda + 0{,}418$			*e*	*g*	$240\lambda + 0{,}418$	*s*
18	*a*	*d*	$-100\lambda + 0{,}600$		$60y$	*a*	*d*	$100\lambda + 0{,}600$	
19	*b*	*e*	$-140\lambda + 0{,}608$			*b*	*e*	$140\lambda + 0{,}608$	*s*
20	*g*	*j*	$-340\lambda + 0{,}610$	*s*		*g*	*j*	$340\lambda + 0{,}610$	*s*
21	*f*	*i*	$-300\lambda + 0{,}612$	*s*		*f*	*i*	$300\lambda + 0{,}612$	*s*
22	*c*	*f*	$-180\lambda + 0{,}618$			*c*	*f*	$180\lambda + 0{,}618$	*s*
23	*e*	*h*	$-260\lambda + 0{,}620$	*s*		*e*	*h*	$260\lambda + 0{,}620$	*s*
24	*d*	*g*	$-220\lambda + 0{,}626$			*d*	*g*	$220\lambda + 0{,}626$	*s*
25	*a*	*e*	$-120\lambda + 0{,}808$		$80y$	*a*	*e*	$120\lambda + 0{,}808$	
26	*f*	*j*	$-320\lambda + 0{,}818$	*s*		*b*	*f*	$160\lambda + 0{,}818$	*s*
27	*b*	*f*	$-160\lambda + 0{,}818$			*f*	*j*	$320\lambda + 0{,}818$	*s*
28	*e*	*i*	$-280\lambda + 0{,}822$	*s*		*e*	*i*	$280\lambda + 0{,}822$	*s*
29	*c*	*g*	$-200\lambda + 0{,}826$			*c*	*g*	$200\lambda + 0{,}826$	*s*
30	*d*	*h*	$-240\lambda + 0{,}828$			*d*	*h*	$240\lambda + 0{,}828$	*s*
31	*a*	*f*	$-140\lambda + 1{,}018$		$100y$	*a*	*f*	$140\lambda + 1{,}018$	
32	*b*	*g*	$-180\lambda + 1{,}026$			*b*	*g*	$180\lambda + 1{,}026$	*s*
33	*e*	*j*	$-300\lambda + 1{,}028$	*s*		*c*	*h*	$220\lambda + 1{,}028$	*s*
34	*c*	*h*	$-220\lambda + 1{,}028$			*e*	*j*	$300\lambda + 1{,}028$	*s*
35	*d*	*i*	$-260\lambda + 1{,}030$			*d*	*i*	$260\lambda + 1{,}030$	*s*
36	*a*	*g*	$-160\lambda + 1{,}226$		$120y$	*a*	*g*	$160\lambda + 1{,}226$	
37	*b*	*h*	$-200\lambda + 1{,}228$			*b*	*h*	$200\lambda + 1{,}228$	*s*
38	*c*	*i*	$-240\lambda + 1{,}230$			*c*	*i*	$240\lambda + 1{,}230$	*s*
39	*d*	*j*	$-280\lambda + 1{,}236$			*d*	*j*	$280\lambda + 1{,}236$	*s*
40	*a*	*h*	$-180\lambda + 1{,}428$		$140y$	*a*	*h*	$180\lambda + 1{,}428$	
41	*b*	*i*	$-220\lambda + 1{,}430$			*b*	*i*	$220\lambda + 1{,}430$	*s*
42	*c*	*j*	$-260\lambda + 1{,}436$			*c*	*j*	$260\lambda + 1{,}436$	*s*
43	*a*	*i*	$-200\lambda + 1{,}630$		$160y$	*a*	*i*	$200\lambda + 1{,}630$	
44	*b*	*j*	$-240\lambda + 1{,}636$			*b*	*j*	$240\lambda + 1{,}636$	*s*
45	*a*	*j*	$-220\lambda + 1{,}836$		$180y$	*a*	*j*	$220\lambda + 1{,}836$	

Le premier travail de suppression étant fait, on ramène toutes les inégalités par exemple à $f(y) = 50400y$.

TABLEAU V

Nos DU TABL. IV	$a\lambda + b \leqslant 50400y$		Nos DU TABL. IV	$50400y \leqslant a\lambda + b$	
3	$-\ 151200\lambda + 504{,}000$	s	18	$084000\lambda + 504{,}000$	
11	$-\ 100800\lambda + 504{,}000$	s	11	$100800\lambda + 504{,}000$	s
18	$-\ 084000\lambda + 504{,}000$	s	3	$151200\lambda + 504{,}000$	s
25	$-\ 075600\lambda + 509{,}040$	s	25	$075600\lambda + 509{,}040$	
19	$-\ 117600\lambda + 510{,}720$	s	31	$070560\lambda + 513{,}072$	
31	$-\ 070560\lambda + 513{,}072$	s	43	$063000\lambda + 513.450$	
43	$-\ 063000\lambda + 513{,}450$	s	45	$061600\lambda + 514{,}080$	
14	$-\ 201600\lambda + 514{,}080$	s	40	$064800\lambda + 514{,}080$	s
40	$-\ 064800\lambda + 514{,}080$	s	36	$067200\lambda + 514{,}920$	s
45	$-\ 061600\lambda + 514{,}080$				
41	$-\ 079200\lambda + 514{,}800$	s			
36	$-\ 067200\lambda + 514{,}920$				
27	$-\ 100800\lambda + 515{,}340$	s			
44	$-\ 075600\lambda + 515{,}340$				
37	$-\ 084000\lambda + 515{,}760$				
38	$-\ 100800\lambda + 516{,}600$	s			
42	$-\ 093600\lambda + 516{,}960$	s			
32	$-\ 090720\lambda + 517{,}104$				
34	$-\ 110880\lambda + 518{,}112$				
22	$-\ 151200\lambda + 519{,}120$	s			
35	$-\ 131040\lambda + 519{,}120$	s			
39	$-\ 117600\lambda + 519{,}120$				
29	$-\ 126000\lambda + 520{,}380$				
30	$-\ 151200\lambda + 521{,}640$				
8	$-\ 453600\lambda + 524{,}160$	s			
24	$-\ 184800\lambda + 525{,}840$				
17	$-\ 252000\lambda + 526{,}680$				
9	$-\ 554400\lambda + 529{,}200$				

Le même résultat aurait pu être atteint en divisant les groupes à partir du second inclusivement respectivement par 2, 3, ... 9, de manière à obtenir partout $f(y) = 20y$. Nous avons préféré multiplier les groupes par des facteurs tels qu'on obtienne partout $f(y) = 50400y$, plus petit commun multiple de $20y$, $40y$, ... $180y$, et c'est ainsi que nous avons obtenu la série d'expressions rangées dans le tableau V ci-dessus :

En appliquant le troisième et le sixième principe à ce dernier tableau, on peut supprimer les 20 expressions à droite desquelles se trouve inscrite la lettre *s*.

Il reste ainsi 12 binômes $(a\lambda + b)$ inférieurs et 5 binômes $(a\lambda + b)$ supérieurs à $50400y$.

En exprimant que chacun de ces 12 binômes de gauche est égal ou inférieur à chacun de ces 5 binômes de droite on obtient finalement 60 inégalités ne contenant plus que λ.

La simplification de la méthode a donc permis de remplacer les 2025 inégalités primitives par 60 inégalités seulement. Les 60 inégalités en λ, mises sous la forme $a\lambda + b \leqslant 0$, et classées d'après les valeurs croissantes de b, et d'après les valeurs croissantes de a, pour une même valeur de b, formant le tableau VI ci-après. Les trois numéros inscrits sur chaque ligne indiquent : 1° un numéro d'ordre ; 2° le numéro, dans le tableau V, de l'expression $(a\lambda + b) \leqslant 5040y$ qui a servi à former l'inégalité en λ ; 3° le numéro, dans le même tableau, de l'expression $(5040y) \leqslant a\lambda + b)$ combinée avec la précédente.

Ces soixante inégalités en λ, comprises dans le tableau VI, donnent chacune un nombre égal ou inférieur à λ. Le plus grand est nécessairement la plus petite valeur m, possible pour λ.

Pour trouver le plus grand de ces soixante nombres il n'est pas nécessaire de les calculer tous.

En effet, les relations de la forme $a\lambda + b \leqslant 0$ peuvent être considérées comme un cas particulier des relations $a\lambda + b \leqslant f(y)$ correspondant à $f(y) = 0$.

Cela étant, si l'on applique le troisième principe aux soixante inégalités du tableau VI, on peut supprimer les 42 relations indiquées par la lettre *s*, et se borner par conséquent à calculer 18 quantités ne surpassant pas λ. Les logarithmes de ces 18 quantités suivent le tableau VI.

Tableau VI

N^os	N^os du Tabl. V			$a\lambda + b \leqslant 0$	N^os	N^os du Tabl. V			$a\lambda + b \leqslant 0$
1	45	45		$-123200\lambda + 00{,}000$	31	30	43	*s*	$-214200\lambda + 08{,}190$
2	45	43		$-124600\lambda + 00{,}630$	32	30	31	*s*	$-221760\lambda + 08{,}568$
3	36	45		$-128800\lambda + 00{,}840$	33	34	25	*s*	$-186480\lambda + 09{,}072$
4	45	31	*s*	$-132160\lambda + 01{,}008$	34	45	18	*s*	$-193200\lambda + 10{,}080$
5	44	45	*s*	$-137200\lambda + 01{,}260$	35	39	25		$-145600\lambda + 10{,}080$
6	36	43		$-130200\lambda + 01{,}470$	36	36	18		$-151200\lambda + 10.920$
7	37	45	*s*	$-145600\lambda + 01{,}680$	37	44	18	*s*	$-201600\lambda + 11{,}340$
8	36	31	*s*	$-137760\lambda + 01{,}848$	38	29	25		$-159600\lambda + 11{,}340$
9	44	43	*s*	$-138600\lambda + 01{,}890$	39	39	18	*s*	$-246400\lambda + 11{,}760$
10	44	31	*s*	$-146160\lambda + 02{,}268$	40	24	45		$-168000\lambda + 11{,}760$
11	37	43	*s*	$-147000\lambda + 02{,}310$	41	24	43	*s*	$-247800\lambda + 12{,}390$
12	37	31	*s*	$-154560\lambda + 02{,}688$	42	30	25	*s*	$-313600\lambda + 12{,}600$
13	32	45	*s*	$-152320\lambda + 03{,}024$	43	17	45	*s*	$-226800\lambda + 12{,}600$
14	32	43	*s*	$-153720\lambda + 03{,}654$	44	24	31	*s*	$-255360\lambda + 12{,}768$
15	34	45	*s*	$-172480\lambda + 04{,}032$	45	32	18		$-174720\lambda + 13{,}104$
16	33	31	*s*	$-161280\lambda + 04{,}032$	46	17	43	*s*	$-315000\lambda + 13{,}230$
17	34	43	*s*	$-173880\lambda + 04{,}662$	47	17	31	*s*	$-322560\lambda + 13{,}608$
18	34	31	*s*	$-181440\lambda + 05{,}040$	48	34	18		$-194880\lambda + 14{,}112$
19	39	45	*s*	$-179200\lambda + 05{,}040$	49	39	18	*s*	$-616000\lambda + 15{,}120$
20	45	25		$-137200\lambda + 05{,}040$	50	9	45		$-201600\lambda + 15{,}120$
21	39	43	*s*	$-180600\lambda + 05{,}670$	51	9	43	*s*	$-617400\lambda + 15{,}750$
22	36	25		$-142800\lambda + 05{,}880$	52	9	31	*s*	$-624960\lambda + 16{,}128$
23	39	31	*s*	$-188160\lambda + 06{,}048$	53	29	18		$-210000\lambda + 16{,}380$
24	44	25	*s*	$-187600\lambda + 06{,}300$	54	24	25	*s*	$-260400\lambda + 16{,}800$
25	29	45	*s*	$-151200\lambda + 06{,}300$	55	17	25	*s*	$-327600\lambda + 17{,}640$
26	37	25	*s*	$-159600\lambda + 06{,}721$	56	30	18		$-235200\lambda + 17{,}640$
27	29	43	*s*	$-189000\lambda + 06{,}930$	57	9	25	*s*	$-630000\lambda + 20{,}160$
28	29	31	*s*	$-196560\lambda + 07{,}308$	58	24	18		$-268800\lambda + 21{,}840$
29	30	45	*s*	$-212800\lambda + 07{,}560$	59	17	18		$-336000\lambda + 22{,}680$
30	32	25	*s*	$-166320\lambda + 08{,}064$	60	9	18		$-638400\lambda + 25{,}200$

$$
\begin{array}{ll}
-\infty & \\
\bar{6},7038225 & \\
\bar{6},8143634 & \\
\bar{5},0527063 & \\
\bar{5},5650764 & \\
\bar{5},6176491 & \\
\bar{5},8402991 & \\
\bar{5},8586708 & \\
\bar{5},8515802 & \\
\bar{5},8450980 & \\
\bar{5},8750613 & \\
\bar{5},8598213 & \\
\bar{5},8750613 & \\
\bar{5},8923015 & \\
\bar{5},8750613 & \\
\bar{5},9098233 & \quad (58,\ 24,\ 18) \\
\bar{5},8293038 & \\
\bar{5},5963076 &
\end{array}
$$

La plus grande quantité correspond à $\bar{5},9098233$ et vaut :

$$0,00008125.$$

C'est le plus grand nombre égal ou inférieur à la quantité λ, et par suite la plus petite valeur m qu'on puisse attribuer à cette quantité.

Elle provient de la ligne n° 58 du tableau VI et des expressions 24 et 18 du tableau V. Ces expressions sont :

$$-184800\lambda + 525,840 \leq 50400y \leq 84000\lambda + 504,000$$

ou :

$$-220\lambda + 0626 \leq 60y \leq 100\lambda + 0,600.$$

En y remplaçant λ par m elles deviennent :

$$510,825 \leq 50400y \leq 510,825$$

ou :

$$0{,}608125 \leqslant 60y \leqslant 0{,}608125$$

et donnent :

$$y = \frac{510{,}825}{50400} = \frac{0{,}608125}{60} = 0{,}01013541666\ldots$$

En introduisant ces valeurs de λ et y dans les inégalités en x, du tableau III, nous trouvons :

(a) $\quad -0{,}00433\ldots \leqslant x \leqslant -0{,}0010833\ldots$
(b) $\quad -0{,}00866\ldots \leqslant x \leqslant -0{,}0021666\ldots$
(c) $\quad -0{,}01300\ldots \leqslant x \leqslant -0{,}0032500\ldots$
(d) $\quad -0{,}01733\ldots \leqslant x \leqslant -0{,}0043333\ldots$
(e) $\quad -0{,}01366\ldots \leqslant x \leqslant +0{,}0025833\ldots$
(f) $\quad -0{,}00800\ldots \leqslant x \leqslant +0{,}011500\ldots$
(g) $\quad -0{,}00433\ldots \leqslant x \leqslant +0{,}0184166\ldots$
(h) $\quad -0{,}00666\ldots \leqslant x \leqslant +0{,}017333\ldots$
(i) $\quad -0{,}00900\ldots \leqslant x \leqslant +0{,}020250\ldots$
(j) $\quad -0{,}00733\ldots \leqslant x \leqslant +0{,}025166\ldots$

La plus grande valeur égale ou inférieure à x est $-0{,}00433$. Elle est donnée par les relations (a,g). La plus petite valeur égale ou supérieure à x est aussi $-0{,}00433\ldots$ Elle est fournie par la relation (d). On a donc :

$$x = -0{,}00433\ldots$$

Ce résultat est d'accord avec le tableau IV, car on voit que l'expression 24 de gauche et l'expression 18 de droite, qui ont fourni m et y, proviennent précisément des relations (d, g) et (a, d).

La formule initiale de l'exemple numérique que nous venons de traiter est :

$$\mathrm{D} = \mathrm{F} + \mathrm{K}\,.\,\mathrm{H}.$$

Nous avons donc :

$$\mathrm{K} = (1 : y) = 98{,}664\,;$$

$$\mathrm{F} = -\mathrm{K}x = 0{,}428\,;$$

$$\mathrm{D} = 0{,}428 + 98{,}664\mathrm{H}.$$

6. — DEUXIÈME SIMPLIFICATION DE LA MÉTHODE.

Il arrive que, malgré la suppression d'un certain nombre d'expressions $a\lambda + b$, dans les séries telles que :

$$a_u\lambda + b_u \leqslant f(x, y, \ldots) \leqslant a_v\lambda + b_v$$

les inégalités :

$$a_u\lambda + b_u \leqslant a_v\lambda + b_v$$

sont encore trop nombreuses pour qu'on puisse les former toutes.

Dans ce cas, on peut souvent trouver plus simplement la quantité λ correspondant à la plus grande valeur possible de $(a_u\lambda + b_u)$ et à la plus petite valeur possible de $(a_v\lambda + b_v)$ en procédant par interpolations successives.

On donne à λ une série de valeurs telles que 1 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001,... jusqu'à ce qu'on en trouve une pour laquelle la plus grande valeur $(a_u\lambda + b)$ surpasse la plus petite valeur $(a_v\lambda + b)$.

Dans l'exemple numérique $a\lambda + b \leqslant 50400y \leqslant a\lambda + b$, on trouve, pour les inégalités du tableau V et pour $\lambda = 0{,}0001$

$$506{,}520 \leqslant 50400y \leqslant 512{,}40.$$

Pour $\lambda = 0{,}00001$ on trouve à la première ligne de la colonne de droite :

$$50400y \leqslant 504{,}840.$$

Comme tous les autres termes b de cette colonne sont supérieurs à 504,840, il est inutile d'en calculer les valeurs. Un seul coup d'œil jeté sur la colonne de gauche suffit pour faire entrevoir un grand nombre de résultats supérieurs à 504,800. La dernière ligne notamment fournit certainement une expression inférieure à $50400y$, voisine de 524.

La valeur 0,0001 est donc absurde et λ est nécessairement compris entre 0,0001 et 0,00001.

En continuant les interpolations on trouve que λ est compris entre 0,00008 et 0,00009 ; et ainsi de suite. Avec un peu d'exercice on parvient à faire très rapidement les calculs de cette espèce, et à entrevoir ceux qui sont inutiles.

7. — CONCLUSIONS TOPOGRAPHIQUES DE L'EXEMPLE NUMÉRIQUE.

Notre but principal, dans ce travail, est d'exposer les simplifications dont nos méthodes la plus approximative et de l'approximation minima sont susceptibles. Nous profiterons néanmoins de l'occasion qui nous est offerte par la résolution complète d'un exemple numérique, pour montrer les services que peuvent rendre nos méthodes au point de vue technique.

On démontre, en topographie, que la lunette stadimétrique vérifie la loi traduite par la formule :

$$D = F + K \,.\, H.$$

On admet à cette fin que l'objectif obéit sensiblement aux principes de la théorie des lentilles.

Or, les lentilles des lunettes topographiques ont des dimensions si petites qu'il semble quasi impossible de les construire avec une précision suffisante pour que l'hypothèse fondamentale ci-dessus soit plausible.

Un excellent moyen de contrôle consiste dans le calcul des erreurs correspondant à l'approximation minima. En adoptant la valeur minima $\lambda = 0{,}00008125$, et les valeurs correspondantes $x = -\,0{,}00433\ldots$, $y = 0{,}0101354166\ldots$ les dix équations du tableau I dans lesquelles les erreurs ont été mises sous les formes $20r_1$, $40r_2$, ... $200r_{10}$, donnent :

$$\begin{aligned}
20r_1 &= -\,0{,}002\\
40r_2 &= +\,0{,}001\\
60r_3 &= +\,0{,}003\\
80r_4 &= +\,0{,}007\\
100r_5 &= +\,0{,}001\\
120r_6 &= -\,0{,}006\\
140r_7 &= -\,0{,}012\\
160r_8 &= -\,0{,}011\\
180r_9 &= -\,0{,}010\\
200r_{10} &= -\,0{,}013
\end{aligned}$$

Par conséquent, si la lunette obéissait aux principes de la théorie des lentilles, et si l'observateur s'en était servi avec le maximum de précision et d'habileté, il aurait encore commis des erreurs atteignant $0^{m},013$ en valeur absolue.

Le travail s'est fait avec soin, en notre présence, et sous notre direction, par un jeune observateur bien doué pour les travaux topographiques, ne commettant pas des erreurs de cette importance. Il est donc certain que la lunette stadimétrique dont il a fait usage, dans les conditions où il a opéré, ne répond pas aux hypothèses théoriques dont découle la formule

$$D = F + K \, . \, H.$$

Par conséquent, si l'on voulait se servir de cet instrument de la manière la plus avantageuse, en conservant néanmoins la formule linéaire ci-dessus, on devrait adopter diverses constantes F et K pour les diverses distances.

Pour les valeurs de H jusqu'à $0^{m},800$ on pourrait prendre $F = 0$ et $K = 100$.

Pour les valeurs de H de $0^{m},800$ jusqu'à $1^{m},008$, on peut poser $H = 0^{m},800 + \Delta$, et :

$$D = 100H + d + c \, . \, \Delta,$$

et déterminer les constantes d et c de manière que la formule soit conforme aux observations à 80^{m} et 100^{m}.

On peut opérer de même pour les intervalles successifs

$$(100^{m}, 120^{m}), (120^{m}, 140^{m}), \ldots (180^{m}, 200^{m}).$$

Afin d'éviter les répétitions des mêmes calculs, on peut préparer ainsi d'avance une table à double entrée des valeurs de D, pour les valeurs de H variant de centimètre en centimètre dans chaque colonne, et de millimètre en millimètre dans chaque ligne.

TABLE DES MATIERES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Statuts 5

Règlement arrêté par le Conseil pour l'encouragement des recherches scientifiques 9

Lettres de S. S. Léon XIII au Président et aux membres de la Société scientifique de Bruxelles. 11

Lettre de S. É. le Card. R. Merry del Val, secrétaire d'État de S. S. le Pape Pie X, au Président de la Société scientifique de Bruxelles en réponse à l'adresse au Saint-Père. 15

Listes des membres de la Société scientifique de Bruxelles (année 1910) 17

Liste des membres fondateurs 17

— des membres honoraires 18

— générale. 20

— géographique 47

— des membres décédés 54

— des membres inscrits dans les sections 55

Membres du Conseil (1909-1910). 62

— — (1910-1911). 63

Bureaux des sections (1910-1911). 64

Sessions de 1910-1911 65

Session du 27 octobre 1910, à Charleroi 65

Séances des sections : Première section. 65

Seconde section 81

Troisième section : séance extraordinaire du 25 juin 1910. 99

séance du 27 oct. 1910 . . 101

Quatrième section 118

PAGES
Assemblée générale 119
Conférence de M. A. Witz. 119
Session du 26 janvier 1911, à Bruxelles 121
Séances des sections : Première section 121
Seconde section 129
Troisième section 141
Quatrième section 154
Sixième section. 176
Assemblée générale 176
Conférence du R. P. G. Schmitz, S. J. 176
Session des 25, 26 et 27 avril 1911, à Bruxelles 177
Séances des sections : Première section 177
Seconde section 193
Troisième section 218
Quatrième section. 265
Cinquième section. 283
Sixième section. 288
Assemblée générale du 25 avril 1911 289
Rapport du Secrétaire général. 289
Conférence de M. A. Proost 296
Assemblée générale du 26 avril 1911 296
Rapport sur la *Société bibliographique de Paris*, par M. le B^{on} de Selle de Beauchamp. 296
Conférence du R. P. de Munnynck, O. P. 299
Assemblée générale du 27 avril 1911 299
Rapport du Trésorier. 300
Résultat des élections : Conseil général 300
Bureaux des sections 301
Questions de Concours 302
Conférences de MM. Morisseaux et Goffart 302
Liste des ouvrages offerts à la Société scientifique de Bruxelles du 1er mai 1910 au 1er mai 1911 303

COMMUNICATIONS DIVERSES

Rapport de M. Goedseels sur le mémoire de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin intitulé : Sur la méthode de l'approximation minimum. 65
Rapport de M. Mansion sur la note de M. Merten, intitulée : Sur un mode de décomposition des équations définissant une fonction de plus de deux variables indépendantes, suivi du texte de cette note 67
Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité, par M. le C^{te} de Sparre 73
Sur un théorème inexact de L. Gegenbauer, relatif au déterminant adjoint d'un déterminant général, par M. M. Lecat 73

PAGES.

Sur la première édition de la *Clavis mathematica* d'Oughtred, par le R. P. H. Bosmans, S. J. 78

Sur la démonstration du théorème de Fermat, par M. Sageret 78

Sur le tétraèdre orthocentrique, par M. J. Neuberg 78

Sur une transformation unirationnelle, par M. J. Neuberg 81

Prisme à trois positions pour salle magnétique, par M. L. N. Vandevyver. 81

Une question de géométrie cinématique à propos de mouvements oculaires, par M. J. Delemer 85

Sur un phénomène lumineux remarquable, observé à l'occasion du passage du noyau de la comète de Halley devant le disque solaire, par M. Casteels 86

Deuxième note sur les paratonnerres, par le R. P. Schaffers, S. J. . . 94

L'organisation et les richesses du Musée du Congo Belge, par M. Maes. 99

Le facies du Givétien, par M. le chanoine Bourgeat 101

a) Le Chelléen Belge. *b)* L'habitation rurale en Flandre, par M. l'abbé Claerhout 101

Mission permanente d'Études scientifiques de la Cie du Kasaï, par M. E. De Wildeman 101

La carte panoramique agricole de Belgique, par M. Albert Henry. . . 102

Un Bombylidae de l'ambre de la Baltique, par M. F. Meunier 102

Les Diptères de l'ambre de la collection de l'Université de Königsberg et des principaux musées européens, par M. F. Meunier 102

Contribution à la Faune diptérologique des environs d'Anvers, par M. F. Meunier 104

Chasse aux diptères en Campine, par M. F. Meunier. 110

Chrysopides (Ins. neur.) nouveaux, par le R. P. L. Navas, S. J. . . . 113

Nouveaux Bethylides et Dryinides exotiques du British Museum de Londres, par l'abbé Kieffer 113

a) Les brèches du houiller ; *b)* Un lieu dit marin sur la veine Petit-Buisson ; *c)* Un banc de sidérolithes (Ormont) ; *d)* Un nouveau Lepidophyllum, par le R. P. Schmitz, S. J. 113

Sur une graine qui paraît devoir être rapportée à Neuropteris Schlehani, Stur., par M. A. Renier 113

Sur la limace et les maladies contagieuses de l'homme et des animaux domestiques, par M. A. Proost 117

Visite des Forges de la Providence, à Marchienne 118

Rapport de M. Mansion sur le mémoire du R. P. Bosmans, S. J. intitulé : La première édition de la *Clavis mathematica* d'Oughtred 121

Rapport de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin sur le mémoire de M. Goedseels intitulé : Simplification de la méthode de l'approximation minima. 121

Sur une généralisation d'un théorème de Brioschi, par M. M. Lecat . . 122

Sur l'hélicoïde gauche à plan directeur, par M. J. Rose 125

Sur certaines congruences de droites de Ribaucour, par M. J. Rose . . 125

Quelques remarques sur le principe de la « tendance des rotations au parallélisme », énoncé en 1852 par Léon Foucault, par M. Janne . . 125

Sur la résolution de l'équation du 2d degré, d'après Simon Stevin, par le R. P. H. Bosmans, S. J. 125

	PAGES.
Sur l'ellipsoïde des dilatations, par M. Wasteels	125
Sur une double formule de Laplace, par M. Mansion	128
Sons produits dans certaines décharges électriques, par M. le chanoine De Muynck	129
Contribution à l'étude de l'électrosténolyse, par M. le chan. De Muynck.	132
Sur quelques effets intéressants d'un coup de foudre, par le R. P. Schaffers, S. J.	140
Éloge du Marquis de Trazegnies, par le R. P. Van den Gheyn, S. J.	141
Rapport de M. A. Renier sur le mémoire de M. l'abbé J. Claerhout intitulé : Le Chelléen Belge	141
Rapport de M. le Baron Charles Gillès de Pélichy sur le mémoire de M. l'abbé Claerhout intitulé : L'Habitation rurale de la Westflandre	143
Sur la palaffitte d'Afsné, par M. l'abbé J. Claerhout	144
L'Aurignacien en Belgique, par M. l'abbé Claerhout.	148
Sur les productions du Congo, par M. E. De Wildeman	149
Sur la classification des Blattidae du houiller de Commentry, par M. F. Meunier	149
Nouveaux Insectes du houiller de Commentry, par M. F. Meunier.	152
Les remèdes indigènes des Bovenkamba, par M. Maes	153
a) Dilaride (Ins. neur.) nouveau ; *b)* Insecte névroptère nouveau de l'Amérique méridionale ; *c)* Deux éphémérides (Ins. neur.) nouveaux du Congo Belge, par le R. P. Navas, S. J.	153
Le traitement de la syphilis par le nouveau remède d'Ehrlich, par le Dr Morelle	154
De l'évolution lente de certaines tumeurs malignes du pharynx, par M. le Dr Goris	170
De la conduite à tenir lorsqu'on se trouve en présence d'une personne qui a dégluti un corps étranger, par M. le Dr Ét. Henrard.	172
Cas de traumatisme de l'orbite ayant amené des lésions graves, confirmé par la radiographie, par M. le Dr Warlomont	174
La technique de l'orientation en aéroplane, par M. le Bon G. de Béthune.	176
Rapport de M. J. Neuberg sur le mémoire de M. Casteels, intitulé : Sur le $2n$-gramme du mathématicien de Morgan.	177
Sur l'octogone gauche de Paul Serret, par M. J. Neuberg	177
Limites nouvelles de la fonction gamma donnée par la formule de Stirling, par M. Mansion	187
Sur la multiplication des déterminants-permanents, par M. M. Lecat.	189
Sur la transformation d'une intégrale multiple en une intégrale simple, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin	189
Sur la valeur moyenne et sur la valeur maxima de l'erreur relative à une inconnue dans la méthode des moindres carrés, par M. Mansion.	190
Sur l'arithmétique de Simon Stevin, par le R. P. Bosmans, S. J.	193
Sur une source d'approvisionnement de sel marin dans les eaux de la mer, par M. G. Van der Mensbrugghe	193
Un aréomètre sans ménisque, par M. F. Leconte.	196

PAGES.

Pyromètre pour aciers, par M. F. Leconte 197
Sur les diagrammes du psychromètre et du pluviomètre, par M. L. N. Vandevyver 198
Sur la décharge entre électrodes à température élevée, par M. le chanoine De Muynck 202
Sur la propagation du mascaret produit par la marée montante aux embouchures des fleuves, par M. J. Delemer. 212
Sur quelques relations possibles entre les apparences cométaires et les phénomènes de luminosité engendrés par le frottement dans le vide imparfait, par M. E. Gerard 218
La radioactivité et le système périodique des éléments, par le R. P. Th. Wulf, S. J. 218
Sur la synthèse de l'eau oxygénée par l'action de l'effluve électrique, par M. A. de Hemptinne. 218
Dilaride (Ins. neur.) nouveau, par le R. P. L. Navas, S. J. 219
Deux éphémérides (Ins. neur.) nouveaux du Congo Belge, par le R. P. L. Navas, S. J. 221
Sur une nouvelle espèce de Némoptéride (Ins. neur.) nouveau du Congo Belge, par le R. P. L. Navas, S. J. 224
Insecte névroptère nouveau de l'Amérique méridionale, par le R. P. L. Navas, S. J. 226
Rapport de M. Renier et du R. P. Van den Gheyn, S. J., sur le mémoire de M. l'abbé Claerhout intitulé : L'Aurignacien en Belgique 228
L'étude de la nature à l'école, par M. le D^{r} H. Lebrun 228
Les objets de numération des peuplades de la Ruzizi-Kivu, par M. Maes. 228
Aperçu des genres de Blattidae des houillères de Commentry, par M. F. Meunier. 228
Tipulidae du genre Polymaera de l'ambre de la Baltique, par M. F. Meunier. 232
Empreintes de Calamostachys Ludwigi, dans le Westphalien de la Belgique, par M. A. Renier 232
Discussion sur l'influence de l'enseignement des sciences naturelles dans la vie publique 233
Discussion sur les rapports de la Philosophie avec les sciences biologiques et médicales 253
Sur la « Meiostagmin-reaction », par M. le D^{r} Degrave. 280
Présentation de pièces anatomiques, par M. le D^{r} Solé. 280
Les indices des progrès économiques de la Belgique, par M. A. Julin . 283
Sur les moyens de relever les cours de la rente belge 3 % par l'action des lois économiques, par M. Éd. Van der Smissen 283
Paris port de mer, par M. G. Blondel. 285
L'hinterland nord du port de Beira, par M. Morisseaux. 287
Le commerce belge au Katanga, par M. F. Goffart 287
Sur les transmissions par câbles, par M. P. Daubresse 288
Les procédés d'affinage sur sole et le procédé Hoesch, par M. Renaud . 288
Les explosions de poussières de houille, par M. A. Renier 289

CONFÉRENCES

PAGES.
Les moteurs de la métallurgie, par M. A. Witz 119
La houille et la tourbe, par le R. P. G. Schmitz, S. J. 176
La fertilisation des rochers, des garigues et des marais en Italie et en Provence, par M. A. Proost 296
La psychologie du spécialiste, par le R. P. De Munnynck, O. P. . . . 299
L'hinterland nord du port de Beira, par M. Ch. Morisseaux 302
Le commerce belge au Katanga, par M. F. Goffart 302

QUESTIONS DE CONCOURS

Première section 177
Deuxième — 202
Troisième — 218
Sixième — 288

AUTEURS

de Béthune, 176. — Blondel, 285. — Bosmans, 78, 118, 125, 193. — Bourgeat, 107. — Casteels, 86, 177. — Claerhout, 101, 141, 143, 144, 148, 228. — Daubresse, 288. — Degrave, 280. — Delemer, 85, 212. — De Munnynck, 299. — De Muynck, 129, 132, 202. — De Wildeman, 101, 149. — Gerard, 218. — Gillès de Pélichy, 143. — Goffart, 287, 302. — Goedseels, 65, 121. — Goris, 170. — de Hemptinne, 218. — Henrard, 172. — Henry, 102. — Janne, 125. — Julin, 283. — Kieffer, 113. — Lebrun, 228, 233. — Lecat, 73, 122, 189. — Leconte, 196, 197. — Maes, 99, 153, 228. — Mansion, 67, 118, 128, 187, 190. — Merten, 67. — Meunier, 102, 104, 110, 149, 152, 228, 232. — Morelle, 154. — Morisseaux, 287, 302. — Navas, 113, 153, 219, 221, 224, 226. — Neuberg, 78, 81, 177. — Proost, 117, 296. — Renaud, 288. — Renier, 113, 141, 289. — Rose, 125. — Sageret, 78. — Schaffers, 94, 140. — Schmitz, 113, 176. — Solé, 280. — de Sparre, 73. — de la Vallée Poussin, 65, 121, 189. — Van den Gheyn, 141. — Van der Smissen, 283. — Van der Mensbrugghe, 193. — Vandevyver, 81, 198. — Warlomont, 174. — Wasteels, 125. — Witz, 119. — Wulf, 218.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Sur la méthode de l'approximation minimum, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin 1
La carte panoramique agricole de la Belgique, par M. A. Henry . . . 17
La première édition de la *Clavis Mathematica* d'Oughtred, son influence sur la *Géométrie* de Descartes, par le R. P. H. Bosmans, S. J. (¹) . . 24
Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité, par M. le comte de Sparre 79
Quelques remarques sur le principe de la « tendance des rotations au parallélisme » énoncé en 1852 par Léon Foucault, par M. Henry Janne. 151
Sur une transformation unirationnelle, par M. J. Neuberg (²) 170
Sur la géométrie des mouvements oculaires, par M. J. Delemer . . . 179
Nouveaux Bethylides et Dryinides exotiques du British Museum de Londres, par M. J.-J. Kieffer 200
Le Chelléen belge, par M. l'abbé J. Claerhout 234
L'habitation rurale de la Westflandre, par M. l'abbé J. Claerhout . . . 246
Chrysopides (Ins. neur.) nouveaux, par le R. P. Longin Navas, S. J. . . 266
La radioactivité et la série périodique des éléments, par le R. P. Th. Wulf, S. J. 283
Notes sur l'arithmétique de Simon Stevin, par le R. P. H. Bosmans, S. J. 293
Le Moustérien belge, par M. l'abbé J. Claerhout 314
Sur la synthèse de l'eau oxygénée sous l'action de l'effluve électrique, par M. A. de Hemptinne 323
Sur la multiplication des déterminants-permanents, par M. M. Lecat . . 339
Simplifications à la méthode de l'approximation minima. Étalonnage des lunettes stadimétriques, par M. E. Goedseels. 351

(¹) *Erratum*, page 53 (30 du tiré à part), ligne 19, au lieu de : dès 1685, lire : dès 1631.

(²) *Erratum*, page 175, lignes 11 en remontant et suivantes, lire : on en conclut que les droites t, formant avec T des octogones dont les sphères diagonales passent par A_1, sont les rayons de la gerbe A_1 et les droites du plan T.

AUTEURS

Bosmans, 24, 293. — Claerhout, 234, 248, 314. — Delemer, 179. — Goedseels, 351. — de Hemptinne, 323. — Henry, 17. — Janne, 151. — Kieffer, 200. — Lecat, 339. — Navas, 266. — Neuberg, 70. — de Sparre, 79. — de la Vallée Poussin, 1. — Wulf, 284.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXIV, 1875 à 1910. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun . . . . fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Un vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr. ; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Un vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Éd. Van der Smissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905). . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : **T. I.** Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. (Épuisé.) **T. II.** VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gênes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. III.** XIII. Le Port moderne de Gênes, M. Theunissen. XIV. Ostende. L.-Th. Léger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow. A. Vanderstichele. Prix : 3 francs. **T. IV.** XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. V.** XXVIII Rouen, G. Blondel. XXIX. Montréal, M. Dewavrin. XXX. Seattle et Tacoma, M. Rondet-Saint. XXXI. Trieste, Fiume, Venise, M. Dewavrin. XXXII. Venise au moyen âge, C. Terlinden. XXXIII. Les ports du Nord-Est de l'Angleterre, J. Meuwissen. — Conclusions, G. Blondel. — Appendices : L'administration des Ports, J. Charles, S. J. ; L'industrie des transports maritimes, H. Mansion. Prix : 3 francs.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le D^{r} X. Francotte. Brochure in-8° de 48 pages (1907) . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le D^{r} Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) fr. **0 75**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901). La livraison de janvier 1902 a inauguré la **troisième série**.

La revue paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de **Variétés**.

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** % ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la REVUE. Un vol. du format de la REVUE de XII-168 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. & R. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXIV, 1875 à 1910. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun . . . . fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Un vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr.; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Un vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Éd. Van der Smissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905). . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : **T. I.** Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. (Épuisé.) **T. II.** VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gênes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. III.** XIII. Le Port moderne de Gênes, M. Theunissen. XIV. Ostende. L.-Th. Léger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow. A. Vanderstichele. Prix : 3 francs. **T. IV.** XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. V.** XXVIII Rouen, G. Blondel. XXIX. Montréal, M. Dewavrin. XXX. Seattle et Tacoma, M. Rondet-Saint. XXXI. Trieste, Fiume, Venise, M. Dewavrin. XXXII. Venise au moyen âge, C. Terlinden. XXXIII. Les ports du Nord-Est de l'Angleterre, J. Meuwissen. — Conclusions, G. Blondel. — Appendices : L'administration des Ports, J. Charles, S. J.; L'industrie des transports maritimes, H. Mansion. Prix : 3 francs.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le D^{r} X. Francotte. Brochure in-8° de 48 pages (1907) . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le D^{r} Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) fr. **0 75**